Curso OCW

Fundamentos de transitorios en redes eléctricas

Mª Ángeles Moreno López de Saá
Juan Carlos Burgos Díaz
Mónica Alonso Martínez

PROBLEMA 6.
CONEXIÓN DE UNA BATERÍA DE CONDENSADORES.

El circuito de la figura 6.1 representa una fase de un sistema trifásico de 69 kV de tensión de línea. La potencia de la batería de condensadores es de 45 MVAR. La inductancia de la línea es L = 60 µH. Se pide calcular:

1. La tensión de pico que se puede alcanzar en el condensador, C, cuando se cierra el interruptor, suponiendo que $u_c(0) = +40\,kV$ y teniendo en cuenta que el cierre puede producirse en cualquier momento.
2. El tiempo necesario para que se alcance este pico de tensión.
3. La corriente de pico durante el transitorio.
4. La corriente en régimen permanente que pasa por el interruptor una vez que el transitorio ha finalizado.

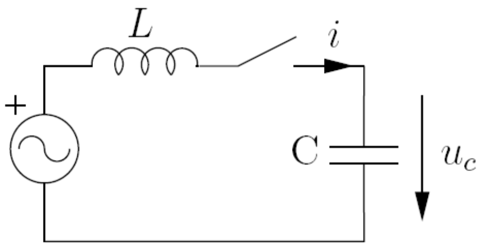

Figura 6.1. Circuito monofásico equivalente del problema 4

SOLUCIÓN:

El transitorio que se presenta en la figura 6.1 emula el transitorio de conexión de una batería de condensadores a través de una línea aérea.

Antes de empezar a trabajar es necesario conocer el valor del condensador, *C.* En el enunciado se ha facilitado el valor de la potencia proporcionada por la batería de condensadores (que será potencia reactiva). La capacidad de un condensador viene dada por la ecuación (1), y el valor del condensador del circuito de la figura 6.1 es 30 µF, según (2).

$$Q = C\omega U^2 \tag{1}$$

$$C = \frac{Q}{\omega U^2} = \frac{45 \cdot 10^6}{100\pi \cdot (69 \cdot 10^3)^2} = 30\mu F \tag{2}$$

(2)

1. **La tensión de pico que se puede alcanzar en el condensador, C, cuando se cierra el interruptor, suponiendo que $\boldsymbol{u_c(0) = +40\ kV}$ y teniendo en cuenta que el cierre puede producirse en cualquier momento.**

La ecuación que define el transitorio de conexión de la batería de condensadores propuesto en el enunciado es (3), y teniendo en cuenta la relación entre la tensión y la corriente en un condensador (4), la ecuación final que rige el comportamiento del circuito de la figura 6.1 es (5).

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + u_c \tag{3}$$

$$i = C\frac{du_c}{dt} \tag{4}$$

$$e(t) = LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c \tag{5}$$

La dimensión del producto de la inductancia de la bobina (L) y la capacidad del condensador (C) es s^{-2}, esto es, la raíz cuadrada del producto LC tiene dimensiones de pulsación (s^{-1}), por eso llamaremos pulsación natural o frecuencia angular natural (ω_0) a (6). Para el circuito de la figura 6.1, la pulsación angular tendrá un valor de 23.570 *rad/s* (7) y, por tanto, la frecuencia angular será 3.75 *kHz* (8).

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{60 \cdot 10^{-6} 30 \cdot 10^{-6}}} = 23.570\, rad/s \tag{7}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3{,}75\, kHz \tag{8}$$

En Europa, la frecuencia de la red es 50 Hz y, por tanto, la pulsación de la red es 314 rad/s. Teniendo en cuenta estos valores, el transitorio propuesto en el ejercicio es 75 veces más rápido que la pulsación de la red, y es posible admitir que la tensión de la fuente es constante durante el tiempo que dura el transitorio. Esta suposición de tensión de la fuente constante durante el transitorio permite que el desarrollo que sigue a continuación sea más sencillo, de manera que la ecuación (5) se puede simplificar en la ecuación (9), donde la constante *E* representa el valor de la fuente de tensión en el instante de conexión de la batería de condensadores.

$$E \cdot \omega_0^2 = \frac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot u_c \tag{9}$$

La ecuación (9) es una ecuación diferencial de segundo orden. Para resolverla emplearemos el método de la transformada de Laplace. La tabla I recoge las transformadas de Laplace de las principales funciones que se van a emplear a lo largo de la asignatura.

Tabla I: Transformadas de Laplace de algunas funciones

Función ($f(t)$)	Transformada ($F(s)$)	Función ($f(t)$)	Transformada ($F(s)$)
1	$\frac{1}{s}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta e^{-\beta t}-\alpha e^{-\alpha t})$	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
		$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Aplicando las transformadas de Laplace de la tabla I a la ecuación (9) se obtiene la ecuación (10).

$$\frac{E}{s}\omega_0^2 = s^2U_c(s) - s\cdot u_c(0^+) - u'_c(0^+) + \omega_0^2U_c(s) \tag{10}$$

El paso siguiente es obtener la tensión en el condensador (u_c) y la derivada de ésta (u'_c)en el instante inicial (0^+). Para ello aplicamos la idea básica de que la energía almacenada en los elementos almacenadores de energía (condensadores) no puede variar bruscamente, es decir, debe ser una función continua en el tiempo. Esta idea se traduce en que la tensión en los condensadores debe ser una función continua y la intensidad en las bobinas también debe serlo.

La primera idea, tensión en los condensadores es una función continua, se aplica para obtener el valor de $u_c(0^+)$ según (11), obteniéndose un valor de la tensión inicial en el condensador de 40 kV.

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 40\,kV \tag{11}$$

La segunda idea, la intensidad en las bobinas deber ser una función continua en el tiempo, se emplea para obtener la derivada de la tensión (u'_c) en el instante inicial. Según la ecuación (2) la derivada de la tensión en el condensador depende de la corriente, con lo que la derivada en el instante inicial tendrá un valor de 0 (12).

$$u'_c(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{i(0^-)}{C} = 0 \tag{12}$$

Introduciendo los valores de $u_c(0^+)$ (11) y $u'_c(0^+)$ (12) en (10) se obtiene (13).

$$\frac{E}{s}\omega_0^2 = s^2 \cdot U_c(s) - s \cdot u_c(0^+) + \omega_0^2 \cdot U_c(s) \tag{13}$$

Llegados a este punto es necesario despejar la transformada de Laplace de la tensión en el condensador (14) y (15).

$$\frac{E}{s}\omega_0^2 + s \cdot u_c(0^+) = \left(s^2 + \omega_0^2\right) U_c(s) \tag{14}$$

$$U_c(s) = \frac{s}{\left(s^2 + \omega_0^2\right)} \cdot 40 + \frac{E}{s\left(s^2 + \omega_0^2\right)}\omega_0^2 \tag{15}$$

Ahora hay que aplicar la antitransformada de Laplace para obtener la evolución de la tensión en el tiempo. La antitransformada del primer sumando aparece en la tabla I, pero no así la del segundo sumando. Por eso, el segundo sumando hemos de convertirlo en algo más simple que sí que aparezca en la tabla I. Aplicamos una vieja regla de Cálculo el segundo sumando se puede descomponer según (16):

$$\frac{E}{s\left(s^2 + \omega_0^2\right)}\omega_0^2 = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega_0^2} \tag{16}$$

Donde A, B y C deben ser calculados con la condición de que el lado derecho de la expresión (16) sea igual al lado izquierdo. De esta forma resulta (17):

$$\frac{E}{s\left(s^2 + \omega_0^2\right)}\omega_0^2 = \frac{E}{s} - \frac{Es}{s^2 + \omega_0^2} \tag{17}$$

Con lo que la expresión de la tensión en el condensador en el dominio de Laplace es (18).

$$U_c(s) = \frac{s}{\left(s^2 + \omega_0^2\right)} \cdot 40 + \frac{E}{s} - \frac{Es}{\left(s^2 + \omega_0^2\right)} \tag{18}$$

Ahora sí que todos los térmicos de la ecuación (18) aparecen en la tabla I de antitransformadas de Laplace, de manera que la expresión de la tensión en la batería de condensadores viene dada por (19):

$$u_c(t) = 40\cos\omega_0 t + E - E\cos\omega_0 t = E + (40 - E)\cos\omega_0 t \tag{19}$$

En la ecuación (19) *E* es el valor de la tensión en el instante en el que se cierra el interruptor. Cuando se cierra un interruptor, el operario no tiene control de en qué instante de la onda de tensión aplicada se cierra el circuito, de modo que es posible que el interruptor se cierre en cualquier instante de tiempo, y no necesariamente en un paso por cero de la corriente. El peor transitorio tendrá lugar cuando la sinusoide de red pasa por su valor de cresta. Ahora bien ¿por el valor de cresta positivo o negativo? La respuesta es: en aquel valor de cresta que haga máxima la diferencia entre la tensión inicial del condensador y la tensión de la red en el instante de conexión. En el caso del problema planteado, en el valor de cresta negativo[1], esto es -56.34 kV (20).

$$E = -\frac{69}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = -56{,}34\, kV \tag{20}$$

Entonces, la evolución de la tensión en el condensador viene dada por (21):

$$u_c(t) = -56{,}34 + 96{,}34\cos\omega_0 t \ \ \text{kV} \tag{21}$$

El máximo valor absoluto de la tensión que debe soportar el condensador se alcanzará cuando $\cos\omega_0 t$ tome el valor (-1), y esto ocurre para $\omega_0 t = \pi$, es decir, el pico de tensión se presentará en un mínimo de tensión. Por tanto, la tensión de pico en el cierre del interruptor viene dada por (22).

$$\min\{u_c\} = -152{,}68 \ \text{kV} \qquad \Rightarrow \qquad \textit{máx.}\{|u_c|\} = 152{,}68 \ \ \text{kV} \tag{22}$$

2. El tiempo necesario para que se alcance este pico de tensión.

Tal y como se ha comentado en el apartado 1, el pico de tensión se produce cuando $\omega_0 t = \pi$. Por lo tanto el tiempo necesario para alcanzar el pico de tensión será 0.133 ms (23).

$$t = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{23{,}57 \cdot 10^3} = 0{,}133 \ \text{ms} \tag{23}$$

3. La corriente de pico durante el transitorio:

[1] Para obtener la tensión máxima se puede emplear un método más laborioso: es la forma estándar de hallar máximos que se emplea en cálculo, y consiste en hallar para qué valores de t y de φ la ecuación (24) alcanza un máximo.

$$u_c(t) = \sqrt{2}E_{\max}\cos(\omega t + \varphi) + \left(40 - \sqrt{2}E_{\max}\cos(\omega t + \varphi)\right)\cos\omega_0 t \tag{24}$$

Hay varias formas de hallar la evolución de la corriente en el tiempo, una es utilizar la expresión obtenida para la tensión en el condensador (21) en la ecuación (4). Una segunda forma es derivar la ecuación (3) (admitiendo como antes que *e* es constante[2]) e introducir la ecuación (4) en ella. Si así lo hacemos obtenemos la ecuación (25).

$$0 = L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} \tag{25}$$

Para resolver esta ecuación diferencial (25) se empleará la transformada de Laplace obteniendo (26).

$$0 = s^2 I(s) - si(0^+) - i'(0^+) + \frac{I(s)}{LC} \tag{26}$$

Los valores de $i(0^+)$ y de $i'(0^+)$ se deben obtener a partir de las condiciones de contorno de la bobina y del condensador. La intensidad en 0^+ es nula, puesto que en la bobina la intensidad antes de cerrar el interruptor es nula.

El valor de la derivada de la intensidad en el instante inicial, ecuación (27), lo obtenemos particularizando la ecuación (3) al instante t=0 y considerando que la tensión en el condensador no puede cambiar de 0^- a 0^+.

$$i'\left(0^+\right) = \frac{E - u_c(0)}{L} \tag{27}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones para el cálculo de $i'(0^+)$ e $i(0^+)$, la ecuación (26) se transforma en (27), por lo que la transformada de Laplace de la corriente en el circuito viene dada por la ecuación (29).

$$0 = s^2 I(s) + \frac{E - 40}{L} + \frac{I(s)}{LC} \tag{28}$$

$$I(s) = \frac{E - 40}{L}\frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \tag{29}$$

Aplicando la antitransformada de Laplace a la ecuación (29) se obtiene la expresión temporal de la corriente en el circuito (30), donde la impedancia característica se expresa según (31).

$$i(t) = \frac{E - u_c(0)}{Z_0} sen\omega_0 t \tag{30}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-6}}} = 1{,}414\,\Omega \tag{31}$$

[2] Esto es, estamos admitiendo que el transitorio es tan rápido que la tensión de red apenas tiene tiempo de variar.

Como la evolución de la corriente (30) es sinusoidal, el valor de pico coincide con la amplitud, y su valor más elevado se dará de nuevo cuando sea máxima la diferencia inicial de tensiones, en valor absoluto (32). Esto es 68.12 kA.

$$\text{máx}\{i\} = \frac{|e - u_c(0)|}{Z_0} = \frac{96{,}34\,kV}{1{,}4142\,\Omega} = 68{,}12 \ \ \text{kA} \tag{32}$$

4. La corriente en régimen permanente que pasa por el interruptor:

La ecuación (19) muestra la tensión en el condensador como la suma de la tensión de la red, *E*, más un término sinusoidal que no se amortiguaría por mucho que pase el tiempo. En realidad, en todos los sistemas hay una cierta resistencia, y las resistencias hacen que los regímenes transitorios se amortiguen, por lo que en realidad, al cabo de un cierto tiempo el segundo sumando de la ecuación (19) se anula y el sistema entra en régimen permanente.

El valor de la corriente en régimen permanente se obtiene como cociente entre la tensión eficaz de la red y la impedancia de la misma. Por ello, siend *E* la tensión de línea del sistema trifásico, la intensidad en el circuito de la figura 6.1 en régimen permanente viene dada por la expresión (33), y tiene un valor eficaz de 375 A.

$$\mathrm{I} = \frac{E/\sqrt{3}}{\left|\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right|} = \frac{69000/\sqrt{3}}{\left|100\pi 60\cdot 10^{-6} - \dfrac{1}{100\pi 30\cdot 10^{-6}}\right|} = 375 \text{ A} \tag{33}$$

La figura 6.2 muestra la evolución temporal de la tensión y la corriente en el circuito de la figura 6.1 cuando se cierra el interruptor que conecta la batería de condensadores con la fuente de tensión alterna.

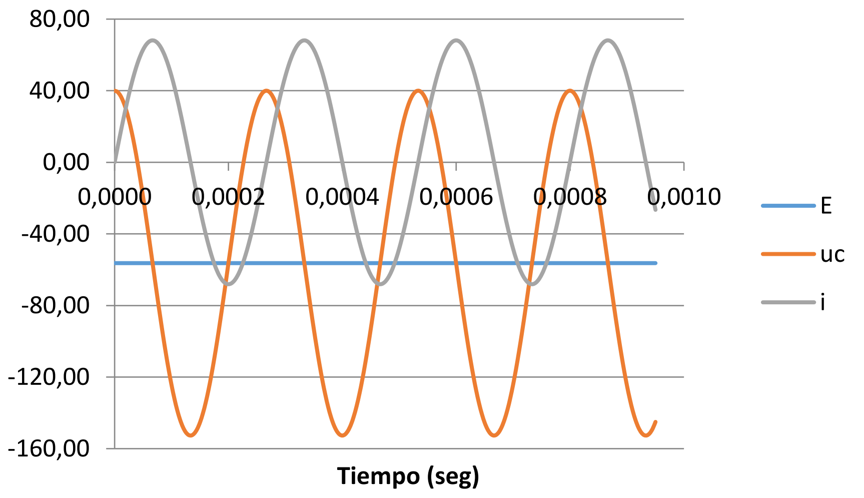

Figura 6.2. Evolución temporal de la tensión y corriente del circuito de la figura 6.1.