uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Curso OCW

Fundamentos de transitorios en redes eléctricas

Mª Ángeles Moreno López de Saá
Juan Carlos Burgos Díaz
Mónica Alonso Martínez

PROBLEMA 4.
DESCARGA DE UN CONDENSADOR SOBRE OTRO.

En el circuito de la figura C_1=60 μF, C_2=40 μF y R= 5 Ω. La carga inicial de C_1 es de 1 C, mientras que el condensador C_2 está descargado. Se desea calcular:

1. El valor de pico de la corriente
2. El valor de la corriente 200 μs después del cierre del interruptor.
3. La tensión final en bornas de C_1.
4. La energía disipada en la resistencia durante el transitorio.

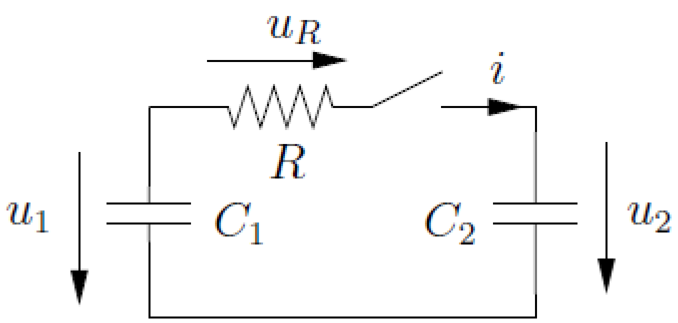

Figura 4.1. Circuito de estudio del problema 4

SOLUCIÓN:

1. Obtención de la corriente en el transitorio.

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff al circuito de la figura 4.1 se obtiene la ecuación (1),

$$-u_1 + R \cdot i + u_2 = 0 \tag{1}$$

Las ecuaciones de carga y descarga de los condensadores son

$$i = -C_1 \cdot \frac{du_1}{dt} \tag{2}$$

$$i = C_2 \cdot \frac{du_2}{dt} \tag{3}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones derivamos la ecuación (1)

$$-\frac{du_1}{dt} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{du_2}{dt} = 0 \tag{4}$$

Ahora se sustituyen las derivadas de la tensión obtenidas de (2) y (3)

$$\frac{i}{C_1} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2} = 0 \tag{5}$$

Sacando factor común la intensidad

$$\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\cdot i+R\cdot\frac{di}{dt}=0 \tag{6}$$

Para simplificar la notación llamaremos C_{eq} a la asociación en serie de C_1 y C_2

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \tag{7}$$

Queda

$$\frac{i}{C_{eq}}+R\cdot\frac{di}{dt}=0 \tag{8}$$

O bien

$$R\cdot C_{eq}\cdot\frac{di}{dt}+i=0 \tag{9}$$

En este caso la ecuación diferencial es homogénea, por lo que no hay que obtener la solución particular, y la solución a la ecuación diferencial es sólo la respuesta libre.

- Respuesta libre (u_{cH})

Para obtener la respuesta libre se deben obtener las raíces del polinomio característico

$$R\cdot C_{eq}\cdot p+1=0 \tag{10}$$

La raíz del polinomio es:

$$p=\frac{1}{R\cdot C_{eq}} \tag{11}$$

Con lo que la expresión de la intensidad es

$$i=K\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{12}$$

La constante de tiempo, τ, es

$$\tau=R\cdot C_{eq} \tag{13}$$

Para hallar el valor de la constante de integración K se deben utilizar las condiciones de contorno de la intensidad. Sin embargo, en un condensador la intensidad no es variable de estado, por lo que para obtener el valor inicial de la intensidad se debe relacionar ésta con las tensiones en el instante inicial.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff en el instante inicial, se llega a

$$i(0^+)=\frac{u_1(0)-u_2(0)}{R} \tag{14}$$

Nótese que la intensidad es una variable discontinua, con lo que es preciso diferenciar la intensidad en 0^- y la intensidad en 0^+. Por el contrario, las tensiones en los condensadores son variables continuas, y no es preciso diferenciar entre 0^- y 0^+.

Desafortunadamente, el enunciado del problema me da las condiciones de contorno del condensador en función de la carga, de forma que tendremos que hallar la tensión inicial mediante la ecuación

$$u_1(0) = \frac{q_1(0)}{C_1} = \frac{1\;C}{60\;\mu F} = 16.667\;V \tag{15}$$

Con lo que la intensidad en 0^+ es

$$i(0^+) = \frac{16667 - 0}{5} = 3.333\;A \tag{16}$$

Una vez obtenida la intensidad en el instante inicial, la ecuación (12) proporciona la constante de integración

$$K \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = K = 3.333\;A \tag{17}$$

De la ecuación (7) se obtiene C_{eq}

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{60 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{40 \cdot 10^{-6}} \tag{18}$$

Con lo que C_{eq}=24 μF.

Por tanto, la constante de tiempo es

$$\tau = R \cdot C_{eq} = 5 \cdot 24 = 0{,}12\;ms \tag{19}$$

La evolución de la intensidad en el tiempo será

$$i = 3333 \cdot e^{-\frac{t}{1{,}2 \cdot 10^{-4}}} \tag{20}$$

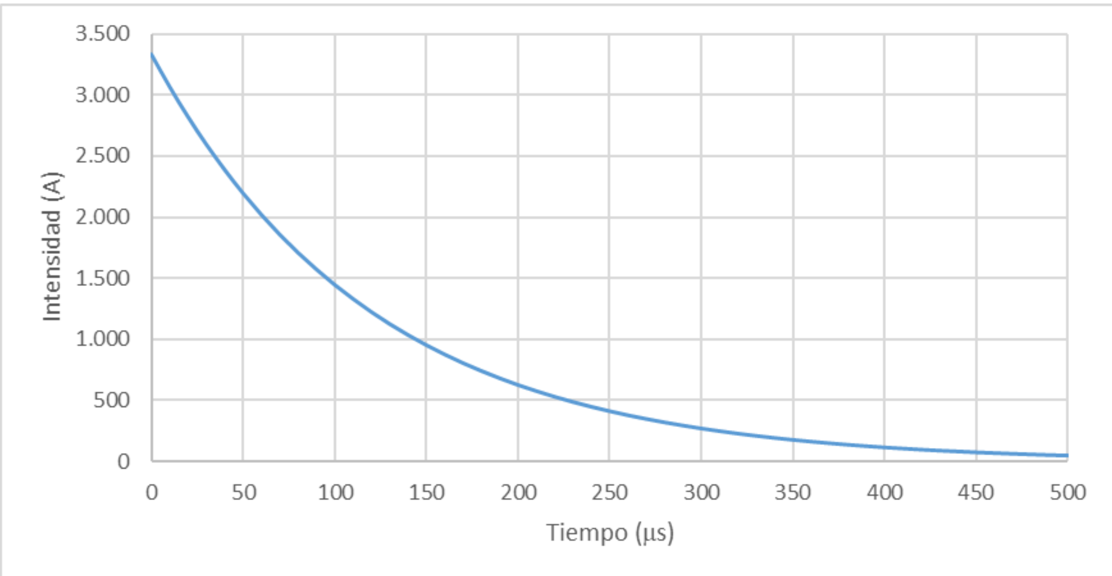

Figura 4.2: Evolución temporal de la intensidad

El valor de pico de la intensidad se da en t=0 y vale 3.333 A.

2. Valor de la corriente 200 µs después del cierre del interruptor.

$$i(t = 200\ \mu s) = 3333 \cdot e^{-\frac{200}{120}} = 630\ A \tag{21}$$

3. Tensión en bornas de C1 y de C2

La tensión en bornas de C1 se obtiene mediante la ecuación (2)

$$i = -C_1 \cdot \frac{du_1}{dt} \tag{2}$$

$$u_1 = \int \frac{-i}{C_1} \cdot dt = \int \frac{-3333 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{60 \cdot 10^{-6}} \cdot dt \tag{22}$$

Al realizar una integral indefinida aparece una constante de integración

$$u_1 = \frac{-3333}{60 \cdot 10^{-6}} \cdot (-\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K_{u1} = \frac{3333 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}{60 \cdot 10^{-6}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K_{u1} \tag{23}$$

Esto es

$$u_1 = 6667 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K_{u1} \tag{24}$$

En t=0 la tensión del condensador 1 es de 16.667 V, por tanto

$$16667 = 6667 \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + K_{u1} \tag{25}$$

De donde K_{u1}= 10.000 V.

$$u_1 = 6667 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 10000 \tag{26}$$

La tensión en bornas del condensador 1 al final del transitorio se obtiene haciendo t=∞

$$u_1(t = \infty) = 6667 \cdot e^{-\frac{\infty}{\tau}} + 10000 = 10.000\ V \tag{27}$$

Aunque en el enunciado no lo piden, hallaremos la tensión en bornas del condensador 2 mediante la ecuación (3)

$$u_2 = \int \frac{i}{C_2} \cdot dt = \int \frac{3333 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{40 \cdot 10^{-6}} \cdot dt \tag{28}$$

Integrando

$$u_2 = \frac{3333}{40 \cdot 10^{-6}} \cdot (-\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K_{u2} = -\frac{3333 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}{40 \cdot 10^{-6}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K_{u2} \tag{29}$$

Esto es

$$u_2 = -\,10000 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K_{u2} \tag{30}$$

En t=0 la tensión del condensador 2 es de 0 V, por tanto

$$0 = -10000 \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + K_{u2} \tag{31}$$

De donde K_{u2}= 10.000 V.

$$u_2 = 10000 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{32}$$

La tensión en bornas del condensador 2 al final del transitorio se obtiene haciendo t=∞

$$u_2(t=\infty) = 10000 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = 10.000\,V \tag{33}$$

Cuando la tensión en ambos condensadores se iguala cesa la intensidad.

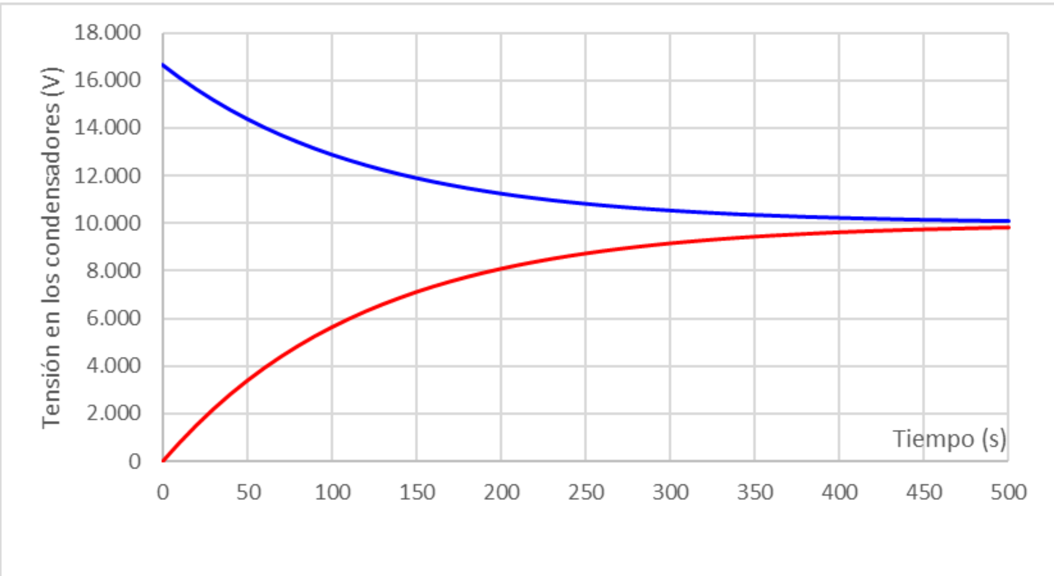

Figura 4.3. Tensión en bornas de los condensadores. Color azul, condensador 1. Color rojo, condensador 2.

4. La energía disipada en la resistencia durante el transitorio.

La energía disipada en la resistencia se podría obtener como

$$W = \int_0^\infty u_R \cdot i \cdot dt = \int_0^\infty R \cdot i^2 \cdot dt \tag{34}$$

Pero obtener la energía de esa forma es complicarse, puesto que hay que realizar una integral. Es más simple obtener la energía a través de un balance de potencias, restando la energía inicial almacenada en los condensadores y la energía final

La energía inicial es

$$W_{inicial} = \sum \frac{1}{2} C_i U_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 10^{-6} \cdot 16667^2 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot 0^2 = 8.334\, J \qquad (33)$$

La energía final es

$$W_{final} = \sum \frac{1}{2} C_i U_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 10^{-6} \cdot 10000^2 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot 10000^2 = 5.000\, J \qquad (33)$$

Por tanto, la energía disipada por la resistencia es

$$W_{disipada} = W_{inicial} - W_{final} = 8.334 - 5.000 = 3.334 \ J \qquad (33)$$