CADENAS DE MARKOV CON PARÁMETRO DISCRETO

Rosario Romera

Febrero 2009

1. Nociones básicas

Definición: El proceso $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados $S \subseteq \mathbb{N}$ es una **Cadena de Markov** si $\forall n, m \in \mathbb{N}$ y $\forall i_0, \dots i_n, j \in S$ se cumple la propiedad:

$$P(X_{n+m} = j/X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+m} = j/X_n = i_n)$$

Definición: La probabilidad condicionada $p_{ij}^{n,n+1} = P(X_{n+1} = j/X_n = i)$ se denomina **probabilidad de transición** del estado i en la etapa n, al estado j en la etapa $n+1$.

Definición. Si la probabilidad de transición verifica que:

$$p_{ij}^{n,n+1} = p_{i,j}^{m,m+1} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

entonces no depende de la etapa origen de la transición (homogeneidad temporal), se llama **probabilidad de transición estacionaria** y se representa por p_{ij}.

Si las probabilidades de transición son estacionarias, la **Cadena de Markov** se denomina **homogénea**.

Definición Se define **matriz de transición** de la Cadena de Markov como la matriz de las probabilidades de transición en una etapa

$$P = ||p_{ij}|| \qquad i, j \in S$$

Observación La matriz de transición de una Cadena de Markov es **estocástica**, esto es:

1. $p_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \in S.$
2. $\sum_j p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in S.$

Comentario.
- Si A es matriz estocástica A^n es estocástica $\forall n \geq 2$.
- Si las matrices A y B son estocásticas, entonces la matriz $A.B$ es estocástica.

1.1. Ejemplos

1. Proceso de Bernoulli, Sumas de Bernoulli y Proceso del número de intentos hasta el k-ésimo éxito en juegos independientes de Bernoulli.

   a) La sucesión aleatoria de variables Bernoulli(p) independientes $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, siendo:

   $$X_n = \begin{cases} 1 \text{ con probabilidad } p \\ 0 \text{ con probabilidad } q = 1-p \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   es cadena de Markov con matriz de transición:

   $$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & ..... \\ 1-p & p & 0 & ..... \\ .... & ..... & ..... & ..... \\ & & & \end{pmatrix}$$

   b) La sucesión aleatoria $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias Bernoulli(p) independientes, es Cadena de Markov con:

   $$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \,....... \\ 0 & 1-p & p & 0 \,....... \\ 0 & 0 & 1-p & p \,....... \\ ... & ... & ... & .... \end{pmatrix}$$

   c) La sucesión aleatoria $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}$ definida por:

   $$\{T_k = n\} = \{S_{n-1} = k-1, X_n = 1\}$$

   esto es, el suceso $\{$$k$-ésimo éxito aparece en el n-ésimo intento de juegos Bernoulli(p) independientes$\}$, es Cadena de Markov con:

   $$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{T_{k+1} = j / T_k = i\} \\ &= P\{T_{k+1} - T_k = j-1\} \\ &= \begin{cases} pq^{j-i-1} & \text{si } j \geq i+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & p & pq & pq^2 & pq^3 & \cdots \\ 0 & 0 & p & pq & pq^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p & pq & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

2. El Paseo Aleatorio $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$, siendo las variables aleatorias:

   $$X_k = \begin{cases} 1 \text{ con probabilidad } p \\ -1 \text{ con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

independientes, es Cadena de Markov con $\left\{ \begin{array}{l} p_{i,i+1} = p \\ p_{i,i-1} = q \end{array} \right. \quad \forall i \in S$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

La sucesión aleatoria de variables independientes $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$X_n = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ con probabilidad } a_0 \\ 1 \text{ con probabilidad } a_1 \\ \quad\quad\quad .... \end{array} \right.$$

siendo $\sum\limits_i a_i = 1, \quad a_i \geq 0 \quad \forall i$, es Cadena de Markov con:

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & ... \\ a_0 & a_1 & a_2 & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

3. Proceso de difusión de partículas a través de una membrana (modelo de Ehrenfest), es un Paseo Aleatorio con S finito y barreras reflectantes,

$$S = \{-a, -a+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots a-1, a\}$$

las probabilidades de transición son:

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a-1}{2a} & \text{si } j = i+1 \\ \frac{a+1}{2a} & \text{si } j = i-1 \end{array} \right.$$

y la matriz de transición resulta:

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1-\frac{1}{2}a & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1-\frac{1}{2}a & 0 & \frac{1}{2}a & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} -a \\ -a+1 \\ .... \\ 0 \\ .... \\ a-1 \\ a \end{array}$$

2. Estudio distribucional de la Cadena de Markov (Homogénea)

2.1. Probabilidades de transición en n etapas

Definición: Las probabilidades

$$p_{ij}^n = P(X_{m+n} = j / X_m = i) \quad \forall m, n \geq 0, \quad \forall i, j \in S$$

se denominan probabilidades de transición en n etapas y la matriz

$$P^{(n)} = ||p_{ij}^n||, \quad i,j \in S$$

es la matriz de transición en n etapas.

Proposición: Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k \in S} p_{ik}^n p_{kj}^m \qquad \forall n,m \geq 0, \quad \forall i,j \in S$$

Demostración

Se tiene

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+m} &= p(X_{n+m} = j/X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j, X_n = k/X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j/X_n = k, X_0 = i).P(X_n = k/X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j/X_n = k).P(X_n = k/X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik}^n p_{kj}^m \qquad \square
\end{aligned}$$

Observación en forma matricial, la proposición anterior establece

$$P^{(n)} = P.P^{(n-1)} = P.P.P^{(n-2)} = \ldots\ldots = P^n$$

lo cual indica que la n-ésima potencia de la matriz de transición es la matriz de transición en n etapas.

(Ver métodos para calcular P^n en el Apéndice del final del capítulo).

Ejemplo de Cálculo de P^n

Sea P la matriz de transición de una Cadena de Markov con $S = \{1, 2\}$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right) \end{array} \quad ...estados$$

a) Calcular P^n

Descomposición espectral: $P = \Lambda D \Lambda^{-1}$

$$|P - \lambda I| = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}$$

(se observa ya que P,$1 = 1$)

$$(P - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{4}x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_2 = -x_1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}$$

entonces

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

se deduce que:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

entonces

$$p^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$

b) Hallar la probabilidad de que tras n días después de 2 se dé 1.

$$P(X_{k+n} = 1/X_k = 2) = p_{21}^n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n$$

Definición: El vector $p^{(n)} = (\ldots p_i^{(n)} \ldots), i \in S$ de probabilidades $p_i^{(n)} = P(X_n = i)$, se denomina distribución en la n-ésima etapa. El vector $p^{(0)}$ se denomina distribución inicial.

Proposición: $p^{(n)} = p^{(0)}.P^n \qquad \forall n \geq 0$

Demostración

A partir de las Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$p_i^{(n)} = \sum_{j \in S} \overset{(0)}{p_j} \, \overset{n}{p_{jk}} \qquad \forall i \in S, \quad \forall n \geq 0$$

matricialmente

$$p^{(n)} = p^{(0)}.P^n \qquad \square$$

2.2. Distribución conjunta de r variables del proceso

Proposición Para toda Cadena de Markov (homogénea) la distribución del proceso está caracterizada por $p^{(0)}$ y P.

Demostración

Sean $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$, bastará probar que

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$$

está determinado a partir de $p^{(0)}$ y P.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
P(X_0 &= i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \\
&= P(X_n = i_n / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}).P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}).P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}).P(X_{n-1} = i_{n-1} / X_{n-2} = i_{n-2}).P(X_1 = i_1 / X_0 = i_0) \\
&\quad .P(X_0 = i_0) = p_{in-1}, p_{in}.p_{in-2}, p_{in-1} \ldots p_{i0} \quad p_{i1}.p_{i0}^{(0)} \\
&= p_{i0}^{(0)}.p_{i0}, p_{i1}, p_{i2} \ldots p_{in-1} p_{in}
\end{aligned}$$

siendo $p_{i_0}^{(0)}$ elemento del vector inicial y el resto elementos de la matriz de transición P. □

Ejercicio

A partir de la matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Hallar:

a) Probabilidad de que tras n transiciones después de un 2 se den 1, 2 y 2 consecutivamente.

b) Teniendo $p^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, hallar la probabilidad de encontrar la cadena en 2 tras 2 transiciones.

Solución. teniendo en cuenta el cálculo anterior de P^n

$$\begin{aligned}
a).P(X_{k+n} &= 1, X_{k+n+1} = 2, X_{k+n+2} = 2 / X_k = 2) = \\
&= p_{2,1}^n.p_{1,2}.p_{2,2} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).\frac{1}{2}.\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b).p^{(2)} &= \left(p_1^{(2)} p_2^{(2)}\right) = p^{(0)} P^2 \\
p^{(2)} &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{16} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}.\frac{1}{16} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{16} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{16} \end{pmatrix} = (0,350, 65)
\end{aligned}$$

de donde $p_2^{(2)} = 0,65$.

2.3. Distribución límite de la Cadena de Markov

El estudio de las distribuciones conjuntas de r variables puede resultar complejo; además en algunos tipos de cadenas el comportamiento asintótico de p_{ij}^n cuando $n \to \infty$ se simplifica, en el sentido de que perdida la influencia de la posición inicial, tras un número suficiente de etapas p_{ij}^n resulta depender sólo de j y no del estado i. Esto lo determinan básicamente las características de los distintos estados.

3. Clasificación de estados

Definición

a). El estado j es accesible desde i si para algún $n \geq 0$ se tiene que $p_{ij}^n > 0 \quad (i \to j)$.

b). Los estados i y j son estados comunicados si i es accesible desde j y j es accesible desde $i \quad (i \leftrightarrow j)$.

Observación Si i , j no están comunicados, entonces $\forall$n ≥ 0 se verifica p$_{ij}^n$ =0 ó p$_{ji}^n$ =0 ó ambos.

Proposición La relación ($\leftrightarrow$) de comunicación entre estados es de equivalencia.

Demostración

1. reflexiva. Es inmediata por definición.
2. simétrica. Es inmediata por definición
3. transitiva.

   Si $i \leftrightarrow j$ entonces $\exists m \geq 0$ tal que $p_{ij}^m > 0$

   Si $j \leftrightarrow k$ entonces $\exists n \geq 0$ tal que $p_{jk}^n > 0$

   entonces $p_{ik}^{m+n} = \sum\limits_{l \in S} p_{il}^m p_{lk}^n > p_{ij}^m p_{jk}^n > 0 \quad \Rightarrow \quad i \to k$

   análogamente se prueba que $k \to i$.

Observación: Las clases de equivalencia generadas por esta relación de comunicación entre estados son los subconjuntos de estados de S que se comunican entre sí. En una cadena con una sola clase, todos los estados se comunican entre sí.

Definición. Una cadena de Markov es irreducible si tiene una sola clase de estados.

Definición Un estado $j \in S$ es absorbente si $p_{jj} = 1$.

Observación Todo estado absorbente forma una sola clase.

Ejemplos

1). El Paseo aleatorio con Barreras absorbentes cuya matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ ..... \\ \\ s \end{array}$$

tiene tres clases: {1}, {s}, {2,. . . ,s-1}

2). El Paseo Aleatorio con Barreras reflectantes cuya matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .... & .... & ... & 0 \\ q & 0 & p & .... & .... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & .... & .... & ... & ... \\ ... & ... & ... & .... & q & 0 & p \\ ... & ... & ... & .... & .... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una cadena irreducible.

Definición. Para todo $i \in S$, se denomina período de i y se denota por $d(i)$

$$d(i) = m.c.d.(n \geq 0 \quad , \quad p_{ii}^n > 0)$$

si $d(i) = 1$, el estado i se denomina **estado aperiódico**.

Proposición Si $i \leftrightarrow j$ (comunicados), entonces $d(i) = d(j)$.

Demostración

Sean $d = d(i)$, $\delta = d(j)$. Si $i \rightarrow j$ se deduce que existe $s \geq 0$, $p_{ij}^s > 0$.
y si $j \rightarrow i$ análogamente existe $r \geq 0$, con $p_{ji}^r > 0$
Entonces

$$p_{i,i}^{s+r} \quad \geq \quad p_{ij}^s p_{ji}^r \quad = \quad \beta > 0$$

de donde se deduce que $s + r = \dot{d}$ (múltiplo de d)
Ahora para $n \geq 0$

$$p_{ii}^{n+r+s} = p_{ij}^s p_{jj}^n p_{ji}^r = \beta p_{jj}^n$$

será:
a). $\beta p_{jj}^n > 0$ si $n = \dot{d}$ o bien
b). $\beta p_{jj}^n = 0$ si $n \neq \dot{d}$ y entonces $\delta \geq d$ ya que $p_{jj}^n = 0$ por ser $\beta > 0$.

Invirtiendo los papeles de i y j se obtendría $d \geq \delta$, cuya solución es $\delta = d$ y ambos estados deberán tener el mismo período.

Observación: Todos los estados comunicados entre sí tienen el mismo período.

Para avanzar en la interpretación de los estados en que la cadena pueda encontrarse en el largo plazo, vamos a adoptar el punto de vista de "visitas" a un estado fijo.

Ejemplo: Sea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Los estados $\{1\}$ y $\{2, 3\}$ son recurrentes (se permanece en ellos una vez que se alcanzan), y el estado $\{4\}$ es transitorio (no se retorna a ellos una vez que se abandonan).

Definición. El estado $i \in S$ se llama recurrente si

$$P(X_n = i \quad \text{para algún } n \geq 1 / X_0 = 1) = 1$$

Definición El estado $i \in S$ es transitorio si es no recurrente.

3.1. Caracterización en términos de las probabilidades de transición

Proposición El estado i es recurrente $\Leftrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$

Demostración

Vamos a relacionar las probabilidades de transición con las probabilidades llamadas de "primera pasada" para $i, j \in S$, con $n \geq 1$.

$$f_{ij}^n = P(X_n = j, X_k \neq j, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 / X_0 = i)$$

con $f_{ij}^0 = 0$.

Entonces $f_{ij} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n$ es la probabilidad de que la cadena visite el estado j alguna vez, partiendo del estado i.

Naturalmente, i es recurrente $\Leftrightarrow \quad f_{ii} = 1$ (y el estado i es transitorio $\Leftrightarrow \quad f_{ii} < 1$)

Sean para $|s| < 1$ las funciones:

$$\begin{aligned} F_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^n s^n \\ P_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n s^n \end{aligned}$$

entonces se verifica

$$\begin{aligned} F_{ii}(s).P_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ii}^n p_{ii}^{n-k} \right) s^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k} \right) s^n \\ &= P_{ii}(s) - 1 \\ \text{de donde } P_{ii}(s) &= \frac{1}{1 - F_{ii}(s)} \\ \text{ya que } f_{ii}^0 &= 0 \quad y \quad p_{ii}^0 = 1 \\ \text{además para } n \geq 1 \qquad p_{ii}^n &= \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k} \end{aligned}$$

Procedemos ahora a demostrar la proposición

a). Necesidad:

Sea i recurrente $\Rightarrow f_{ii} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = 1$; por el Lema de Abel

$$\lim_{s \to 1} F_{ii}(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{s \to 1} P_{ii}(s) = \lim_{s \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n s^n = \infty$$

nuevamente por el lema de Abel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty \quad$ c.q.d.

b). Suficiencia (por reducción al absurdo)

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n < 1$ entonces por el Lema de Abel

$$\lim_{s \to 1} F_{ii}(s) < 1$$

de donde
$$\lim_{s\to 1} P_{ii}(s) < \infty$$
Aplicando nuevamente el Lema de Abel
$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$$
en contra de la hipótesis de partida. $\square$

Lema de Abel

i). Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$
$$\Rightarrow \quad \lim_{s\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$
ii) Si $\alpha_n \geq 0$ y
$$\lim_{s\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n s^n = \alpha \leq \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha$$

Observaciones

1). Dado que $f_{ii} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n$ es la probabilidad de que comenzando en i, el estado i sea eventualmente revisitado, la suma $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n$ es el número medio de visitas al estado i. Esto es, si definimos como $N_i(\omega)$ el número de veces que el estado i aparece en la realización $(X_1(w), X_2(w), \ldots)$, en términos de la función indicadora será
$$N_i(w) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{i\}}(X_n(w))$$
De donde
$$\begin{aligned} E(N_i/X_0 = i) &= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{i\}} X_n(w)/X_0 = i\right] \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i/X_0 = i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n \end{aligned}$$
por el teorema de la convergencia monótona.

2). El estado i es recurrente $\Leftrightarrow P(N_i = \infty/X_0 = i) = 1$, es decir, infinitamente revisitado con probabilidad 1.

Proposición.

$i \leftrightarrow j$ (comunicados), i es recurrente $\Rightarrow j$ es recurrente.

Demostración

Por hipótesis $\exists n, m \geq 1$ tales que $p_{ij}^n > 0 \quad$ y $\quad p_{ji}^m > 0$
Para $k \geq 1$
$$P_{jj}^{n+m+k} \quad \geq \quad p_{ji}^m p_{ii}^k p_{ij}^n$$

de donde
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{n+m+k} \quad \geq \quad p_{ji}^{m} p_{ij}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{k} \quad = \quad \infty$$
ya que $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{k} = \infty$ por ser recurrente; luego:

$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{k} = \infty \Rightarrow j$ es recurrente. $\square$

Observación

En cada clase de equivalencia (clases de estados comunicados) todos los estados tienen el mismo carácter de recurrencia o transitoriedad. Se van a clasificar ahora los estados recurrentes.

Definición Para un estado $i \in S$ recurrente, su tiempo medio de recurrencia μ_i, es el número medio de transiciones requeridas para retornar al estado i. Esto es
$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{n}$$

Definición. Sea $j \in S$ recurrente, será
a). recurrente positivo si $\mu_j < \infty$
b). recurrente nulo si $\mu_j = \infty \quad \Leftrightarrow \quad$ si $\forall i, j \quad p_{ij}^{n} \quad \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$
c) ergódico si es recurrente positivo y aperiódico.

Comentario: Toda cadena Finita aperiódica e irreducible es de estados recurrentes positivos.

Vamos a estudiar a continuación la distribución límite de la cadena.

Definición. Se dice que una Cadena de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados S tiene una distribución límite π si existe
$$\lim_{n\rightarrow\infty} P(X_n = j) = \pi_j \qquad j \in S$$

Observación: Ya que:
$$P(X_n = j) = p^{(n)}(j) = \sum_{i\in S} p^{(0)}(i) p_{ij}^{n}$$
donde $p^{(0)}(i)$ es la i-ésima coordenada del vector inicial $p^{(0)}$, se observa que la existencia de la distribución límite no depende de $p^{(0)}$ y sí depende del
$$\lim_{n\rightarrow\infty} p_{ij}^{n}$$
Esto es, si existe $\quad \alpha(j) = \lim_{n\rightarrow\infty} p_{ij}^{n} \quad$ y además $\alpha(j) \geq 0 \quad \forall j \quad$ y $\quad \sum_{j\in S} \alpha(j) = 1 \quad \Rightarrow$ es $\{\alpha(j)\}$ la distribución límite

Comentarios

1). Sea $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{00}^{n} = \begin{cases} 0 \text{ si n es impar} \\ 1 \text{ si n es par} \end{cases}$
entonces $p_{00}^{n} \rightarrow_{n\rightarrow\infty} ?$; debido a la periodicidad no existe límite.

2). Sea $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ la matriz de la C.M. $\{X_n\}$ con $S = \{0,1\}$
Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha(0) = \frac{b}{a+b} \quad \text{y} \quad \alpha(1) = \frac{a}{a+b}$$

Observación La distribución límite es invariante, esto es:

$$\pi(j) = \sum_{i\in S} \pi(i).p_{ij} \qquad j \in S$$

La distribución invariante se llama también estacionaria se puede calcular según

$$\begin{aligned} \pi(j) &= \lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} = j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} P(X_n = i).p_{ij} \\ &= \sum_{i\in S} \left(\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)\right).p_{ij} \\ &= \sum_{i\in S} \pi(i)p_{ij} \end{aligned}$$

aplicando el Teorema de la convergencia dominada.

Caso particular

Si la distribución inicial $p^{(0)}$ es invariante (estacionaria) entonces las variables aleatorias X_n tienen la misma distribución y la cadena es un **Proceso estrictamente estacionario**. Esto es:

$$p^{(0)} = p^{(n)} = \pi \qquad \forall n \geq 1$$

Proposición. Si $i \approx j$, y j es aperiódico, entonces

$$p_{ij}^n \quad \to_{n\to\infty} \quad \frac{1}{\mu j}$$

Teorema: Si $\{X_n\}$ es Cadena de Markov irreducible y aperiódica con matriz de transición P, entonces verifica una de las dos situaciones

a). todos los estados son transitorios o todos recurrentes nulos y en este caso $p_{ij}^n \to_{n\to\infty} 0 \quad \forall i,j \in S$ y **no existe distribución estacionaria**.

b) todos los estados son recurrentes positivos y en este caso

$$p_{ij}^n \to_{n\to\infty} \pi_j \qquad \forall i,j \in S$$

siendo $\pi_j = \frac{1}{\mu j}$

Ejercicio: Cálculo de las probabilidades de "primera pasada".

Para $n = 1$ se tiene $f_{ij} = p_{ij}$

Para $n \geq 2$ se tiene $f_{ij}^n = \sum_{b\neq j} p_{ib} f_{bj}^{n-1}$

Ejemplo:

$$S = \{1, 2, 3\} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular para $j = 3$ fijo

Denotamos por $Q \equiv P$ la matriz de transición de la Cadena de Markov con la j-ésima columna sustituida por ceros y

$$f^n = \begin{pmatrix} f^n_{1j} \\ f^n_{2j} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

el vector de probabilidad de primera pasada con $n \geq 1$

obviamente $f^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ ahora

$$\begin{aligned} f^n &= Qf^{n-1}, \quad \text{luego } f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ \text{entonces } f^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{18} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, f^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{108} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}, f^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{648} \\ \frac{1}{180} \end{pmatrix} \ldots\ldots \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f^n_{13} &= 0 \quad \forall n \geq 1 \\ f^n_{23} &= \frac{1}{3}(\frac{1}{6})^{n-1} \quad \forall n \geq 1 \\ f^n_{33} &= \begin{cases} \frac{1}{15} & n = 1 \\ \frac{3}{5}(\frac{1}{6})^{n-2}(\frac{1}{3}) & n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

4. APÉNDICE.

MÉTODOS PARA CALCULAR P^n

1). Z- transformada.
$p^{(0)}$ = vector inicial en la cadena de Markov.
$p^{(n)} = p^{(n-1)}.p$
$G(z) = \sum_0^\infty p^n z^n = p^0 + \sum_1^\infty p^n z^n$
$G(z) - p^{(0)} = z(\sum_1^\infty p^{n-1}.z^{n-1}).P$
$G(z) - p^{(0)} = z.G(z).P \quad \Rightarrow \quad p^{(0)} = G(z)[I - zP]$
$G(z) = p^{(0)}(I - -zP)^{-1}$
A partir de $(I - zP)^{-1}$ se identifica P^n

Ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$I - zP = \begin{pmatrix} 1 - z/2 & -z/2 \\ -3/4z & 1 - z/4 \end{pmatrix}$$

$$det(I - zP) = (1 - \frac{z}{2})(1 - \frac{z}{4}) - \frac{3}{8}z^2 = (1 - z)(1 + \frac{z}{4})$$

$$(I - zP)^{-1} = \frac{1}{(1 - z)(1 + z/4)} \begin{pmatrix} 1 - (\frac{z}{4}) & 1/2z \\ 3z/4 & 1 - (\frac{z}{2}) \end{pmatrix} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{1 + z/4}$$

buscamos las matrices A y B tales que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} (1 + \frac{z}{4}) + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} (1 - z) = \begin{pmatrix} 1 - (\frac{z}{4}) & 1/2z \\ 3z/4 & 1 - (\frac{z}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} + b_{11} = 1 \\ \frac{a_{11}}{4} - b_{11} = -\frac{1}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{c} a_{11} = \frac{3}{5} \\ b_{11} = \frac{2}{5} \end{array} \quad \text{, de donde} \quad \begin{array}{c} a_{12} = \frac{2}{5} \\ b_{12} = -\frac{2}{5} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{21} + b_{21} = 0 \\ \frac{a_{21}}{4} - b_{21} = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{c} a_{21} = \frac{3}{5} \\ b_{21} = -\frac{3}{5} \end{array} \quad \text{, de donde} \quad \begin{array}{c} a_{22} = \frac{2}{5} \\ b_{22} = \frac{3}{5} \end{array}$$

de donde:

$$(I - zP)^{-1} = \frac{1}{1 - z} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \frac{1}{1 + z/4} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum z^n \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \sum \left(-\frac{1}{4}\right)^n z^n \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \sum z^n \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow P^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Anexo:

Cálculo de la Distribución estacionaria

$$\left\{ (\pi_1\pi_2) = (\pi_1\pi_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \pi_1 + \pi_2 = 1 \right.$$

$$\pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \pi_2\frac{3}{4} \Rightarrow \pi_1 = \frac{3}{2}\pi_2 \Rightarrow 1 - \pi_2 = \frac{3}{2}\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \pi_1 = \frac{3}{5}$$

2) Representación espectral (modificación)

$$\begin{aligned} P &= \Gamma D \Gamma^{-1} \\ D &= diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \\ \Gamma &= (\gamma_1 \ldots \gamma_n) \end{aligned}$$

$$\Gamma^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1(1) & ... & \pi_1(n) \\ \pi_n(1) & ... & \pi_n(n) \end{pmatrix}$$

donde: $\Gamma^{-1}.\Gamma = I \quad \Leftrightarrow \quad \pi_j\gamma_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$

se definen las matrices B_k obtenidas según

$$B_k = \begin{pmatrix} ..... \\ \gamma_k \\ ...... \end{pmatrix} .(...\pi_k...) = \begin{pmatrix} \gamma_k(1).\pi_k(1)........\gamma_k(1)\pi_k(n) \\ .... \\ \gamma_k(n)\pi_k(1)..........\gamma_k(n)\pi_k(n) \end{pmatrix}$$

entonces

$$B_jB_k = \gamma_j \quad \pi_j \quad \gamma_k \quad \pi_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ B_j & j = k \end{cases}$$

entonces

$$P = \Gamma D \Gamma^{-1} \quad \Rightarrow \quad P = \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_n B_n$$

ya que

$$\begin{aligned} P(i,j) &= \sum_k \sum_{k^1} \Gamma(i,k) D(k,k'^{-1}(k',j) \\ &= \sum_k \Gamma(i,k)D(k,k)\Gamma^{-1}(k,j) \\ &= \sum_k \gamma_k(i)\lambda_k\pi_k(j) = \sum_k \lambda_k B_k(i,j) \end{aligned}$$

luego

$$P^k = \lambda_1^k B_1 + \ldots + \lambda_n^k B_n$$

Ejemplo

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

como $P1 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ autovalor; traza $(P) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \Rightarrow$

$$0,8+0,7=\lambda_1+\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2=0,5 \text{ autovalor}$$

$$P^0=B_1+B_2$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \quad , \quad B_2=\begin{pmatrix} 0,4 & -0,4 \\ -0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad p^k=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}+(0,5)^k\begin{pmatrix} 0,4 & -0,4 \\ -0,6 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad \text{para} \quad k=0,1,\dots$$