CADENAS DE MARKOV DE PARÁMETRO CONTINUO

Rosario Romera

Febrero 2009

1. Nociones básicas

Para las cadenas de Markov con parámetro de tiempo discreto hemos visto que la matriz de transición en n etapas puede ser expresada en términos de la matriz de transición en una etapa P. En el caso continuo el papel homólogo a la matriz de transición P lo juega, considerando unidades infinitesimales de tiempo entre transiciones, dt, una matriz Q llamada de tasas de transición, to generador infinitesimal de la cadena.

Definición
El proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$, con conjunto de estados numerable $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ es una *Cadena de Markov con parámetro de tiempo continuo* si $\forall s, t \geq 0$, y $\forall i, j$, tales que $X_k \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que:

$$P(X_{t+s} = j / X_s = i, X_k = x_k \quad ; \quad 0 \leq k < s) = P(X_{t+s} = j / X_s = i)$$

Definición
El proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una *Cadena de Markov homogénea*. Si:

$$P(X_{t+s} = j / X_s = i) = P(X_t = j / X_0 = i) \qquad \forall s \geq 0$$

Observación
Si $\tau_i =$ variable aleatoria "tiempo en el estado i hasta transición al estado j, con $j \in S$, y $j \neq i$", entonces:

$$P(\tau_i > s + t / \tau_i > s) \equiv P(\tau_i > t) \qquad \forall s, t \geq 0$$

esto es, τ_i es *Markoviana* lo cual implica que τ_i es *Exponencial*.

Observación: Caracterización de una Cadena de Markov con parámetro continuo

Toda Cadena de Markov con parámetro continuo cada vez que entra en un estado $i \in S$ verifica

1. $\tau_i \sim \exp(v_i)$, esto es, la distribución del tiempo que permanece antes de transitar a otro estado es exponencial.

2. cuando abandona el estado i, si $p_{ij} = P$ (transitar a $j/$ el proceso está en i), entonces verifica que: $\sum\limits_{j \neq i} p_{ij} = 1$

Para realizar el estudio distribucional de la cadena, vamos a introducir el concepto de *transición instantánea* (en un intervalo infinitesimal) y la probabilidad de que ello suceda.

Definición: Tasas de Transición
Probabilidad instantánea con la que el proceso realiza una transición de los estados $i \to j$, dada por:

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij} \qquad \forall i \neq j$$

Observación: $\nu_i = \sum\limits_j q_{ij} \quad \forall i$

Definicion: Un estado $i \in S$ se llama *absorbente* si $\nu_i = 0$, *estable* si $0 < \nu_i < \infty$, *instantáneo* si $\nu_i = \infty$.
Si $\nu_i < \infty$ y $\nu_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ entonces el estado i se llama *estable* o *regular.*

Comentario

1. La tasa de Permanencia en el estado i viene representada por q_{ij} que será un valor negativo porque la probabilidad de permanecer en el mismo estado decrece al aumentar t.

2. Se impone $0 \leq \nu_i < \infty$, esto es, se excluyen *estados instantáneos* con $\nu_i = \infty$.

3. Se dice que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es Cadena Markov *regular* si el número de transiciones en tiempo finito es una cantidad finita.

Contraejemplo: $p_i,\, i+1 = 1$ con $\nu_i = i^2$

Para realizar el estudio distribucional de la cadena, vamos a introducir el concepto de *transición instantánea* (en un intervalo infinitesimal) y la probabilidad de que ello suceda.

Definición: Probabilidades de transición en tiempo t
Denotaremos la probabilidad de transición del estado i al estado j en un intervalo de longitud t, donde $s, t \geq 0$, por

$$p_{ij}(t) = P\{X_{t+s} = j / X_s = i\}; \qquad P_{ij} = ||p_{ij}(t)|| \quad \text{matriz de transición}$$

Lema

1. $\lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = \nu_i \quad (\equiv -q_{ii})$

2. $\lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij} \quad ; \quad i \neq j$

3. **Ecuación de Chapman-Kolmogorov en tiempo continuo**. Para todos $i, j \in S$ y para cualquier $s, t \geq 0$:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(s)$$

Teorema: Ecuaciones Diferenciales de Kolmogorov

Supongamos que $\nu_i < \infty$ para cada $i \in S$ entonces las probabilidades de transición $p_{ij}(t)$ son diferenciables para todo $t \geq 0$ y todos $i, j \in S$. Es más:

1. $p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) - \nu_i p_{ij}(t)$ (**Backward equation**)
2. $P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} p_{ik}(t) - \nu_j p_{ij}(t)$ (**Forward equation**)

Demostración

A partir del apartado 3 del Lema:

$$p_{ij}(t+u) - p_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} p_{ik}(u) p_{kj}(t) - [1 - p_{ii}(u)].p_{ij}(t)$$

formando el límite del cociente incremental

$$\lim_{u \to 0} \frac{p_{ij}(t+u) - p_{ij}(t)}{u} = ... = \sum_{k \neq i} p_{kj}(t). \lim_{u \to 0} \frac{p_{ik}(u)}{u} - p_{ij}(t).\nu_i$$

Lema: (1) $\Rightarrow$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) + q_{ii} p_{ij}(t) = \sum_{k} q_{ik} p_{kj}(t) \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \text{BACKWARD}$$

Análogamente

Lema: (3) $\Rightarrow$

$$p_{ij}(t+u) - p_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(u) - [1 - p_{jj}(u)].p_{ij}(t)$$

de donde

$$\lim_{u \to 0} \frac{p_{ij}(t+u) - p_{ij}(t)}{u} = ... = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \lim_{u \to 0} \frac{p_{kj}(u)}{u} - p_{ij}(t)\nu_j$$

Lema: (1) $\Rightarrow$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} + p_{ij}(t) q_{jj} = \sum_{k} p_{ik}(t) q_{kj} \quad \Rightarrow \quad \text{(2)FORWARD}$$

En términos matriciales

$$P'(t) = Q.P(t) \quad \text{(Backward)}$$

$$P'(t) = P(t).Q \quad \text{(Forward)}$$

Las condiciones iniciales para ambos conjuntos de ecuaciones son $P(0) = I$

Formalmente, la solución de los conjuntos de ecuaciones diferenciales de Kolmogorov puede ser dada como:

$$P(t) = e^{Q.t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i Q^i}{i!}$$

Cuando Q es una matriz de dimensión finita, la serie anterior es convergente y es la única solución para los dos sistemas de ecuaciones. Si Q es de dimensión infinita no podemos afirmar nada.
Supongamos que Q es un matriz de dimensión finita y diagonalizable. Supongamos además que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ son los valores propios de Q. Entonces existe una matriz A tal que

$$Q = A. \begin{pmatrix} \beta_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} .A^{-1}$$

y en tal caso

$$P(t) = A \begin{pmatrix} e^{\beta_0 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\beta_n t} \end{pmatrix} .A^{-1}$$

Probabilidades Límite:

Una Cadena de Markov con tiempo continuo es un Proceso Semi-Markoviano con $\tau_i \sim$ exponencial (ν_i) para todo i.

Entonces
Si $P = ||p_{ij} \quad ||$ es irreducible, aperiódica y recurrente positiva (ergódica) se deduce que

$$\Rightarrow \quad p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{\pi_j/\nu_j}{\sum_i \pi_i/\nu_i}$$

siendo $\{\pi_j\}$ la solución de:

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi P \\ \Sigma \pi_j = 1 \end{array} \right\}$$

Proceso de Nacimiento y Muerte

Es una Cadena de Markov en tiempo continuo con $S = \mathbb{Z}^+$ tal que $q_{ij} = 0$, si $|i-j| > 1$.

Sean:
$\lambda_i = q_{i,i+1}$, con $i \geq 0$
$\mu_i = q_{i,i-1}$, con $i \geq 1$

Observación: Como

$$\nu_i = \sum_j q_{ij} \quad \Rightarrow \quad [\nu_i = \lambda_i + \mu_i]$$

siendo $q_{ij} = \nu_i p_{ij}, \quad i \neq j$, entonces:

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = 1 - p_{i,i-1}$$

Distribución límite:

Ecuaciones de balance

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \\ \lambda_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} - \mu_n p_n \end{cases}$$

ya que:

ESTADO	TASA ABANDONO	TASA INGRESO
0	$\lambda_0 p_0$	$\mu_1 p_1$
$n > 0$	$(\mu_n + \lambda_n) p_n$	$\mu_{n+1} p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1}$

Resolviendo las ecuaciones de balance:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\ \ldots &= \ldots \\ p_n &= \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_2\mu_1} . p_0 \\ \text{si } \sum_j p_j &= 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = p_0 + p_0 \sum_1^\infty \frac{\lambda_{n-1}\ldots\lambda_0}{\mu_n\ldots\mu_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} p_0 = \left[\sum_1^\infty \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\right]^{-1} & \text{con} \quad \sum_1^\infty < \infty \\ p_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i / \prod_{i=0}^n \mu_i\right] p_0 & \text{con} \quad n > 1 \end{cases}$$

Ejemplos:

1. **Cola M/M/1**

   Es Proceso de Nacimiento y Muerte con $\mu_n = \mu$, $\lambda_n = \lambda$

   si $\lambda/\mu < 1$ su distribución límite es Geom $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

2. **Cola M/M/s**

   Proceso de Nacimiento y Muerte con $\lambda_n = \lambda$ con $n > 0$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \leq n \leq s \\ s\mu & n > s \end{cases}$$

3. **Cola M/M/1/N**

   Sean $\mu_n = \mu$ con $n \geq 1$

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n) & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

Ejemplo

Una máquina puede fallar a causa de dos situaciones diferentes. La probabilidad de que la máquina falle en el intervalo de tiempo $(t, t+h)$ a causa de cualquiera de las dos situaciones es en cada caso $\lambda h + o(h)$.
Luego de la falla la máquina es reparada. El tiempo que dura la reparación es una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro μ. Calcular la probabilidad de que en el tiempo t la máquina se encuentre funcionando.

Solución

$X_t =$."estado de la máquina en el tiempo t".

$(X_t)_t$ es una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2\}$ donde

estado 0: "máquina funciona"

estado 1: "máquina fuera de servicio a causa de la primera situación"

estado 2: "máquina fuera de servicio a causa de la segunda situación"

En este caso tenemos como generador infinitesimal de la cadena a la matriz:

$$Q = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & -\mu & 0 \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

De donde

$$p_{00}(t) = \frac{1}{\rho}\left(\mu + 2\lambda e^{-\rho t}\right) \quad con \quad \rho = 2\lambda + \mu$$