Universidad Carlos III de Madrid

Curso OCW

Fundamentos de transitorios en redes eléctricas

Mª Ángeles Moreno López de Saá
Juan Carlos Burgos Díaz
Mónica Alonso Martínez

PROBLEMA 3.
CARGA DE UN CONDENSADOR CON FUENTE DE CORRIENTE CONTINUA.

Un condensador de 42,4 microfaradios de capacidad se encuentra conectado a una fuente de corriente continua de 8660 V a través de un cable cuya resistencia es de 0.05Ω, como se indica en la figura 3.1. Se pide:

1. Obtener la evolución de la tensión en el condensador en función del tiempo.
2. Obtener la evolución de la intensidad en el circuito en función del tiempo al cerrar el interruptor.
3. Intensidad en régimen permanente.
4. Obtener el tiempo que se tarda en alcanzar el régimen transitorio.
5. Energía almacenada en el condensador al final del transitorio.

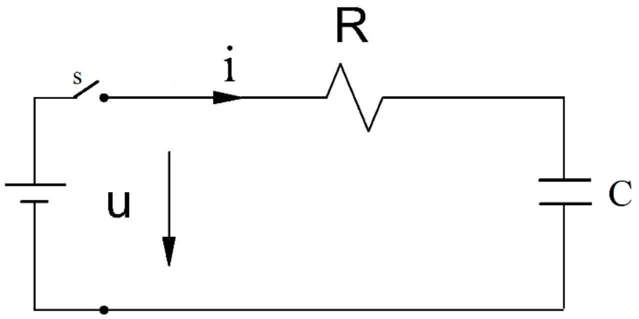

Figura 3.1. Circuito de estudio del problema 3

SOLUCIÓN:

1. Obtener la evolución de la tensión en el condensador en función del tiempo.

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff al circuito de la figura 3.1 se obtiene la ecuación (1), donde la relación entre la tensión en el condensador, u_c, y la corriente que circula por el circuito, i, viene dada por la ecuación (2).

$$U = Ri + u_c \tag{1}$$

$$i = C\frac{du_c}{dt} \tag{2}$$

(2)

Combinando las ecuaciones (1) y (2), es decir, sustituyendo la expresión de la intensidad que circula por el circuito (1) en la ecuación que rige el comportamiento del circuito (1) se obtiene la expresión (3), ecuación diferencial de primer orden.

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = U \tag{3}$$

- <u>Respuesta libre (u_{cH})</u>

La solución de la ecuación diferencial (3) estará compuesta por la respuesta libre y la respuesta forzada del sistema correspondiente a la figura 3.1. La solución correspondiente a la ecuación homogénea, es decir, aquella correspondiente a igualar a 0 la expresión (3) se obtiene sustituyendo en dicha ecuación homogénea el operador derivada por la letra *p* elevado a un exponente que es el orden de la derivada, en este caso *p*=1, por ser la ecuación (3) una ecuación diferencial de primer orden. De esta forma, la ecuación homogénea correspondiente al circuito de la figura 3.1 es la ecuación (4).

$$RCp + 1 = 0 \qquad (4)$$

La ecuación característica de (4) tiene sólo una raíz, p_1, (5):

$$p_1 = -\frac{1}{RC} \qquad (5)$$

La función que cumple la ecuación homogénea (4) tiene forma de exponencial. Para el sistema de la figura 3.1, la expresión de la tensión en el condensador correspondiente a la solución homogénea, u_{cH}, tiene la expresión (6).

$$u_{cH} = Ke^{p_1 t} \qquad (6)$$

Donde la constante de tiempo, τ, que rige el comportamiento del sistema es (7).

$$\tau = RC \qquad (7)$$

Finalmente, la respuesta homogénea de la ecuación (3) viene dada por (8).

$$u_{cH} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (8)$$

- <u>Respuesta forzada o particular (u_{cF})</u>

El sistema de la figura 3.1 está alimentado por una fuente de tensión continua. Por lo tanto, la solución particular correspondiente a la ecuación diferencial de primer orden (3) es una constante, K_1, (9)

$$u_{cF} = K_1 \qquad (9)$$

Puesto que la derivada de una constante con respecto al tiempo es 1, sustituyendo la ecuación (9) en la ecuación (2) que relaciona la corriente que circula por el condensador con la tensión en el condensador, se llega a la expresión (10), donde *U* es la tensión de la fuente de alimentación continua del circuito de la figura 3.1.

$$u_{cF} = K_1 = U \qquad (10)$$

La solución de la ecuación diferencial de primer orden (1) que describe el comportamiento del circuito de la figura 3.1 (11) es la suma de la respuesta libre, dada por la ecuación (8), y la respuesta forzada, dada por la ecuación (10).

$$u_c = U + Ke^{-\frac{t}{\tau}} \tag{11}$$

En la ecuación (11) falta por determinar el valor de la constante de tiempo *K* de la respuesta homogénea. El valor de la energía almacenada en un condensador puede ser calculada mediante la ecuación (12). Puesto que, en un condensador, la energía almacenada no puede variar bruscamente, emplearemos dicha restricción para obtener el valor de la constante *K*.

$$W = \frac{1}{2}Cu^2 \tag{12}$$

De la ecuación (12) se puede deducir que la tensión en un condensador debe ser una función continua del tiempo, esto es, tiene que el mismo valor antes y después de cerrar el interruptor que une la fuente de tensión continua con el circuito en el que se encuentra el condensador. En el caso que nos ocupa, antes de cerrar el interruptor ($t=0^-$) la tensión es nula, de forma que en $t=0^+$ la tensión debe seguir siendo nula. Particularizando la ecuación (11) para el instante de tiempo 0^+, y expresando que la tensión en ese instante debe ser igual a la tensión en 0^- se tiene (13):

$$0 = U + Ke^0 = U + K \tag{13}$$

A partir de la ecuación (13) se puede despejar el valor de la constante *K* que tine un valor igual al de la fuente de tensión continua que alimenta el circuito cambiada de signo (14).

$$K = -U \tag{14}$$

Introduciendo el valor de la constante *K* en la ecuación (12) se tiene la expresión de la evolución de la tensión en el condensador en función del tiempo (15), donde el valor de la constante τ es 2.12 µs (16).

$$u_c = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{15}$$

$$\tau = RC = 0{,}05 \cdot 42{,}2 \cdot 10^{-6} = 2{,}12 \cdot 10^{-6}\ s \tag{16}$$

Finalmente, la expresión de la de la evolución de la tensión en el condensador en función del tiempo es (17),

$$u_c = 8660\left(1 - e^{-\frac{t}{2{,}12 \cdot 10^{-6}}}\right) \tag{17}$$

2. Obtener la evolución de la intensidad en el circuito en función del tiempo al cerrar el interruptor.

La ecuación (2) mostraba la relación entre la tensión y la corriente en un condensador. El valor de la corriente que circula por un condensador (18) puede ser obtenida, por tanto, derivando la tensión en el condensador de la ecuación (15).

$$i = CU\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{18}$$

Y, sustituyendo los valores de resistencia, R, y constante de tiempo, τ, se obtiene la expresión de la corriente en el condensador (19).

$$i = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{8660}{0{,}05}e^{-\frac{t}{2{,}12\cdot 10^{-6}}} \tag{19}$$

La figura 3.2 muestra la evolución de la tensión e intensidad en el condensador del circuito de la figura 3.1 en función del tiempo. En la figura 3.2 se ha dividido la intensidad entre 10 porque hacerla más visible.

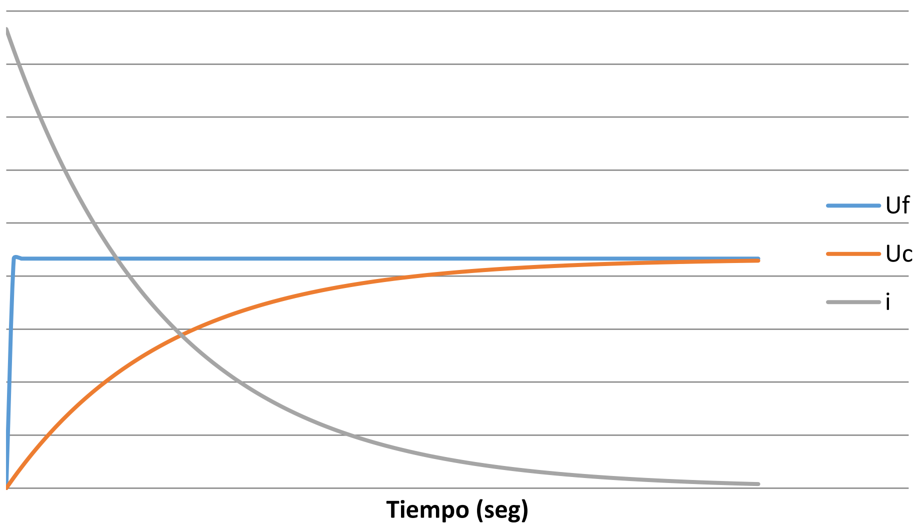

Figura 3.2. Evolución de la tensión e intensidad en el circuito de la figura 3.1

3. Intensidad en régimen permanente

El régimen permanente se alcanza pasado un tiempo infinito. Dando en la ecuación (19) a t el valor infinito en la ecuación se obtiene que la intensidad en régimen permanente es $I_\infty = 0$.

4. Tiempo que se tarda en alcanzar el régimen permanente.

Dado que el sistema que rige el comportamiento del circuito de la figura 3.1 es de primer orden se puede considerar que en tres constantes de tiempo (3τ), aproximadamente, se ha alcanzado el régimen permanente. Según la ecuación (20), el régimen permanente se alcanzará pasados 6.36 µs.

$$3\tau = 3\cdot 2{,}12 = 6{,}36\ \mu s \tag{20}$$

5. Energía almacenada en el condensador al final del transitorio

La potencia instántanea entregada por un dispositivo se calcula como el producto de la tensión en bornes de dicho dispositivo por la intensdiad que circula por él. La energía almacenada es la suma de la potencia instantánea en un intervalo de tiempo.

Para el circuito de la figura 3.1, la expresión de la derivada de la energía almacenada en el condensador viene dada por la ecuación (21), y la energía almacenada en el condensador al final del transitorio por la ecuación (21).

$$dW = u_c i dt = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}dt \tag{20}$$

$$W = \int_0^{\infty} u_c i dt = \frac{U^2}{R}\int_0^{\infty}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-2\frac{t}{\tau}}\right)dt \tag{21}$$

La ecuación final de la energía almacenada en el transitorio en el condensador es (22). Y la energía almacenada es 1.59 kJ.

$$W = \frac{U^2}{R}\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau}{2}e^{-2\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\infty} = \frac{U^2}{R}\left(-0 + 0 + \tau - \frac{\tau}{2}\right) \tag{22}$$

$$W = \frac{U^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}U^2 C = \frac{1}{2}8660^2 42{,}4\cdot 10^{-6} = 1{,}59\,kJ \tag{23}$$