uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Curso OCW

Fundamentos de transitorios en redes eléctricas

Mª Ángeles Moreno López de Saá
Juan Carlos Burgos Díaz
Mónica Alonso Martínez

PROBLEMA 1.
CARGA DE UNA BOBINA CON FUENTE DE CORRIENTE CONTINUA.

Considérese una carga compuesta por una resistencia de 0,3 Ω y una inductancia de 9,5 mH, sobre la que se aplica una tensión continua de 15 V, como se indica en la figura 1.1. Se pide:

1. Obtener la evolución de la intensidad en el circuito en función del tiempo.
2. Obtener la intensidad en régimen permanente.
3. Obtener el tiempo que se tarda en alcanzar el régimen transitorio.

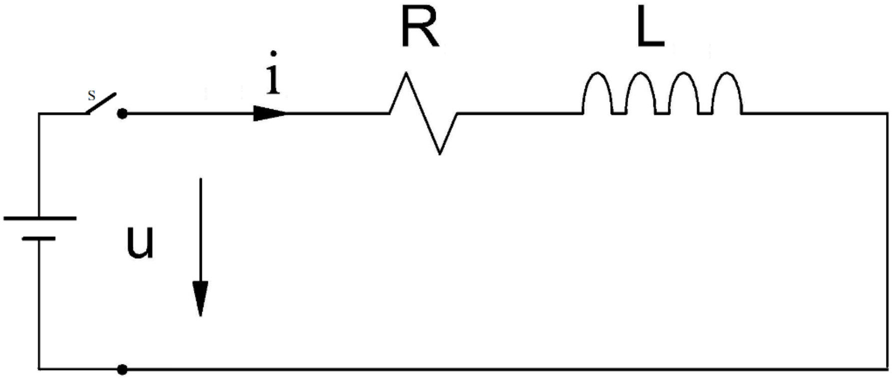

Figura 1.1. Circuito de estudio del problema 1

SOLUCIÓN:

1. Obtener la evolución de la intensidad en el circuito en función del tiempo.

Para resolver el circuito propuesto en la figura 1.1. se plantea la ecuación (1) que rige el comportamiento del circuito aplicando la segunda ley de Kirchhoff.

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{1}$$

En el enunciado del problema 1 se facilita la tensión a la que se alimenta la carga, fuente de tensión continua de 15 V, por lo que la incógnita en el circuito propuesto es la intensidad. Es necesario, por tanto, encontrar una expresión matemática para la intensidad *i* que introducida en la ecuación (1) verifique dicha ecuación.

La ecuación (1) pertenece a las ecuaciones conocidas como ecuaciones diferenciales. Tal y como se ha explicado en los módulos de teoría, la solución a una ecuación diferencial de primer orden, como la planteada en el ejercicio, es la suma de dos sumandos, denominados respuesta libre (i_H) y respuesta forzada (i_p), como se muestra en la ecuación (2).

$$i = i_H + i_p \tag{2}$$

- <u>Respuesta libre (i_H)</u>

El primer sumando (i_H) es una intensidad que verifica la ecuación (3), conocida normalmente como ecuación homogénea.

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \tag{3}$$

La solución de la ecuación homogénea se obtiene sustituyendo en la ecuación (3) el operador derivada $\left(\frac{di}{dt}\right)$ por la letra p elevado a un exponente que es el orden de la derivada. La ecuación (3) es una ecuación diferencial de primer orden, puesto que sólo derivamos una vez con respecto al tiempo, por lo que el exponente de p será 1. De esta forma, la ecuación (3) se transforma en la ecuación (4), que suele denominarse *ecuación característica*.

$$R + Lp = 0 \tag{4}$$

A partir de la ecuación (4) es posible obtiener las raíces de la ecuación característica, siendo en el caso que nos ocupa según la expresión (5):

$$p_1 = -\frac{R}{L} \tag{5}$$

La solución de la ecuación homogénea (4) es una ecuación exponencial de la forma dada por la ecuación (6):

$$i_H = Ke^{p_1 t} \tag{6}$$

Si el problema que estamos analizando fuera sólo un problema matemático, el valor de K podría ser cualquiera. Como es un problema físico, veremos que no puede ser cualquiera y deberemos hallar su valor.

La inversa de p_1 (ecuación 5) tiene dimensiones de tiempo (Henrio dividido entre Ohmio), por lo que se suele llamar constante de tiempo y se denota por τ (7).

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{7}$$

Incorporando la constante de tiempo τ en la expresión de la corriente (6) se obtiene (8):

$$i_H = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \tag{8}$$

Al transcurrir el tiempo, la componente homogénea de la intensidad va reduciendo su valor hasta hacerse casi nula. De esta forma, por ejemplo, en un tiempo de 3τ la corriente se reduce al 5% de su valor inicial.

A la componente homogénea también le llamaremos *respuesta libre* porque no depende de la excitación al sistema (corriente continua o corriente alterna).

- Respuesta forzada o particular (i_p)

El segundo sumando de la ecuación (2), i_p, es una expresión de la intensidad que verifique la ecuación (1). A este sumando se le suele denominar *solución particular* de la ecuación diferencial.

La solución particular, o *respuesta forzada,* es la que se mantiene en el tiempo cuando la respuesta libre se extingue totalmente (pasados más de 3τ). Su expresión matemática depende de la excitación al sistema[1], y en el caso de que el sistema esté alimentado con una tensión continua (esto es, una tensión constante) su expresión matemática es la de una constante (9).

$$i_F = K_1 \tag{9}$$

Introduciendo la expresión de la respuesta particular (9) en la ecuación que rige el comportamiento del sistema (1) se obtiene la ecuación (10).

$$U = R \cdot K_1 + L \cdot 0 \tag{10}$$

De la ecuación (10) se puede obtener la expresión de la respuesta forzada de la corriente (11) del sistema de la figura 1.

$$i_F = \frac{U}{R} \tag{11}$$

Según se indica en la ecuación (2) la solución a la ecuación diferencial (1) es la suma de (6) y (11), y que para el circuito de la figura 1 tiene la expresión (12).

$$i = \frac{U}{R} + Ke^{-\frac{t}{\tau}} \tag{12}$$

En los sistemas físicos, aquellas variables que son indicativas de la energía almacenada en un sistema no pueden variar de forma brusca, ya que para conseguir una variación finita de la energía almacenada en un sistema en un tiempo infinitesimal se precisaría tomar una potencia infinita.

La energía almacenada en una bobina viene dada por la expresión (13)

$$W = \frac{1}{2} L i^2 \tag{13}$$

[1] Si un sistema lineal se excita con una tensión sinusoidal la respuesta del sistema en régimen permanente es un sinusoide de idéntica frecuencia, si un sistema lineal se excita con una tensión constante la respuesta del sistema en régimen permanente es una corriente constante.

De donde se deduce que la corriente en una bobina debe ser una función continua del tiempo, esto es, tiene que valer lo mismo antes y después de cerrar el interruptor que une la fuente de tensión continua con el circuito que representa la carga. En el caso que nos ocupa, antes de cerrar el interruptor (instante de tiempo 0^-) no circula corriente por el sistema, es decir la corriente es nula, de forma que en el instante de tiempo 0^+, inmediatamente después de cerrar el interruptor y comenzar a alimentar el circuito con la fuente de tensión continua, la corriente debe seguir siendo nula. Particularizando la ecuación (12) para el instante de tiempo 0^+, y expresando que la corriente en ese instante debe ser igual a la corriente en 0^- , es decir *i=0*, se tiene la ecuación (14):

$$0 = \frac{U}{R} + Ke^{0} = \frac{U}{R} + K \tag{14}$$

Despejando en la ecuación 14 la constante *K*, se obtiene (15):
(15)

$$K = -\frac{U}{R} \tag{15}$$

Por lo tanto, la expresión que representa la evolución de la intensidad en el circuito de la figura 1 es (16):

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right) \tag{16}$$

Teniendo en cuenta los valores de la inductancia de la bobina y la resistencia que representan la carag del circuito de la figura 1, la constante de tiempo τ es (17):

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{9{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}3} = 0{,}0317\, s \tag{17}$$

Con lo que, la expresión final de la corriente en el circuito de la figura 1 es (18):

$$i = \frac{15}{0{,}3}\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}0317}}\right) \tag{18}$$

En la figura 2 se muestra la evolución de la intensidad al transcurrir el tiempo en el circuito de a figura 1.

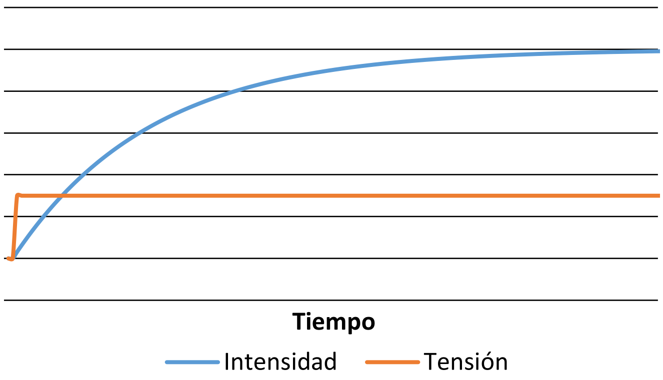

Figura 1.2. Evolución de la intensidad y la tensión en función del tiempo

2. Obtener la intensidad en régimen permanente.

Para un tiempo suficientemente largo (superior a 3τ), la ecuación (18) proporciona el valor de la intensidad en régimen permanente:

$$I = \frac{15}{0,3} = 50\ A \qquad (19)$$

La intensidad que circula por el circuito de la figura 1 en régimen permanente es 50 A.

3. Tiempo que se tarda en alcanzar el régimen permanente.

Se puede considerar que en tres constantes de tiempo (3τ), aproximadamente, <u>un sistema de primer orden</u> alcanza el régimen permanente. Según la ecuación (17)

$$3\tau = 3 \cdot 0,0317 = 95,1\ ms \qquad (20)$$

El tiempo que se tarda en alcanzar el régimen permanente es 95.1 ms.