# MOVIMIENTO BROWNIANO
Rosario Romera
Febrero 2009

## 1. Historia

En 1827, el botánico Robert Brown (1773-1858) observó, a través del microscopio que pequeñísimas partículas, originadas a partir de granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento vigoroso, irregular e incesante, como si fueran pequeños seres vivientes. El propio Brown descubrió que partículas muy finas de varios minerales, seguían el mismo movimiento.

En 1900, L.Bachelier introduce un modelo del movimiento Browniano para modelar las fluctuaciones de la bolsa de París.

La primera explicación científica de este fenómeno la realizó Albert Einstein en 1905, sentando las bases teóricas y experimentales de la teoría atómica de la materia e influye en el desarrollo de la teoría de los Procesos Estocásticos desde la Termodinámica, obviando los complicados caminos en zig-zag de las partículas.

Norbert Wiener (1894-1964) en sus trabajos entre 1920 y 1923 logra dar un modelo preciso y riguroso para las trayectorias de las partículas, siendo una función continua pero no diferenciable en ningún punto, como la presentada por Weiertrass en los albores del Análisis Matemático, desarrolla una medida de probabilidad para conjuntos de trayectorias no diferenciables, asociando una probabilidad a cada conjunto de trayectorias.

Otros desarrollos posteriores:

1. Paul P. Lévy (1886-1971) en trabajos desarrollados en 1939 y 1948: estudio de los “ceros"del movimiento browniano, “ley arco seno".

2. Itô (1944): definición de la integral estocástica.

3. Hunt (1956): propiedad de Markov fuerte para el movimiento browniano.

4. Donsker (1951), Prohorov (1956): convergencia de los paseos aleatorios hacia el movimiento browniano, aplicaciones estadísticas, comienzo de la teoría de los procesos empíricos.

5. Doob (1953), Girsanov (1960): resultados sobre la integración estocástica.

6. Samuelson (1965): “redescubrimientoz actualización de las ideas de Bachelier (1900) sobre las aplicaciones en Economía.

7. Kunita y Watanabe (1967): generalización de la integral estocástica.

# 2. Nociones básicas

**Definición**

El proceso estocástico $\{B_t\}_{t\geq 0}$, es un Movimiento Browniano o Proceso de Wiener en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si cumple que:

1. $B_0 = 0$

2. Para cualquier conjunto de instantes de tiempo $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, se tiene que $B_{t_1}; B_{t_2} - B_{t_1}; ...; B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes.

3. Si $s < t$, entonces la variable aleatoria $B_t - B_s$ tiene una distribución $\mathcal{N}(0; \sqrt{t-s})$

4. Las trayectorias del proceso son funciones contínuas , $t \to B_t$.

**Interpretación Intuitiva**

La variable aleatoria $B_t$ se puede pensar como el vector de posición de una partícula respecto a un eje en cada instante $t \geq 0$.

**Proposición**

Las distribuciones conjuntas de un Movimiento Browniano son distribuciones normales multivariantes, cualesquiera que sean $(t_1; t_2; ...; t_n)$:

$$(B_{t_1}; B_{t_2}; ...; B_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

**Demostración**

El Movimiento Browniano es un caso particular de los procesos Gaussianos. Sean los vectores $t = (t_1, ..., t_n)$ y $u = (u_1, ..., u_n)$, y sea $\phi_t$ la función característica de $(B_{t_1}; B_{t_2}; ...; B_{t_n})$:

$$\begin{aligned}
\phi_t(u) &= E\left[\exp\left(i < u, (B_{t_1}; B_{t_2}; ...; B_{t_n}) >\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(iu_1 B_{t_1} + ... + iu_n B_{t_n}\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(iu_1 \Delta_1 + ... + iu_n(\Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n)\right)\right]
\end{aligned}$$

donde $\Delta_j = B(t_j) - B(t_{j-1})$ y $t_0 = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\phi_t(u) &= E\left[\exp\left(i\Delta_1(u_1 + u_2 + ... + u_n) + i\Delta_2(u_2 + u_3 + ... + u_n) + ... + iu_n\Delta_n\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(i\Delta_1(u_1 + u_2 + ... + u_n)\right)\right] E\left[\exp\left(i\Delta_2(u_2 + u_3 + ... + u_n)\right)\right] ...E\left[\exp\left(iu_n\Delta_n\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(u_j + ... + u_n)^2(t_j - t_{j-1})\right)
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la función característica de una distribución normal $\mathcal{N}(0,1)$ es

$$\phi(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)$$

hemos obtenido que $\phi_t$ es una función característica de una normal multivariante. $\square$

**Observaciones**

1. El Movimiento Browniano es un proceso gaussiano. La media y la autocovarianza del Movimiento Browniano vienen dadas por

$$E[B_t] = 0$$

$$cov(B_s, B_t) = E[B_s B_t] = E[B_s(B_t - B_s + B_s)] = E[B_{(t)}(B_t - B_s)] + E[B_s^2] = s = \min(s,t), si\ s \leqslant t.$$

2. Mediante el teorema de extensión de Kolmogorov, puede demostrarse que existe un proceso estocástico que cumple la condición anterior, esto es fijadas las distribuciones finito-dimensionales, si resultan compatibles en distribución, como es el caso del Movimiento Browniano, se puede construir un proceso estocástico con trayectorias continuas que corresponde al Movimiento Browniano.

3. El Movimiento Browniano$\{B_t\}_{t\geq 0}$ es proceso martingala, asi como el proceso transformado $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$.

# 3. Procesos construidos a partir del Movimiento Browniano

**Puente Browniano**

El proceso $\{B_t^0\}_{t\geq 0}$ es un Puente Browniano si cumple alguna de las tres siguientes condiciones

1. $\{B_t^0\}_{t\geq 0}$ es un Proceso Estocástico con trayectorias continuas, es decir, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, la función $t \to B^0(t;\omega)$ es una función continua, tal que:

   $$B_t^0 = B_t - tB_1$$

   donde $B(t)$ denota el Movimiento Browniano.

   Obsérvese que para $t = 0$, se tiene que $B_0^0 = 0$ por definición de Movimiento Browniano y que para $t = 1$, se tiene que $B^0(1) = 0$ por lo que se dice que el Puente Browniano está "tied down".

2. Las distribuciones finito-dimensionales de $\{B_t^0\}_{t\geq 0}$ satisfacen que:

   $$\left(B_{t_1}^0; B_{t_2}^0; ...; B_{t_k}^0\right) = (B_{t_1}; B_{t_2}; ...; B_{t_k}/B_1 =)0)$$

3. $\{B_t^0\}_{t\geq 0}$ es un Proceso Gaussiano con trayectorias en $\mathcal{C}[0;1]$, tal que:

$$E[B_t^0] = 0 \qquad \wedge \qquad cov\left(B_s^0, B_t^0\right) = s(1-t) \qquad \forall s \leq t$$

**Movimiento Browniano con deriva ( o Movimiento Browniano Aritmético)**
Se define como

$$X_t = \sigma B_t + \mu t, t \geqslant 0$$

siendo $\sigma > 0$ (volatilidad) y $\mu \in R$ (deriva) constantes. La distribución marginal de este proceso es una normal con

$$E[B_t] = \mu t,$$

$$cov(B_s, B_t) = \sigma^2 \min(s,t), si\ s \leqslant t.$$

Una simulación de este proceso se muestra a continuación.
**Movimiento Browniano Geométrico**
Se trata del proceso estocástico que resuelve el modelo de precios de activos financieras propuesto por Black, Scholes y Merton . Se define como

$$X_t = \exp(\sigma B_t + \mu t), t \geqslant 0$$

siendo $\sigma > 0$ (volatilidad) y $\mu \in R$ (deriva) constantes. A continuación se muestra una simulación de este proceso.
**Movimiento Browniano con reversión a la media ( o de Ornstein-Uhlenbeck)**

Se define como

$$Z_t = e^{-t} B_{e^{2t}}, t \geqslant 0$$

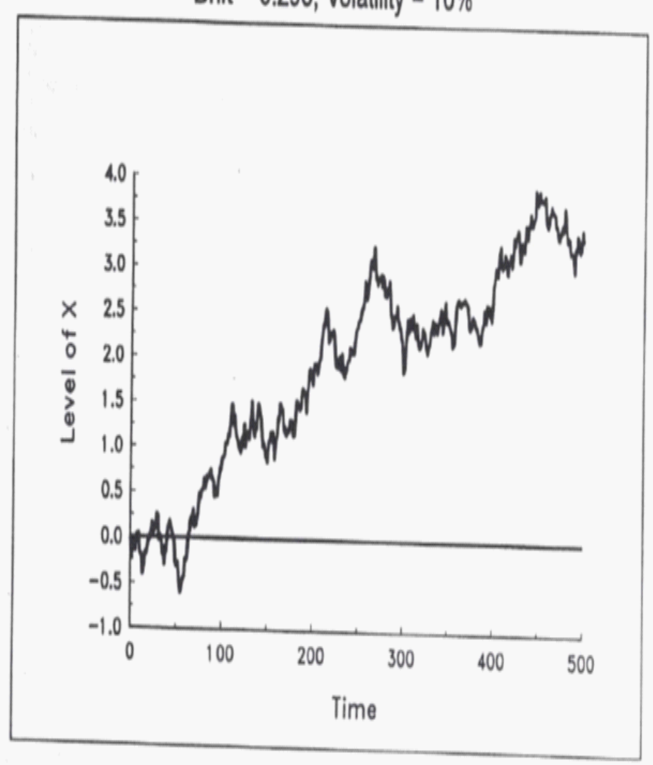
Se puede demostrar que la distribución marginal de este proceso es una $N(0,1)$, y su autocovarianza viene dada por

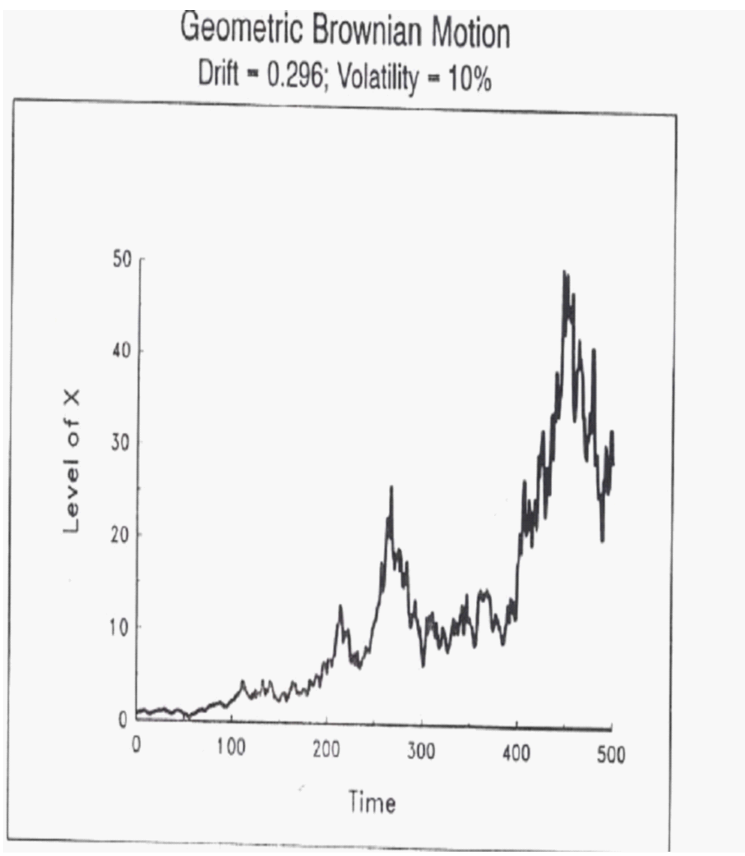
$$cov(B_s, B_{s+t}) = e^{-t}, si\ s \leqslant t.$$

A continuación se muestra una simulación de este proceso.

Arithmetic Brownian Motion

Drift = 0.296; Volatility = 10%




Geometric Brownian Motion
Drift = 0.296; Volatility = 10%
Level of X
50
40
30
20
10
0
0
100
200
300
400
500
Time

Mean–Reverting Square Root Process

Kappa = 0.1; Volatility = 10%; Mean = 2