

PROCESOS ESTOCÁSTICOS. INTRODUCCIÓN

Rosario Romera
Febrero 2009

1. Medidas de Probabilidad y σ -álgebras

Definición Sea el conjunto $\Omega \neq \emptyset$. Una colección \mathcal{F} de subconjuntos de Ω se llama σ -álgebra de conjuntos si:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$.
- ii) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
- iii) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Definición Sea $\Omega \neq \emptyset$ y \mathcal{F} una σ -álgebra en Ω . La pareja (Ω, \mathcal{F}) se llama *espacio medible*. Si (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ es una σ -álgebra en Ω , \mathcal{G} se llama una sub-álgebra de \mathcal{F} .

Proposición Si ξ es una colección de subconjuntos de Ω , entonces existe una σ -álgebra minimal que contiene a ξ . Dicha σ -álgebra la denotamos por $\sigma(\xi)$ y la llamamos σ -álgebra generada por ξ .

Definición Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una medida sobre (Ω, \mathcal{F}) es una función μ definida sobre \mathcal{F} con valores en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que:

- i) $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
- ii) $\mu(\emptyset) = 0$.
- iii) para toda sucesión E_1, E_2, \dots de conjuntos dos a dos disjuntos de \mathcal{F} :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ se llama *espacio de medida*

Definición Se dice que la medida μ es finita si $\mu(\Omega) < \infty$.

Si $\mu(\Omega) = 1$, μ se llama *medida de probabilidad*.

Definición Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible y P una medida de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{F}) . La terna (Ω, \mathcal{F}, P) se llama *espacio de probabilidad*.

De la definición de medida de probabilidad se deducen entre otras, las siguientes propiedades:

- (i) $P(\phi) = 0$.
- (ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
- (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \cap B = \emptyset$.
- (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para todo $A, B \in \mathcal{F}$.
- (v) Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
- (vi) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ y $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ Entonces $P(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.
- (vii) Si $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ y $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ entonces $P(\bigcap_n B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$.

Definición Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Definimos

i)

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

esto es, $\omega \in \limsup A_n$ si y sólo si para todo n , se tiene que $\omega \in A_k$ para algún $k \geq n$.

ii)

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

esto es, $\omega \in \liminf A_n$ si y sólo si existe tal que $\omega \in A_k$ para todo $k \geq n$.

Definición Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una familia $(A_i)_{i \in I}$ de elementos de \mathcal{F} se dice independiente si para cada subconjunto no vacío y finito de I con elementos i_1, \dots, i_n se tiene que:

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}\right) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n})$$

2. Lema de Borel - Cantelli

Lema (Borel-Cantelli) Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.

- i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ entonces $P(\limsup A_n) = 0$
- ii) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de sucesos independientes. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ entonces $P(\limsup A_n) = 1$

Demostración

a)

$$P(\limsup A_n) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

b)

$$\begin{aligned} 1 &\geq P(\limsup A_n) = 1 - P(\liminf A_n^c) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \end{aligned}$$

Veamos que $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = 0$ Tenemos

$$0 \leq P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right) = \prod_{k=n}^N P(A_k^c) = \prod_{k=n}^N [1 - P(A_k)]$$

Como para todo $0 \leq x \leq 1$ se satisface

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Entonces

$$\prod_{k=n}^N [1 - P(A_k)] \leq \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto, $P(\limsup A_n) = 1$

En resumen: Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de sucesos independientes entonces

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$$

3. Probabilidad Condicionada, Variables Aleatorias y sus Distribuciones

Definición Si $P(B) > 0$ entonces la *probabilidad condicionada de A dado B* está definida como sigue:

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. $A \in \mathcal{F}$ con $P(A) = 0$ se llama *evento nulo*

Definición Un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) se dice *completo* si todos los subconjuntos de conjuntos nulos son elementos de \mathcal{F} .

Definición Una *variable aleatoria real* (v.a real) es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ para cualquier real x .

Si \mathcal{G} es una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} y $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{G}$ para cualquier real x entonces X se llama v.a. \mathcal{G} -medible

Definición Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una v.a real. La medida P_X sobre (\mathbb{R}, \mathbf{B}) definida por $P_X(B) := P(X \in B)$ con $B \in \mathbf{B}$ se llama *distribución de la variable aleatoria X*

Definición La *función de distribución* de una v.a real X es la función $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por $F(x) = P(X \leq x)$

Observación La distribución de una v.a real X está determinada de manera única por su función de distribución

Definición Una v.a real X se dice *discreta* si el conjunto de posibles valores de X es contable.

Una v.a real X se dice *continua* si existe una función Riemann integrable $f(x)$, llamada *función de densidad*, tal que

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx \quad \forall B \in \mathbf{B}$$

La *distribución conjunta* F de dos v.a X y Y está definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Las v.a X y Y se dicen *independientes* si

$$F(x, y) = P(X \leq x).P(Y \leq y)$$

Las v.a reales X y Y se dicen *conjuntamente continuas* si existe una función $f(x, y)$, llamada *función de densidad de probabilidad conjunta*, de X y Y tal que:

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f(x, y)dydx \quad \forall A, B \in \mathcal{B}$$

El *valor esperado* o media de la v.a X , denotado por $E[X]$, se define por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

siempre y cuando la anterior integral de Riemann-Stieltjes exista.

Si X y Y son variables aleatorias con funciones de distribución F_X y F_Y respectivamente, entonces la función de distribución de su suma $Z = X + Y$ es la convolución de F_X y F_Y definida por:

$$F_Z(\xi) = (F_X * F_Y)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\xi - y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(\xi - x) dF_X(x)$$

Si las variables aleatorias X y Y son independientes y tienen funciones de densidad f_X y f_Y respectivamente, entonces la función de densidad de su suma $Z = X + Y$ es la convolución de f_X y f_Y definida como:

$$f_Z(\xi) = (f_X * f_Y)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\xi - y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(\xi - x) f_X(x) dx$$

4. Esperanza Condicionada

Definición: Si X y Y son v.a discretas, la *probabilidad condicionada de X dado $Y = y$* , se define para todo y con $P(Y = y) > 0$ como:

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

La función de distribución condicionada de X dado $Y = y$ está definida por:

$$F(x | y) = P(X \leq x | Y = y)$$

y la **esperanza condicionada de X dado que $Y = y$** se define como:

$$E(X | Y = y) = \sum_x xP(X = x | Y = y)$$

Definición: Si X y Y tienen función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$, la función de densidad condicionada de X dado $Y = y$, está definida para todos los y con $f_Y(y) > 0$ por:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

donde $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ es la función de densidad marginal de Y

La función de distribución condicionada de X , dado $Y = y$, está definida por:

$$F_{X|Y}(x | y) = P(X \leq x | Y = y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x | y) dx$$

La esperanza condicionada de X dado $Y = y$, está dada por:

$$E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx$$

Definición: Sean X y Y v.a reales y h una función tal que $h(X)$ es una variable aleatoria. La variable aleatoria $E(h(X) | Y)$ definida por

$$E(h(X) | Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \omega \mapsto E(h(X) | Y = Y(\omega))$$

se llama valor esperado condicionado de $h(X)$ dado Y

Definición: Sea X una variable aleatoria real definida sobre (Ω, \mathcal{F}, P) y sea $B \in \mathcal{F}$ con $P(B) > 0$. La esperanza condicionada de X dado B se define por:

$$E(X | B) = \frac{E(X_B X)}{P(B)}$$

siempre que exista el valor esperado del lado derecho.

Definición: Sea Y una v.a definida sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) con $E[Y] < \infty$.

Sea ξ una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} . La *esperanza condicionada de Y dado ξ* , denotada por $E(Y | \xi)$, es una v.a ξ -medible tal que:

$$E([Y - E(Y | \xi)] 1_G) = 0 \quad \forall G \in \xi$$

donde 1_G es la indicadora de G .

Observación: Si Y, X_1, X_2, \dots son variables aleatorias reales entonces $E(Y | X_1, X_2, \dots)$ denota $E(Y | \sigma(X_1, X_2, \dots))$ donde $\sigma(X_1, X_2, \dots)$ denota la menor σ -álgebra con respecto a la cual X_1, X_2, \dots son medibles.

La esperanza condicionada satisface entre otras las siguientes condiciones:

- (1) $E[E(Y | X)] = E[Y]$.
- (2) $E[E(Y | X).g(X)] = E[Yg(X)]$ para cualquier función g .
- (3) $E[aY + bZ | X] = aE[Y | X] + bE[Z | X]$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
- (4) $E[Y | X] \geq 0$ si $Y \geq 0$
- (5) $E[1 | X] = 1$
- (6) Si X y Y son independientes entonces $E[Y | X] = E[Y]$
- (7) $E[Yg(X) | X] = g(X).E[Y | X]$ para cualquier función apropiada g .
- (8) $E[E(Y | X, Z) | X] = E[Y | X] = E[E(Y | X) | X, Z]$.

Observación: La esperanza condicionada tiene una aplicación muy útil en la teoría Bayesiana de la estadística. Un problema clásico en esta teoría se obtiene cuando se observan datos $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ cuya distribución está determinada por el valor de una variable aleatoria θ la cual tiene una distribución específica llamada *distribución a priori*. Con base en los valores de los datos X el problema que interesa es estimar el valor desconocido de θ un estimador de θ puede ser cualquier función $d(X)$ de los datos. En la teoría Bayesiana se busca escoger $d(X)$ de tal forma que se minimice el valor esperado condicionada del cuadrado de la distancia entre el estimador y el parámetro, esto es, se busca que $E[(\theta - d(X))^2 | X]$ se minimice.

Puesto que condicionado sobre X se tiene que $d(X)$ es constante y, como para cualquier variable aleatoria W , $E[(W - c)^2]$ es mínimo cuando $c = EW$, entonces se concluye que el estimador que minimiza $E[(\theta - d(X))^2 | X]$, llamado estimador de Bayes, está dado por $d(X) = E[\theta | X]$.

5. Procesos Estocásticos

Definición: Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias $X = \{X_t, t \in T\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad común (Ω, \mathcal{F}, P) y con valores en un espacio medible (S, \mathcal{A}) llamado *espacio de estados*. El conjunto de parámetros T se llama *dominio de definición del proceso*.

Definición: Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico

- i) Decimos que X es *real* si las v.a. X_t son de valor real para todo $t \in T$.
- ii) Decimos que X es *complejo* si las v.a. X_t son de valor complejo para todo $t \in T$.
- iii) Si $T = N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ entonces el proceso se llama *Proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto*.
- iv) Si T es un intervalo de la recta real entonces el proceso se denomina *proceso con parámetro de tiempo continuo*.
- v) Si $T \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n > 1$ entonces el proceso se denomina *campo aleatorio*.

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico y sea $\omega \in \Omega$ fijo. La función $t \rightarrow X_t(\omega)$ se llama trayectoria del proceso estocástico X .

Definición: Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico real y $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ donde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entonces

$$F_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) := P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

Se llama *función de distribución (marginal) finito dimensional del proceso*

Definición: Sean $X = \{X_t, t \in T\}$ y $Y = \{Y_t, t \in T\}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , decimos:

- i) X y Y son iguales si $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todos $t \in T$ y $\omega \in \Omega$.
- ii) X y Y son *estocásticamente equivalentes* si $P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in T$.
- iii) X y Y son *estocásticamente equivalentes en el sentido amplio* si para cada $n = 1, 2, \dots$ y $\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ y $\{B_1, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B}$ se satisface:

$$P(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \dots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, Y_{t_2} \in B_2, \dots, Y_{t_n} \in B_n)$$

Es claro que ii) implica iii)

- iv) X y Y se dicen *indistinguibles* si casi todas sus trayectorias coinciden, esto es $P(X_t = Y_t, t \in T) = 1$.

Definición: Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico sobre (Ω, \mathcal{F}, P) . Cualquier otro proceso estocástico $Y = \{Y_t, t \in T\}$ sobre el mismo espacio de probabilidad, equivalente a X , se llama una *versión* de X .

Definición: Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico. Decimos que el *proceso* es *Càdlàg* si cada una de sus trayectorias es continua por la derecha y tiene límite por la izquierda.

Teorema: Sean $X = \{X_t, t \in T\}$ y $Y = \{Y_t, t \in T\}$ dos procesos estocásticos, estocásticamente equivalentes y ambos continuos por la derecha entonces los procesos son indistinguibles.

6. Construcción de Kolmogorov

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico real sobre (Ω, \mathcal{F}, P) . El proceso determina una familia de funciones de distribución marginales, a saber:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

Esa familia satisface las siguientes condiciones (llamadas condiciones de consistencia):

- (i) $F_{t_{k_1}, \dots, t_{k_n}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ para cualquier permutación k_1, \dots, k_n de $1, 2, \dots, n$.
- (ii) Para cualquier $1 \leq k \leq n$ y $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ se satisface:

$$F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty)$$

Surge pues de manera natural la siguiente pregunta: dada una familia consistente de funciones de distribución, ¿existe un proceso estocástico tal que esas distribuciones sean sus distribuciones finito dimensionales? La respuesta es si y esta dada por:

Teorema de Consistencia de Kolmogorov : Supóngase que

$$\{F_{t_1, \dots, t_n} : t_j \in [0, +\infty), j = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots\}$$

es un sistema consistente de funciones de distribución, entonces existe un proceso estocástico $X = \{X_t, t \in [0, +\infty)\}$ de valor real cuyas distribuciones finito dimensionales están dadas por F_{t_1, \dots, t_n} .

7. Procesos con Incrementos Independientes

La estructura de la información que genera la evolución del proceso estocástico resulta relevante para determinar el futuro en función del presente y del pasado del proceso. Vamos a formalizar esta idea en términos probabilísticos a partir de las σ -álgebras que va generando el proceso.

Definición: Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una filtración en (Ω, \mathcal{F}) es una familia no-decreciente $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de sub- de \mathcal{F} .

Nota: Dado un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ definido sobre (Ω, \mathcal{F}, P) se tiene que $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), t \geq 0$ es una filtración en (Ω, \mathcal{F}) .

La filtración $\{\mathcal{F}_t^X\}_t$ se llama *filtración canónica* con respecto a $(X_t)_t$.

Definición: El proceso estocástico $X = (X_t)_{t \geq 0}$ es *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0, X_t$ es una v.a. \mathcal{F}_t -medible.

Observación Todo proceso X es adaptado a la filtración canónica $\{\mathcal{F}_t^X\}$.

Definición: El proceso estocástico real $(X_t)_{t \geq 0}$ se llama *proceso de movimiento Browniano unidimensional* si satisface las siguientes condiciones:

- i) Para cualquier subconjunto finito $\{t_0, \dots, t_n\} \subseteq [0, +\infty)$ con $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ se tiene que los incrementos $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son v.a. independientes.
- ii) La distribución de probabilidad de $X_{t_2} - X_{t_1}, t_2 > t_1$, depende solamente de $t_2 - t_1$.
- iii) $P(X_t - X_s \leq x) = [2\pi\sigma(t-s)]^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp[-u^2/2\sigma(t-s)] du$ con $t > s$ y σ una constante positiva.

Nota 1 Si suponemos $X_0 = 0$ entonces $EX_t = 0$ y $Var X_t = \sigma t$.

Nota 2 Es fácil demostrar que si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ entonces la distribución condicionada de X_t cuando los valores de $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ son conocidos está dada por:

$$P(X_t \leq x \mid X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = [2\pi\sigma(t-t_n)]^{-1/2} \int_{-\infty}^{x-x_n} \exp[-u^2/2\sigma(t-t_n)] du$$

Definición: El proceso estocástico real $\{N_t, t \geq 0\}$ se llama proceso de conteo si N_t representa el número total de “sucesos” que ocurren hasta el tiempo t . Por lo tanto, un proceso de conteo $(N_{t \geq 0})$ debe satisfacer:

- i) $N_t \geq 0$

- ii) N_t es de valor entero
- iii) $N_s \leq N_t$ si $s < t$
- iv) Para $s < t$, $N_t - N_s$ es igual al número de sucesos que ocurren en el intervalo de tiempo $(s, t]$.

Uno de los procesos de conteo más importantes es el llamado **Proceso de Poisson**.

Definición: El proceso de conteo $\{X_t, t \geq 0\}$ se llama proceso de Poisson con tasa o intensidad $\lambda > 0$ si:

- i) $X_0 = 0$
- ii) El número de sucesos que ocurren en intervalos de tiempo no superpuestos son independientes
- iii) La distribución del número de sucesos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo depende sólo de la longitud del intervalo
- iv) $P(X_h = 1) = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$
- v) $P(X_h \geq 2) = o(h), \quad h \rightarrow 0$

Nota Si $\{X_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$ entonces $X_t = \mathcal{P}(\lambda t)$.

Los procesos Browniano y de Poisson son ejemplos de procesos estocásticos con incrementos estacionarios e independientes.

Definición: Decimos que el proceso estocástico real $\{X_t, t \geq 0\}$ tiene **incrementos independientes** si para cualquier subconjunto finito $\{t_0, \dots, t_n\} \subseteq [0, +\infty)$ y cualquier n , con $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ los incrementos $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes.

Observación Si el conjunto de índices es discreto, digamos $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ entonces un proceso con incrementos independientes es una sucesión de variables aleatorias independientes $Z_0 = X_0; Z_1 = X_1 - X_0; \dots, Z_n = X_n - X_{n-1}, \dots$ con $n = 1, 2, \dots$

Definición: Decimos que el proceso estocástico real $\{X_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios si la distribución de los incrementos $X_{t+h} - X_t$ depende sólo de la longitud h del intervalo. Es decir, si $\{X_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios entonces

$$X_{t_2+h} - X_{t_1+h} = X_{t_2} - X_{t_1} \quad \forall t_1 < t_2; h > 0$$

8. Procesos Estacionarios

Definición: Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico, tiene función de media y función de varianzas:

$$m(t) = E[X_t] \quad \sigma^2(t) = v(X_t) \quad \forall t \in T$$

función de covarianza:

$$c(s, t) = cov(X_s, X_t) \quad s, t \in T$$

Definición: Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$, siendo $T = \mathbb{Z}$ ó $T = \mathbb{R}$ es proceso estacionario (en sentido estricto o de primer orden o fuertemente estacionario) si $\forall h \in T$ y para todos $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ arbitrarios la distribución conjunta de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ es la misma que la distribución conjunta de $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_k+h})$. Es decir, si efectuamos una misma traslación sobre todos los índices, la distribución finito dimensional correspondiente no varía.

Ejemplo $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas es proceso estacionario de primer orden.

Definición: $\{X_t\}_{t \in T}$ es proceso estacionario en covarianza (o débilmente estacionario o estacionario de segundo orden) si $\forall t \in T$, se tiene que $m(t) = m$ y $c(t, t+h) = cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) < \infty \quad \forall h \in T$, esto es, tiene función media constante y función de covarianza dependiente sólo del “retardo” h .

Observación La varianza de un proceso estacionario en covarianza es constante, esto es: $\gamma(0) = var[X_t] \quad \forall t \in T$.

Proposición Si $\{Z_t\}_{t \in T}$ es proceso gaussiano (distribuciones conjuntas son normales multivariantes) estacionario en covarianza, entonces es estrictamente estacionario.

Definición Para $\{X_t\}_{t \in T}$ proceso estacionario en covarianza se define $\gamma(h)$ como la función de autocovarianza del proceso y la función $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$, con $h \in T$ se define como la función de autocorrelación (función de autocovarianza estandarizada).

Proposición Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ proceso estacionario en covarianza. Entonces se verifica:

1. $\rho(0) = 1$.
2. $|\rho(h)| \leq 1, \quad \forall h \in T$.
3. $\rho(h) = \rho(-h) \quad \forall h \in T$.

Demostración

1. Trivial
2. Como $\rho(h)$ es el coeficiente de correlación lineal entre las variables aleatorias X_t y $X_{t+h} \quad \forall t, h \in T$
3. Miembro izquierdo

$$\frac{cov(X_t, X_{t+h})}{\gamma(0)} = \frac{cov(X_{t+h}, X_t)}{\gamma(0)}$$

Miembro derecho

$$\frac{cov(X_{t+h}, X_t)}{\gamma(0)}$$

9. Ejemplos

1. **Proceso de Ruido Blanco:** Sea $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de **variables aleatorias incorreladas** de media cero y varianza constante σ_ε^2 . Su función de autocovarianza es:

$$\gamma(h) = cov(X_n, X_{n+h}) = 0 \text{ si } h \neq 0 \text{ y } \gamma(0) = var[X_n] = \sigma_\varepsilon^2$$

es por tanto estacionario en covarianza y su función de autocorrelación

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

luego es estacionario en covarianza.

Si el proceso es gaussiano entonces es estrictamente estacionario

2. **Proceso autorregresivo de orden 1: AR(1)** Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definido por

$$X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n \quad \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

sucesión ruido blanco, se observa que:

a) El proceso autorregresivo se obtiene como combinación lineal de ruidos blancos:

$$X_n = a(aX_{n-2} + \varepsilon_{n-1}) + \varepsilon_n = a^2X_{n-2} + a\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{n-j}$$

Además:

$$\text{var}[X_n] = \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} \text{var}[\varepsilon_{n-j}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j}$$

b) Si $a = 1$ el proceso es un paseo aleatorio y para $|a| = 1$ el proceso no es estacionario ya que $\text{var}[X_n] = \infty$ siendo $E[X_n] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

c) Para $|a| < 1$ se tiene $E[X_n] = 0$, y la función de autocovarianza es

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{cov}(X_n, X_{n+h}) = E[X_n X_{n+h}] \\ &= E \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{n-j} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{n+h-k} \right) \right] \\ &\quad \text{por ser } \{\varepsilon_n\} \text{ incorreladas} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} a^j a^{h+j} = a^h \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} \\ &= a^h \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1-a^2} \end{aligned}$$

es estacionario y la función de autocorrelación resulta ser:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = a^h \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

3. **Proceso media móvil de orden m: MA (m)** A partir de $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, sucesión de variables aleatorias incorreladas de media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$ y de las constantes arbitrarias $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ se construye el proceso media móvil de orden m :

$$X_n = a_1 \xi_n + a_2 \xi_{n-1} + \dots + a_m \xi_{n-(m-1)}$$

Con $E[X_n] = \mu; \sum_{i=1}^m a_i$, y $\text{Var}[X_n] = \sigma^2 \sum_{i=1}^m a_i^2$

Veamos que el proceso es estacionario en covarianza, sin pérdida de generalidad, lo demostraremos para el proceso centrado construido a partir de las variables centradas $\tilde{\xi}_i = \xi_i - \mu$.

$$\tilde{X}_n = X_n - \mu \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m a_i \tilde{\xi}_{n-(i-1)}$$

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{cov}(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n+h}) \\ &= E \left[\left(\sum_{j=1}^m \tilde{\xi}_{n-(j-1)} a_j \right) \left(\sum_{i=1}^m \tilde{\xi}_{n+h-(i-1)} a_i \right) \right] \\ &= \begin{cases} \sigma^2(a_1 a_{1+h} + a_2 a_{2+h} + \dots + a_m a_{m+h}) = \sigma^2 \sum_{j=1}^m a_j \cdot a_{j+h} & \text{si } h \leq m-1 \\ 0 & \text{si } h \geq m \end{cases} \end{aligned}$$

en todo caso la autocovarianza sólo depende de h .

Ejercicio: Demostrar que todo proceso de Incrementos Independientes centrado es estacionario en covarianza.

4. **Polinomios Trigonométricos** A partir de las variables aleatorias A, B incorreladas con media 0 y varianza 1, se considera la expresión trigonométrica del movimiento oscilatorio con amplitudes aleatorias:

$$X_n = A \cos(\lambda n) + B \sin(\lambda n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

con λ fijo, y además $\lambda \in [0, \pi]$. Entonces $E[X_n] = 0$

Dado que $E[AB] = 0$, la función de autocovarianza verifica:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= c(X_n, X_{n+h}) = E[X_n \cdot X_{n+h}] \\ &= E[A^2 \cos(\lambda n) \cdot \cos(\lambda(n+h)) + B^2 \sin(\lambda n) \cdot \sin(\lambda(n+h))] \\ &= \cos(\lambda n) \cdot \cos(\lambda(n+h)) + \sin(\lambda n) \cdot \sin(\lambda(n+h)) \\ &= \cos((\lambda n) - \lambda(n+h)) = \cos(-\lambda h) \\ &= \cos(\lambda h) < \infty \end{aligned}$$

Si $A, B \sim N(0, 1)$ entonces $\{X_n\}$ es además un proceso fuertemente estacionario.

Proposición Sean A_0, A_1, \dots, A_m y B_0, B_1, \dots, B_m variables aleatorias incorreladas con media cero y varianza de A_i y de B_i común e igual a σ_i^2 , verificando $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \dots + \sigma_m^2$, y sean w_0, w_1, \dots, w_m frecuencias en $[0, \pi]$, entonces el proceso

$$X_n = \sum_{k=0}^m (A_k \cos(nw_k) + B_k \sin(nw_k)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Es estacionario en covarianza.

Demostración

Por ser incorreladas $\{A_k\}$ y $\{B_k\}$ se verifica $E[A_i B_j] = 0$, $E[A_i A_j] = E[B_i B_j] = 0$ para $j \neq i$. Entonces

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E[X_n \cdot X_{n+h}] \\ &= E \left[\left(\sum_{k=0}^m (A_k \cos n w_k + B_k \sin n w_k) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m A_j \cos(n+h) w_j + B_j \sin(n+h) w_j \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 \cos h w_k\end{aligned}$$

Más aún, si introducimos el vector de probabilidad $\{p_k\}_{k=1 \dots m}$ definido por $p_k = \frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{k=1}^m p_k \cos(h w_k), \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

y p_k se puede interpretar como la contribución de frecuencia w_k a la covarianza; generalizando la frecuencia a todos los valores continuos contenidos en $[0, \pi]$ y considerando la función de distribución sobre w , $F(w)$:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \int_0^\pi \cos(hw) \, dF(w)$$

esta extensión, en general, es posible a procesos estacionarios en covarianza.

Caso particular: $w \sim U(0, \pi)$, entonces:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(hw) \, dw = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

lo cual reduce el proceso a una sucesión de variables aleatorias incorreladas e idénticamente distribuidas con varianza σ^2 y centradas (ver ejemplo 1, Ruido Blanco).

10. Representación espectral de la función de covarianza

Sin pérdida de generalidad puede reescalarse el proceso estacionario en covarianza para conseguir varianza uno, con lo cual

$$\rho(h) = \gamma(h) = c(X_n, X_{n+h}) \quad h \in \mathbb{Z}$$

Definición: Una función a valores reales $f(x)$, con $x \in \mathbb{Z}$ se llama semidefinida positiva si para todos $k = 1, 2, \dots$ y para todos $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \alpha_j f(i-j) \geq 0$$

Teorema (Caracterización de la función de autocovarianza) Sea $\gamma(h)$, con $h \in \mathbb{Z}$ entonces los siguientes apartados son equivalentes

1. $\gamma(h)$ es la función de covarianza de un proceso estacionario en covarianza, a valores reales con media cero y varianza uno.

2. $\gamma(0) = 1$, $\gamma(h) = \gamma(-h) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$ y $\gamma(h)$ es semidefinida positiva.

3. Existe una distribución de probabilidad simétrica sobre $[-\pi, \pi]$, sea F tal que:

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) \, dF(w) \quad h = 0, 1, \dots$$

Demostración

$$1 \Rightarrow 2]$$

Si $\{X_n\}$ tiene media cero y varianza uno entonces

$$\gamma(0) = E[X_n^2] = 1 \quad \wedge \quad \gamma(h) = E[X_n X_{n+h}] = E[X_{n+h} X_n] = \gamma(-h)$$

Para ver que $\gamma(h)$ es semidefinida positiva, sea $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dados, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq E \left[\left| \sum_{i=1}^k \alpha_i X_{n+i} \right|^2 \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i X_{n+i} \right) \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j X_{n+j} \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \alpha_j X_{n+i} X_{n+j} \right] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \alpha_j \gamma(i-j) \end{aligned}$$

entonces queda demostrada la primera implicación ($1 \Rightarrow 2$).

$$2 \Rightarrow 1$$

Sea $\gamma(h)$ una función que verifica las propiedades del primer apartado y sea $a_{ij} = \gamma(i-j)$, entonces para $k = 1, 2, \dots$, la matriz $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1..k}$ es simétrica y semidefinida positiva, entonces para cada k la matriz A obtenida representa la matriz de covarianzas de una variable aleatoria k -normal centrada. Este procedimiento describe consistentemente la distribución de cualquier conjunto finito de variables del proceso $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Se demuestra que la función de covarianza de este proceso es la $\gamma(h)$ de partida, se prueba así que para cualquier función que verifica las propiedades del segundo apartado, existe al menos un proceso estacionario en covarianza que tiene precisamente esa función como autocovarianza.

$$3 \Rightarrow 2$$

Sea $\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) \, dF(w) = E[\cos(hw)]$, siendo w , una variable aleatoria simétrica con función de distribución F , en el intervalo $[-\pi, \pi]$, se verifica que $\gamma(0) = 1$, ya que $\cos hw = \cos(-hw)$, entonces $\gamma(h) = \gamma(-h)$. Veamos que $\gamma(h)$ es semidefinida positiva

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \alpha_j \gamma(i-j) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \alpha_j E[\cos(i-j)w] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \alpha_j \cos(iw - jw) \right] \\ &= E \left[\left| \sum_{i=1}^k \alpha_i \cos(iw) \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i \sin(iw) \right|^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

luego 3 \Rightarrow 2.

2 \Rightarrow 3

A partir de la definición de $\gamma(h)$ semidefinida positiva, con $\alpha_j = \cos(jw)$ se tiene que:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) \cos(iw) \cos(jw)$$

con n fijo, análogamente con $\alpha_i = \sin(iw)$ se tiene que:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) \sin(iw) \sin(jw)$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2\pi n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) \cos(i-j)w \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{h=-n+1}^{n-1} (n-|h|)\gamma(h) \cos(hw) \end{aligned}$$

Definiendo

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{h=-n+1}^{n-1} (n-|h|)\gamma(h) \cos(hw) \quad ; \quad -\pi \leq w \leq \pi$$

entonces $f_n(w) \geq 0$ y además

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(w)dw &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{h=-n+1}^{n-1} (n-|h|) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw)dw \right) \cdot \gamma(h) \\ &= \frac{1}{2\pi n} n \cdot 2\pi \gamma(0) = 1 \end{aligned}$$

luego $f_n(w)$ es función de densidad $\forall n \in [-\pi, \pi]$ y además es simétrica ya que

$$f_n(w) = f_n(-w) \quad \forall w \in [-\pi, \pi]$$

Veamos finalmente la caracterización de $\gamma(h)$, sea F_n la función de distribución correspondiente a la función de densidad f_n , entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) dF_n(w) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) f_n(w) dw \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) \left(\frac{1}{2\pi n} \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|) \cos(kw) \gamma(k) \right) dw \\ &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) \cos(kw) dw \right) \gamma(k) \\ &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) \delta_{hk} \gamma(h) = \left(1 - \frac{|h|}{n} \right) \gamma(h) \end{aligned}$$

Aplicando el lema de Helly-Bray a la familia de funciones de distribución F_n considerada, existe una subfamilia F_{n_k} que converge a una cierta función de distribución F , esto es para toda función acotada $a(h)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} a(w) dF_{n_k}(w) = \int_{-\pi}^{\pi} a(w) dF(w)$$

siendo $a(h) = \cos(hw)$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) dF(w) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) dF_{n_k}(w) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|h|}{n_k} \right) \gamma(h) = \gamma(h) \quad \forall h \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba del teorema.

De acuerdo con el resultado 3 obtenido, la función de covarianza de un proceso estacionario en covarianza $\gamma(h)$ se determina mediante la transformada coseno de Fourier-Stieltjes de la función de distribución espectral $F(w)$. Si $F(w)$ es diferenciable, con función de densidad espectral:

$$F(w) = \frac{dF(w)}{dw} - \pi w \pi$$

Entonces

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hw) f(w) dw$$

11. Apéndice: Función Generatriz

Definida para variables aleatorias con valores en $\mathbb{N} (\equiv \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = E[s^X] \quad X \in \mathbb{N}$$

siendo: $p_k = Prob\{X = k\}$

Observación: $G(s)$ está definida para $|s| \leq 1$ y es infinitamente diferenciable para $|s| < 1$ ya que $p_k \geq 0 \quad \forall k$ y $\sum p_k = 1$.

Propiedades

1. $G(s)$ determina unívocamente la Función de Distribución (Ley de Levy)
2. Si $\{X_i\}_{1 \dots n}$ son variables aleatorias independientes con valores en N , se verifica

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i}(s) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(s)$$

Demostración:

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i}(s) = E \left[\sum_{s^1}^n X_i \right] = E [s^{X_1} \dots s^{X_n}] = \prod_{i=1}^n E [s^{X_i}] = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(s)$$

3. Los momentos de la variable aleatoria X se obtienen por diferenciación sucesiva de $G_X(s)$

$$\begin{aligned} G_X^{(r+1)}(1) &= E[X(X-1)\dots(X-r)] \\ E[X] &= G'_x(1) \\ E[X^2] &= G''_x(1) + G'_x(1) \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcular la esperanza matemática y la varianza de una SUMA ALEATORIA de variables aleatorias independientes, enteras no negativas.

Sean N, X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes con valores en \mathbb{N} , siendo $\{X_i\}$ variables aleatorias igualmente distribuidas y sea $Z = X_1 + \dots + X_N$ la variable aleatoria suma con un número aleatorio de términos.

Sean $G_N(s)$ y $G(s)$ respectivamente funciones generatrices de N y X_i .

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= E[s^Z] = E\left[s^{\sum^N X_i}\right] = E\left\{E\left[s^{\sum^N X_i}/N\right]\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[S^{X_1+\dots+X_n}/N = n\right] \cdot \text{Prob}\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[S^{X_1+\dots+X_n}/N = n\right] \cdot \text{Prob}\{N = n\} \\ &\quad (\text{por la independencia de } x_i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G(s)^n \cdot \text{Prob}\{N = n\} = E\left[G(s)^N\right] = G_N(G(s)) \end{aligned}$$

Entonces: (por la Regla de la cadena)

$$G'_Z(s) = G'_N(G(s)) \cdot G'(s) \qquad G''_Z(s) = G''_N(G(s)) \cdot (G'^2 + G'_N(G(s)) \cdot G''(s))$$

para $s = 1$

$$G'_Z(1) = E[Z] = E[N] \cdot E[X] \qquad G''_Z(1) = G''_N(1) \cdot (E[X])^2 + E[N] \cdot G''(1)$$

Observación. Si las v.a. X_i son NO DISCRETAS, entonces $\phi_Z(S) = G_N(\phi(s))$ siendo ϕ la función característica.

Ejemplo Si N es una variable aleatoria geométrica de parámetro (p) , su función generatriz es

$$G_z^{(s)} = \frac{pG_x(s)}{1 - (1-p)G_x(s)}$$

Ejemplo: El número de usuarios que se conectan a un servidor en un cierto período de tiempo sigue una distribución de Poisson (λ); cada conexión utiliza con probabilidad (p) una cierta aplicación. Hallar la distribución y los momentos del “número de utilizaciones de la aplicación” en este período.

Solución

Sean:

$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (número de usuarios)

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ (utilización de la aplicación)

Las respectivas funciones generatrices son:

$$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)} \quad y \quad G_X(s) = ps + q$$

Definimos $Z = X_1 + \dots + X_N$, entonces:

$$G_Z(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(ps+q-1)} = e^{\lambda p(s-1)}$$

se concluye que $Z \sim \text{Poisson}(\lambda p)$, con:

$$E[Z] = E[N].E[X] = \lambda.p \quad y \quad Var[Z] = \lambda.p^2 + \lambda.p.q$$