Fundamentos de Ingeniería Eléctrica
Tema 4: Sistemas trifásicos

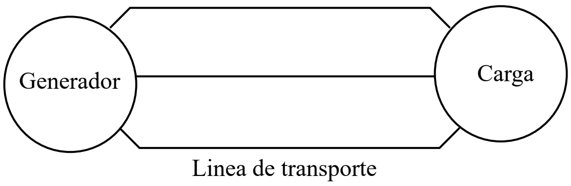
Belén García
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Este tema introduce algunos conceptos básicos sobre los sistemas trifásicos equilibrados. En primer lugar se definen las propiedades de este tipo de configuraciones y se justifica su aplicación a los sistemas de potencia. Se introducirá el equivalente fase neutro y se aplicará al análisis de las corrientes y las tensiones de sistemas trifásicos en estrella y en triángulo. Finalmente, se introducen algunos conceptos relacionados con la potencia en sistemas trifásicos.

1. Configuración los de sistemas trifásicos

En los sistemas eléctricos se transfieren grandes cantidades de energía desde los generadores hacia las cargas. Como se ha explicado en apartados anteriores, el diseño de los sistemas eléctricos está concebido para minimizar las pérdidas de potencia en las líneas, utilizando para ello transformadores de potencia y distribución. Los transformadores permiten el transporte de energía a niveles de tensión elevados para aumentar el rendimiento y reducir las pérdidas.

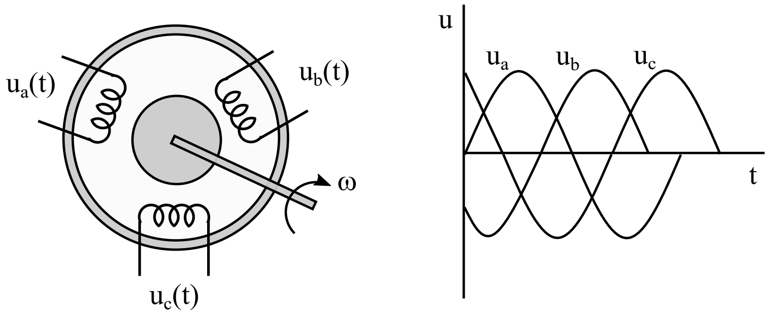
Los sistemas de potencia se construyen normalmente con una configuración trifásica como la que se muestra en la siguiente figura:



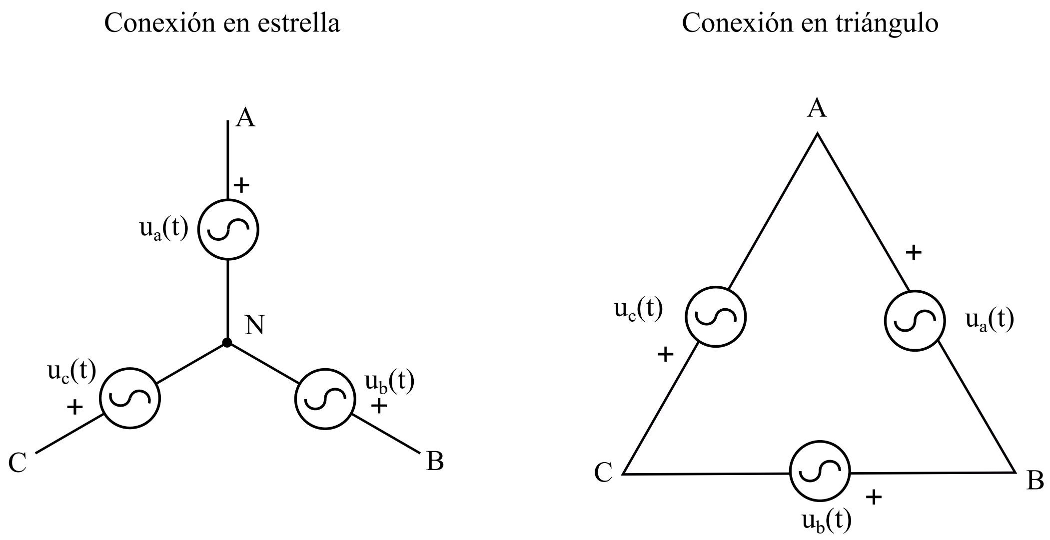
1.1. Generadores trfásicos

Los generadores en las centrales eléctricas suelen ser trifásicos. Este tipo de máquinas rotativas son más robustas que las monofásicas desde el punto de vista mecánico, tienen un menor coste y requieren menor espacio para generaran la misma cantidad de energía.

Los generadores trifásicos incorporan tres circuitos eléctricos mediante los cuales se genera un sistema trifásico de tensiones, es decir tres tensiones sinusoidales de la misma frecuencia y amplitud y con desfase relativo de 120 ^{o} entre fases.



En análisis de circuitos, los generadores trifásicos se suelen representar como tres fuentes de tensión conectadas entre sí. Como se explicará a lo largo de este tema, la conexión entre fases se puede realizar en estrella o triángulo. Las fases de un generador están **conectadas en estrella** si tres terminales, una de cada fase, comparten un punto común, que se llama **punto neutro**, mientras que los otras tres terminales están conectadas al sistema. Alternativamente, un generador está **conectado en triángulo**, cuando cada fuente está conectada por sus dos terminales a las otras dos fuentes formando un triángulo, como se muestra en el siguiente diagrama:



Este tema abordará únicamente el análisis de **sistemas trifásicos equilibrados**, que son aquellos en los que las tensiones y las corrientes de las tres fases tienen la misma amplitud.

Un sistema trifásico equilibrado de tensiones está compuesto de tres tensiones sinusoidales de la misma amplitud y desfase relativo 120^o:

$$u_a(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t) \tag{1}$$

$$u_b(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t - 120^o) \tag{2}$$

$$u_c(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + 120^o) \tag{3}$$

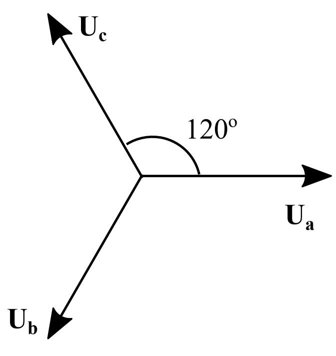
Los fasores que representan este tipo de sistemas son:

$$\underline{\mathbf{U}_a} = U\angle 0^o \tag{4}$$

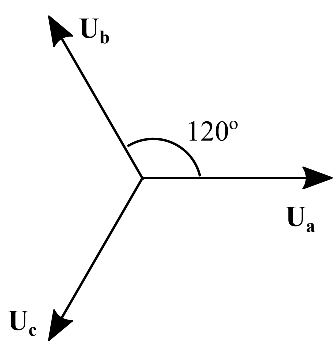
$$\underline{\mathbf{U}_b} = U\angle{-120^o} \tag{5}$$

$$\underline{\mathbf{U}_c} = U\angle 120^o \tag{6}$$

Si el desfase relativo entre los tensiones es el que se muestra en las ecuaciones anteriores (u_a adelantado respecto a u_b y retrasado respecto a u_c) decimos que el sistema tiene **secuencia directa**. En algunos casos, la secuencia de las fases cambia y la tensión de la fase b se adelanta a la de la fase a; este tipo de sistemas tienen una **secuencia inversa**. Lo más habitual será encontrar sistemas de secuencia directa.



Secuencia directa



Secuencia inversa

Es importante notar que la suma de tres funciones sinusoidales de la misma amplitud y desfase relativo 120^o es cero:

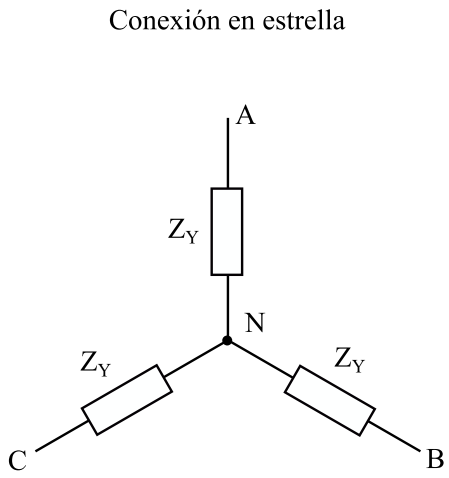
$$u_a + u_b + u_c = 0 \tag{7}$$

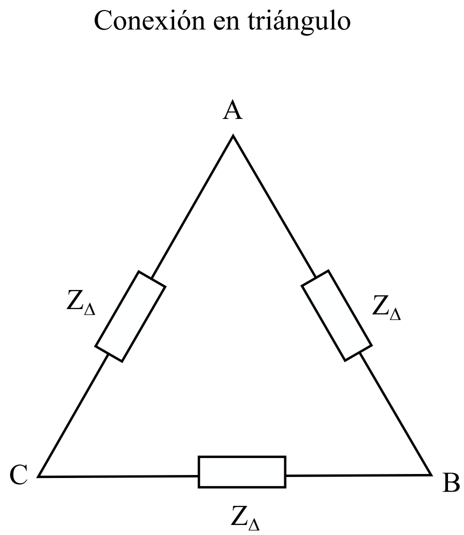
Esa afirmación también es válida para los fasores asociados a las funciones sinusoidales:

$$\underline{\mathbf{U}_a} + \underline{\mathbf{U}_b} + \underline{\mathbf{U}_c} = 0 \tag{8}$$

1.2. Cargas trifásicas

Las cargas trifásicas se pueden representar, en el dominio de la frecuencia, como tres impedancias conectadas entre sí. En este curso únicamente analizaremos en los que la impedancia conectada en cada fase tenga el mismo valor; esta es la situación más común en los sistemas eléctricos. Igual que ocurría con los generadores, las cargas trifásicas se pueden conectar en estrella o triángulo:

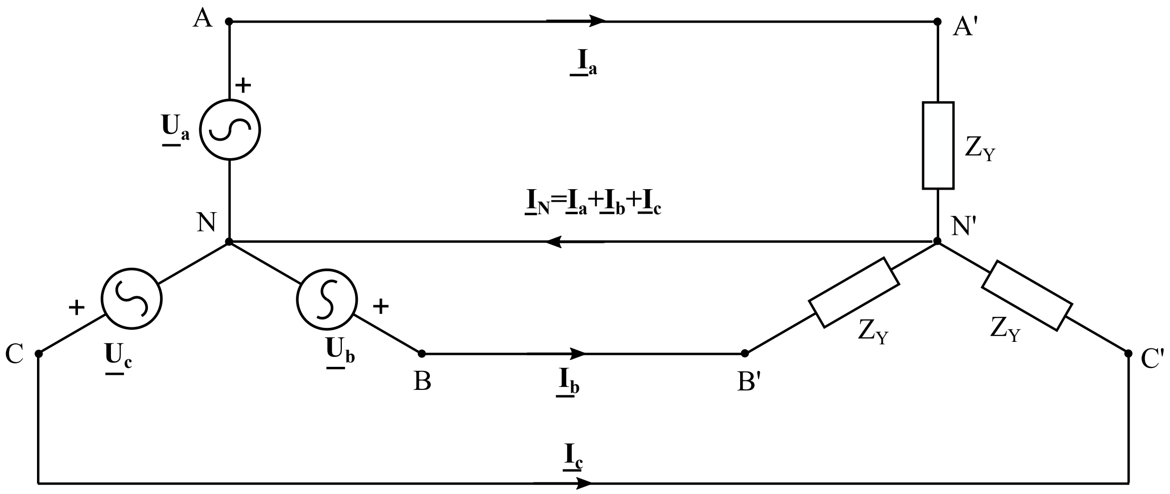




1.3. Sistemas trifásicos equilibrados

En este curso vamos a aprender a analizar sistemas trifásicos equilibrados, en los que la amplitud de las tensiones y la impedancia de las carga en las tres fases es la misma.

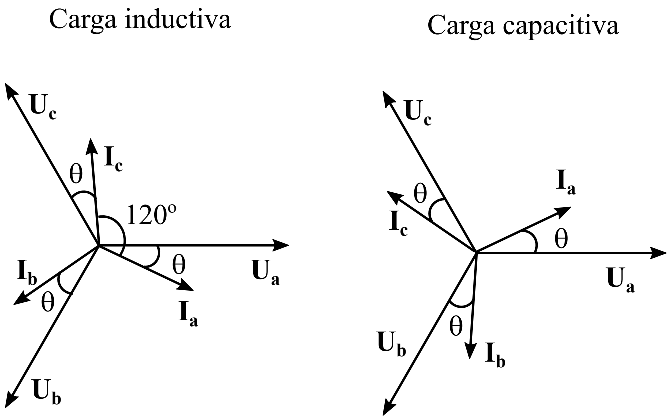
La siguiente figura representa un sistema trifásico estrella-estrella. Las tres impedancias y los tres generadores comparten un terminal, mientras que el otro terminal está conectado al sistema. En los sistemas estrella estrella los puntos neutros de los generadores (N) y las cargas (N') pueden estar conectados por medio de un **cable de neutro** formando un sistema de cuatro hilos. En este caso, la corriente de cada fase fluye desde el generador hacia la carga (es decir, en la fase A la carga fluye de A a A') y regresa a través del cable neutro. La cable por el neutro sería la suma de las corrientes $\underline{\mathbf{I}_a}$, $\underline{\mathbf{I}_b}$ y $\underline{\mathbf{I}_c}$



Es fácil ver que en el circuito de la figura, las corrientes que circulan por las tres fases son:

$$\underline{\mathbf{I}}_a = \frac{\underline{\mathbf{U}}_a}{Z_Y} = \frac{U\angle 0}{Z_Y} \qquad \underline{\mathbf{I}}_b = \frac{\underline{\mathbf{U}}_b}{Z_Y} = \frac{U\angle{-120^o}}{Z_Y} \qquad \underline{\mathbf{I}}_c = \frac{\underline{\mathbf{U}}_c}{Z_Y} = \frac{U\angle 120^o}{Z_Y} \tag{9}$$

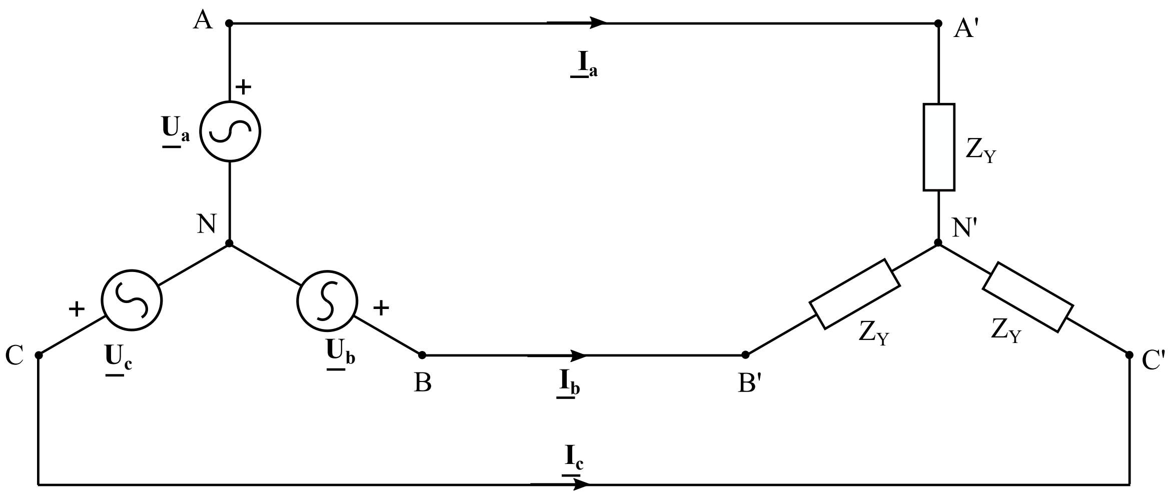
Se puede observar que las corrientes de las tres fases también forman un sistema trifásico equilibrado de corrientes (tres corrientes del mismo módulo y con desfase relativo 120^o. Si las impedancia de cada fase es $Z_Y = |Z_Y|\angle\theta$, el diagrama fasorial del sistema para cargas inductivas y para cargas capacitivas sería:



La corriente que fluye a través del neutro es la suma de $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ y $\mathbf{I}_c$; sin embargo, como las tres corrientes forman un sistema trifásico equilibrado (es decir, tienen la misma magnitud y un desfase relativo de 120 ^{o}), la corriente que circula por el neutro es cero:

$$\underline{\mathbf{I}}_N = \underline{\mathbf{I}}_a + \underline{\mathbf{I}}_b + \underline{\mathbf{I}}_c = \frac{U}{Z_Y} \cdot (1\angle 0 + 1\angle - 120^o + 1\angle 120^o) = 0 \tag{10}$$

Desde un punto de vista práctico, el hecho de que no circule corriente por el neutro implica que este conductor se suprima en muchos casos, pasando a un sistema de tres hilos como el que se muestra en la siguiente figura. La supresión del hilo neutro implica una reducción significativa de los costes de construcción y gestión del sistema (inversión en materiales, construcción de infraestructura, costes de mantenimiento...):

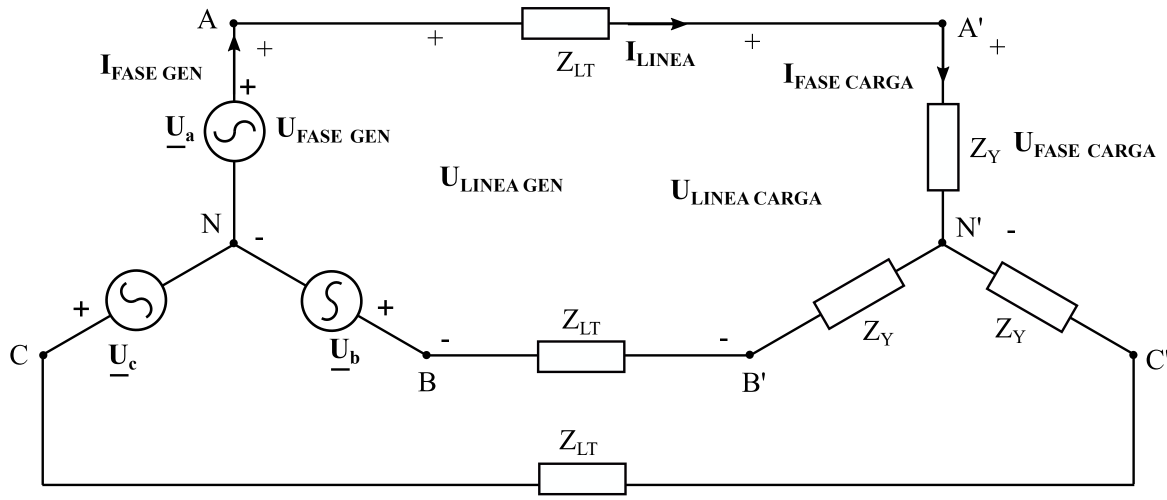


2. Tensiones y corrientes en sistemas trifásicos

2.1. Nomenclatura: magnitudes de fase y de línea

Antes de introducir la metodología que se aplicará al análisis de sistemas trifásicos, es necesario definir la nomenclatura que se va a emplear:

- **Tensión de fase**: Caída de tensión en una sola fase del generador o la carga. La tensión de fase del generador ($U_{\text{FASE GEN}}$ en la figura) es la caída de tensión entre los terminales de una de las fuentes de tensión ideales; la tensión de fase de la carga ($U_{\text{FASE CARGA}}$ en la figura) es la caída de tensión a través de una de las impedancias que constituye la carga.
- **Tensión de línea**: Caída de tensión entre cualquier par de líneas. Podríamos obtener la tensión de línea en el lado del generador ($U_{\text{LINEA GEN}}$ en la figura), o el tensión de línea en el lado de la carga ($U_{\text{LINEA CARGA}}$).
- **Corriente de fase**: Corriente en una sola fase, es decir, corriente que fluye a través de una de las fuentes ideales o a través de una de las impedancias ($I_{\text{FASE GEN}}$, $I_{\text{FASE CARGA}}$).
- **Corriente de línea**: Corriente en una línea del sistema (I_{LINEA} en la figura).



2.2. Relación entre las magnitudes de línea y fase en un sistema estrella-estrella

El sistema de la figura anterior representa un generador trifásico conectado en estrella que suministra energía a una carga trifásica conectada en estrella.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff (1LK) a los diferentes nudos del circuito se puede observar que para las tres fases:

$$\underline{\mathbf{I}}_L = \underline{\mathbf{I}}_F \tag{11}$$

En cuanto a la tensión de fase y la tensión de línea en el lado del generador:

$$\underline{\mathbf{U}}_{Fa} = \underline{\mathbf{U}}_a \qquad \underline{\mathbf{U}}_{Fb} = \underline{\mathbf{U}}_b \qquad \underline{\mathbf{U}}_{Fc} = \underline{\mathbf{U}}_c \tag{12}$$

Y las tensiones de línea son:

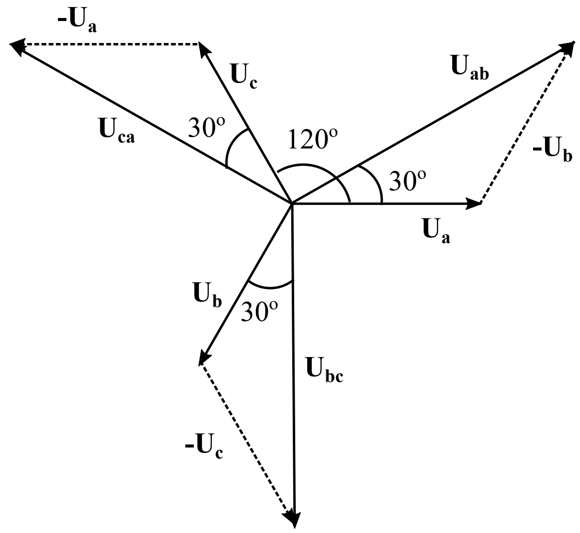
$$\underline{\mathbf{U}}_{La} = \underline{\mathbf{U}}_{AB} = \underline{\mathbf{U}}_a - \underline{\mathbf{U}}_b = U\angle 0 - U\angle{-120^o} = \sqrt{3}\cdot U\angle 30^o = \sqrt{3}\cdot \underline{\mathbf{U}}_{Fa}\angle 30^o \tag{13}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{Lb} = \underline{\mathbf{U}}_{BC} = \underline{\mathbf{U}}_b - \underline{\mathbf{U}}_c = \sqrt{3}\cdot \underline{\mathbf{U}}_{Fb}\angle 30^o \tag{14}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{Lc} = \underline{\mathbf{U}}_{CA} = \underline{\mathbf{U}}_c - \underline{\mathbf{U}}_a = \sqrt{3}\cdot \underline{\mathbf{U}}_{Fc}\angle 30^o \tag{15}$$

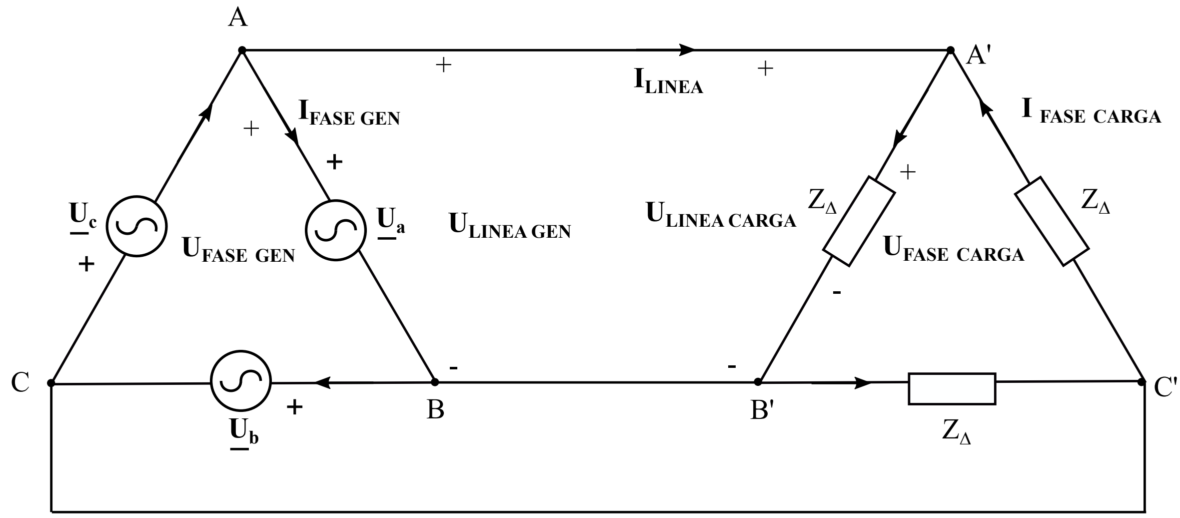
Si la carga está conectada en estrella se verifican las mismas relaciones entre las magnitudes de línea y fase en el lado de la carga.

También se puede obtener la relación entre las tensiones de fase y de línea mediante el diagrama fasorial:



2.3. Relación entre las magnitudes de línea y fase en un sistema triángulo-triángulo

Si ahora consideramos un sistema triángulo-triángulo [1] y determinamos sus tensiones y corrientes de fase y línea:



Vemos que en este caso las tensiones de fase y de línea de cada fase son las mismas.

$$\underline{\mathbf{U}}_L = \underline{\mathbf{U}}_F \tag{16}$$

Las corrientes de fase en la carga serían:

$$\underline{\mathbf{I}}_{Fa} = \underline{\mathbf{I}}_{B'C'} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_a}{Z_\Delta} = \frac{U\angle 0}{Z_\Delta} \tag{17}$$

[1]Para simplificar el análisis consideraremos que la impedancia de la línea de transporte es cero

$$\underline{\mathbf{I}}_{Fb} = \underline{\mathbf{I}}_{A'B'} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_b}{Z_\Delta} = \frac{U\angle{-120^o}}{Z_\Delta} \tag{18}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{Fc} = \underline{\mathbf{I}}_{C'A'} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_c}{Z_\Delta} = \frac{U\angle 120^o}{Z_\Delta} \tag{19}$$

Y la corriente de línea se puede obtener usando la 1LK:

$$\underline{\mathbf{I}}_{La} = \underline{\mathbf{I}}_{Fa} - \underline{\mathbf{I}}_{Fb} = \frac{U\angle 0}{Z_\Delta} - \frac{U\angle{-120^o}}{Z_\Delta} = \sqrt{3}\cdot\frac{U}{Z_\Delta}\angle{-30^o} = \sqrt{3}\cdot\underline{\mathbf{I}}_{Fa}\angle{-30^o} \tag{20}$$

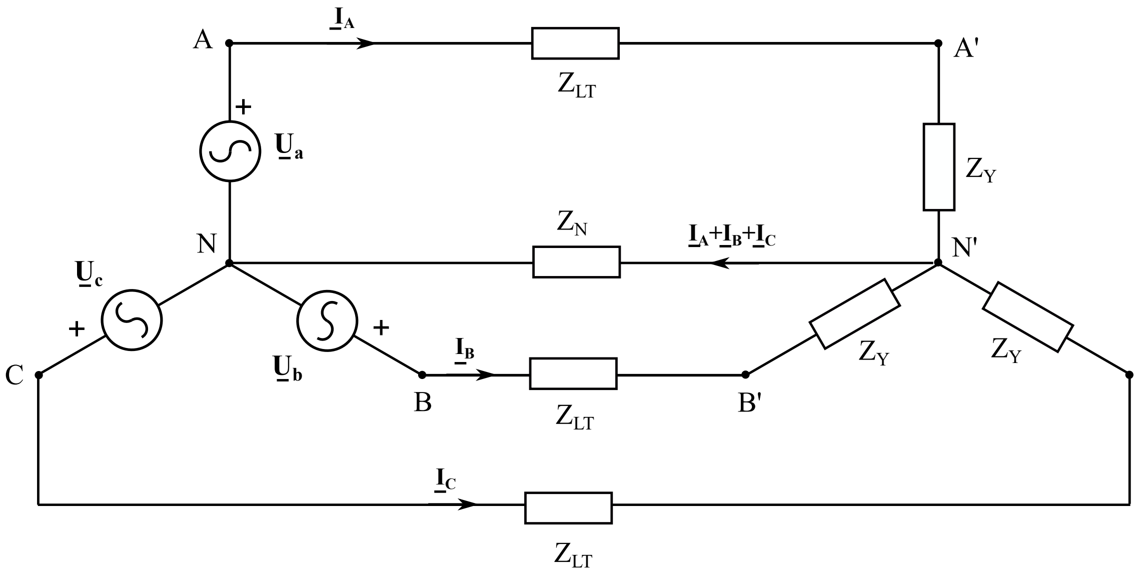
$$\underline{\mathbf{I}}_{Lb} = \sqrt{3}\cdot\underline{\mathbf{I}}_{Fb}\angle{-30^o} \tag{21}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{Lc} = \sqrt{3}\cdot\underline{\mathbf{I}}_{Fc}\angle{-30^o} \tag{22}$$

3. Análisis de sistemas trifásicos: circuito equivalente monofásico

3.1. Equivalente fase-neutro

Imaginemos un sistema trifásico equilibrado estrella-estrella donde la carga está conectada con el generador por medio de una línea de transporte de impedancia Z_{LT}



Podríamos aplicar la segunda ley de Kirchhoff (2LK) a las tres mallas del circuito obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\underline{\mathbf{U}}_a + \underline{\mathbf{I}}_a\cdot(Z_{TL} + Z_Y) + (\underline{\mathbf{I}}_a + \underline{\mathbf{I}}_b + \underline{\mathbf{I}}_c)\cdot Z_N = 0 \tag{23}$$

$$-\underline{\mathbf{U}_b} + \underline{\mathbf{I}_b} \cdot (Z_{TL} + Z_Y) + (\underline{\mathbf{I}_a} + \underline{\mathbf{I}_b} + \underline{\mathbf{I}_c}) \cdot Z_N = 0 \tag{24}$$

$$-\underline{\mathbf{U}_c} + \underline{\mathbf{I}_c} \cdot (Z_{TL} + Z_Y) + (\underline{\mathbf{I}_a} + \underline{\mathbf{I}_b} + \underline{\mathbf{I}_c}) \cdot Z_N = 0 \tag{25}$$

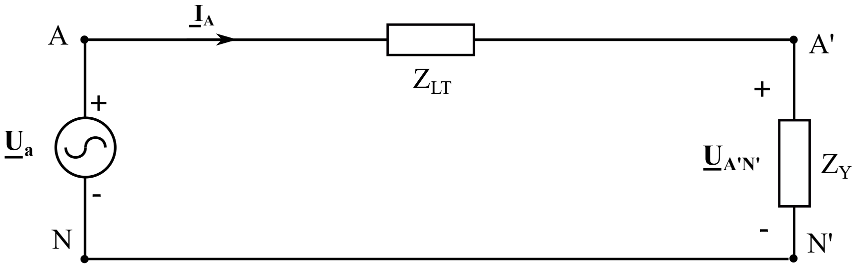
Dado que $\underline{\mathbf{I}_a} + \underline{\mathbf{I}_b} + \underline{\mathbf{I}_c} = 0$ las ecuaciones se podrían simplificar:

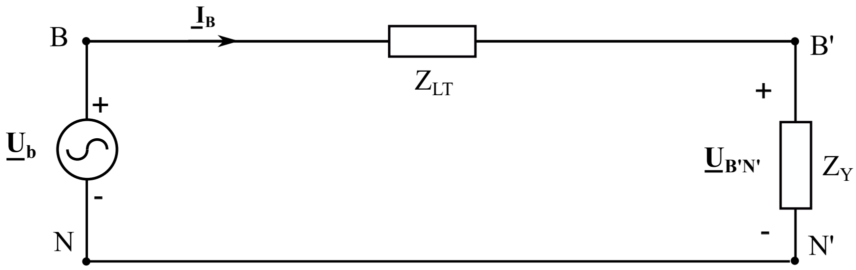
$$-\underline{\mathbf{U}_a} + \underline{\mathbf{I}_a} \cdot (Z_{LT} + Z_Y) = 0 \tag{26}$$

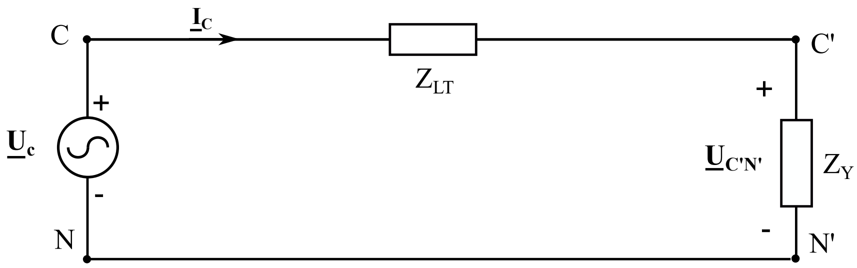
$$-\underline{\mathbf{U}_b} + \underline{\mathbf{I}_b} \cdot (Z_{LT} + Z_Y) = 0 \tag{27}$$

$$-\underline{\mathbf{U}_c} + \underline{\mathbf{I}_c} \cdot (Z_{LT} + Z_Y) = 0 \tag{28}$$

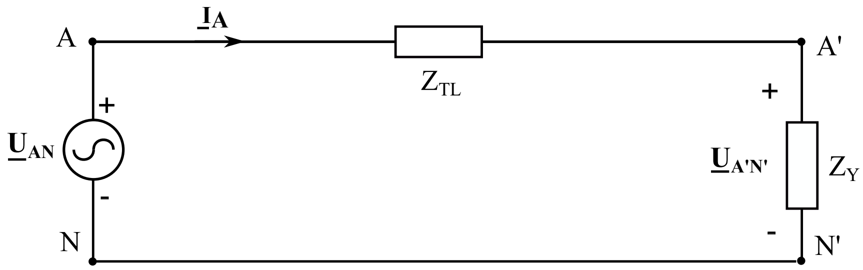
Como la corriente total que circula por el hilo neutro es cero, las ecuaciones obtenidas son idénticas a las que se obtendrían si se analizaran los tres circuitos independientes que se muestran a continuación:





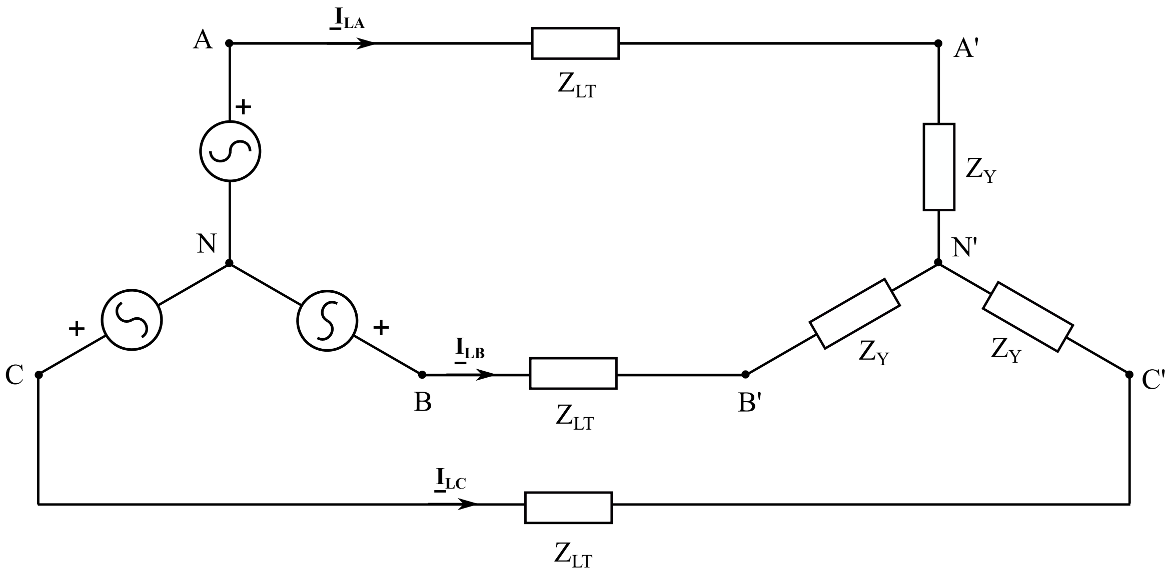


Además, como el sistema está equilibrado, las magnitudes eléctricas de las tres fases tienen la misma amplitud y un desfase conocido (120^o). El comportamiento de todo el sistema podría derivarse del análisis del sistema monofásico que se muestra a continuación. Este es el llamado **equivalente monofásico** o **equivalente fase-neutro** del sistema.



Ejemplo

En el circuito de la figura $U_L = 380V$, $Z_{LT} = 1 + j\Omega$ y la impedancia por fase $Z_Y = 50 + 50j\Omega$. Calcular la corriente de línea, la tensión de línea en el lado de la carga y la caída de tensión en la línea de transporte.

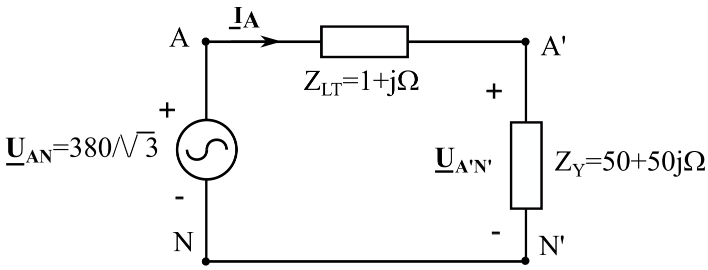


Solución

El problema se puede resolver mediante el equivalente fase-neutro. Analizaremos el comportamiento de la fase A y extrapolaremos los resultados obtenidos al resto de las fases.

En el enunciado del problema solo se indica el módulo de la tensión de línea (no su fase), por lo que podemos elegir el origen de fases. En este caso tomaremos como origen de fase la tensión de fase en A para que los cálculos sean más sencillos:

$\underline{\mathbf{U}}_{AN} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^o$



$$\underline{\mathbf{I}}_A = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{AN}}{Z_{LT} + Z_Y} = 1{,}83 - 1{,}83j = 2{,}59\angle{-45^o}A$$

Para las otras fases las corrientes son:

$$\underline{\mathbf{I}}_B = 2{,}59\angle{-45} - 120 = 2{,}59\angle{-165^o}A$$

$$\underline{\mathbf{I}}_C = 2{,}59\angle{-45} + 120 = 2{,}59\angle 75^o A$$

Tensiones en el lado de la carga:

$$\underline{\mathbf{U}}_{A'N'} = \underline{\mathbf{I}}_{AY} = 182{,}83\angle 0^o V$$

Tensión de linea:

$$U_{L_{carga}} = U_{F_{carga}} \cdot \sqrt{3} = 316{,}66V$$

Fasores tensión de línea en el lado de la carga:

$$\underline{\mathbf{U}}_{A'B'} = 316{,}66\angle 30^o V$$
$$\underline{\mathbf{U}}_{B'C'} = 316{,}66\angle{-90^o} V$$
$$\underline{\mathbf{U}}_{C'A'} = 316{,}66\angle 150^o V$$

Caída de tensión en la línea de transporte:

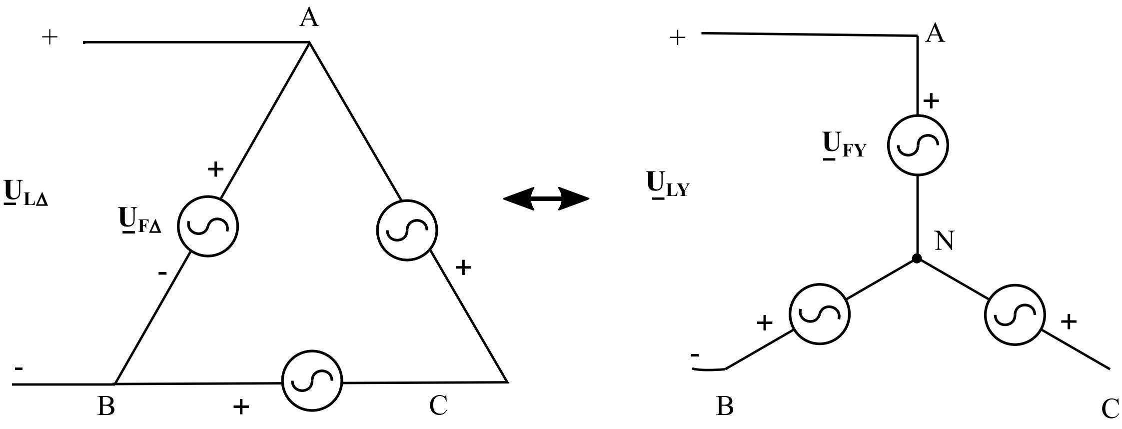
$$\underline{\mathbf{U}}_{AA'} = \underline{\mathbf{I}}_A \cdot Z_{LT} = 36{,}56\angle 0^o V$$
$$\Delta U_{LT} = 36{,}56V$$

3.2. Análisis de sistemas con cargas o generadores conectados en triángulo

La aplicación del equivalente fase-neutro no es posible en sistemas en los que el generador o la carga estén conectados en triángulo. Sin embargo, siempre podemos transformar las configuraciones en triángulo en una estrella equivalente.

3.2.1. Generadores conectados en triángulo

Tres generadores conectados en triángulo se pueden transformar en una configuración en estrella **equivalente**:



Las dos configuraciones son equivalentes si las tensiones de línea son iguales en ambos casos:

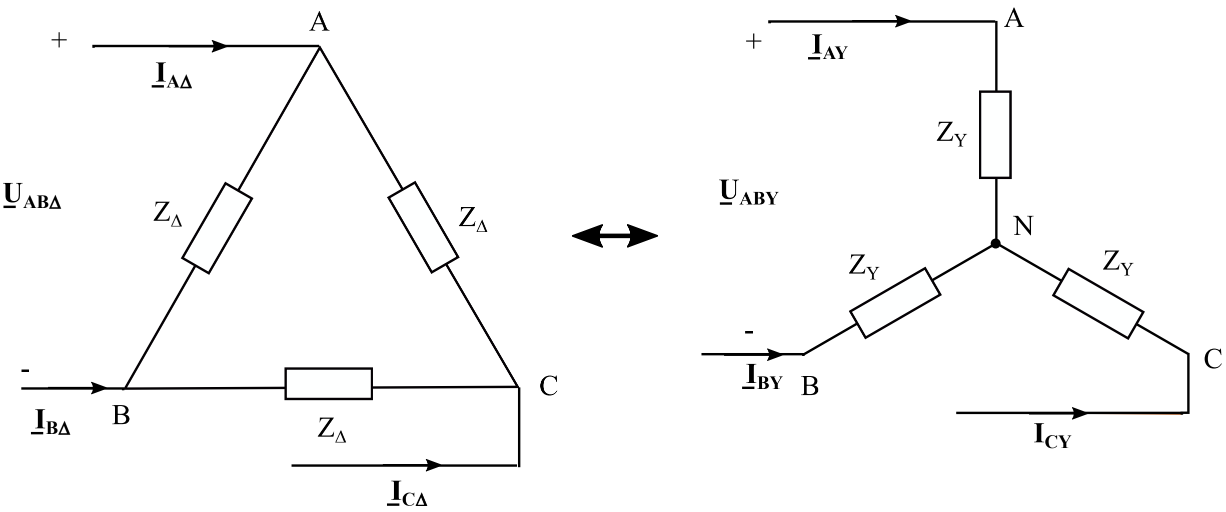
$$\underline{\mathbf{U}}_{LY} = \underline{\mathbf{U}}_{L\Delta} \tag{29}$$

Como se puede ver en el diagrama, las tensiones de fase de los generadores en triángulo y en estrella serán distintas.

$$\underline{\mathbf{U}}_{FY} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{F\Delta}}{\sqrt{3}} \angle{-30^o} \tag{30}$$

3.2.2. Cargas conectadas en triángulo: equivalente en estrella triángulo

Queremos encontrar cuál debería ser el valor de Z_Y para que las dos cargas en la figura sean equivalentes.



Las cargas son equivalentes si al aplicarles la misma tensiones de línea las corrientes de línea resultantes son las mismas:

$$\underline{\mathbf{U}}_{AB\Delta} = \underline{\mathbf{U}}_{ABY} \qquad \underline{\mathbf{U}}_{BC\Delta} = \underline{\mathbf{U}}_{BCY} \qquad \underline{\mathbf{U}}_{CA\Delta} = \underline{\mathbf{U}}_{CAY} \tag{31}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{A\Delta} = \underline{\mathbf{I}}_{AY} \qquad \underline{\mathbf{I}}_{B\Delta} = \underline{\mathbf{I}}_{BY} \qquad \underline{\mathbf{I}}_{C\Delta} = \underline{\mathbf{I}}_{CY} \tag{32}$$

Podemos limitar nuestro análisis a una fase, ya que el comportamiento en las tres fases es el mismo excepto que hay una diferencia de fase de 120^o

$$\underline{\mathbf{I}}_{A\Delta} = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{FA} \angle -30^o = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} \cdot \sqrt{3} \angle -30^o}{Z_\Delta} \tag{33}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{AY} = \underline{\mathbf{I}}_{FA} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} / \sqrt{3} \angle 30^o}{Z_Y} \tag{34}$$

Para que las dos cargas sean equivalentes se debe cumplir que $\underline{\mathbf{I}}_{A\Delta} = \underline{\mathbf{I}}_{AY}$:

$$\frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} \cdot \sqrt{3} \angle -30^o}{Z_\Delta} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} / \sqrt{3} \angle 30^o}{Z_Y} \tag{35}$$

Por tanto, para que una configuración en estrella sea equivalente a una configuración en triángulo las impedancias Z_Y y Z_Δ deben cumplir la siguiente relación:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \tag{36}$$

3.2.3. Equivalente monofásico para sistemas con elementos conectados en triángulo

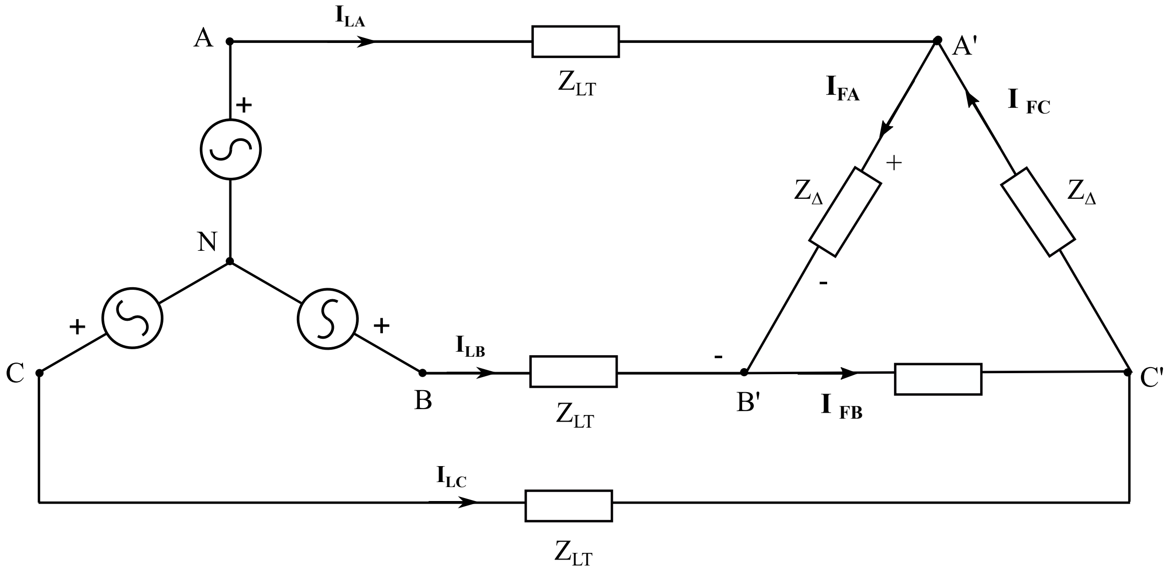
En sistemas con una carga conectada en triángulo o un generador conectado en triángulo se aplicarán transformaciones estrella-triángulo para obtener un sistema YY equivalente al original.

La metodología a aplicar en sistemas YΔ o Δ Δ o Δ Y será la siguiente:

1. El sistema se transforma en un sistema equivalente YY.
2. Se obtiene el equivalente fase-neutro del sistema YY equivalente y se realizan los cálculos de las magnitudes de línea de ese sistema.
3. Se retorna al sistema original y se calculan las variables restantes.

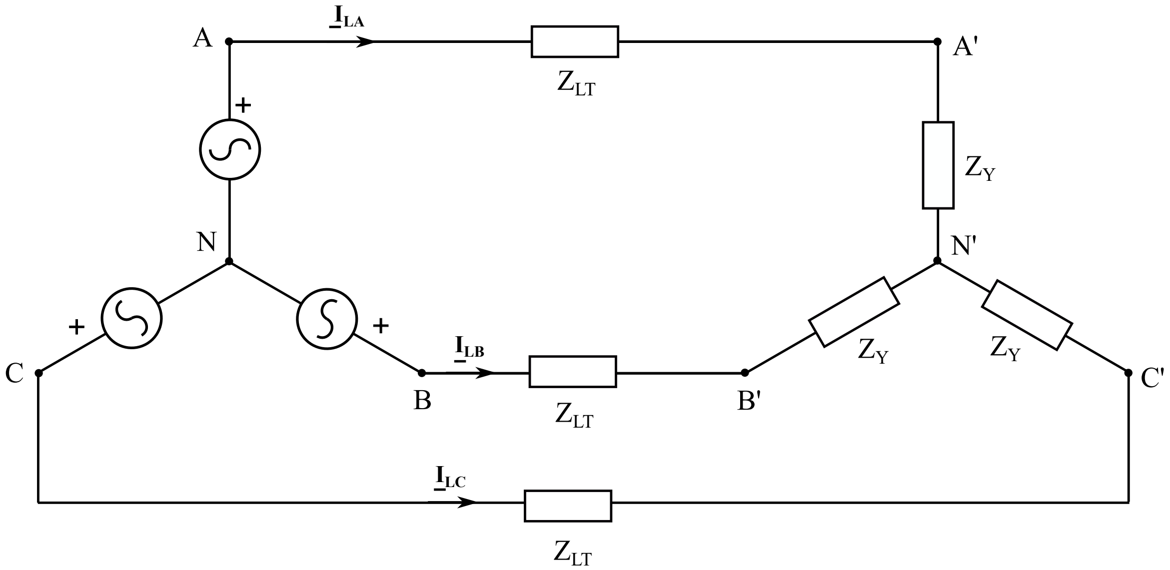
Ejemplo

En el siguiente circuito, la carga se alimenta a una tensión de línea de 400 V. Sabiendo que $Z_{LT} = 1 + 4j\Omega$ y $Z_{\Delta} = 30 + 60j\Omega$. Calcular las corrientes de línea y las corrientes de fase y el tensión de línea en el extremo del generador del sistema.



Solución

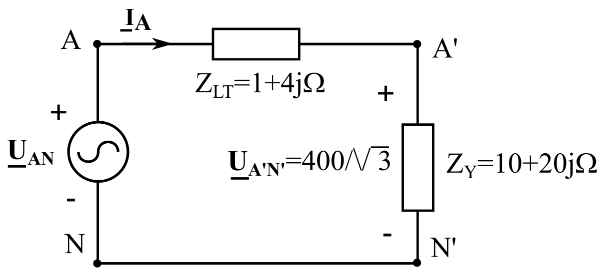
Transformamos el sistema original en un circuito equivalente YY. Como los sistemas son equivalentes, las tensiones de línea y las corrientes de línea permanecen son iguales en ambos casos.



Las impedancias en Y son:

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} = 10 + 20j\Omega$$

La tensión de línea en el extremo de la carga es 400 V, por lo que el equivalente monofásico del sistema es:



En este caso, por simplicidad, tomamos la tensión de fase del lado de carga como origen de fase.

$$\underline{\mathbf{I}}_A = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{A'N}}{Z_Y} = 4{,}62 - 9{,}24j = 10{,}33\angle{-63{,}43^o}A$$

Para las demás fases las corrientes de línea son:

$$\underline{\mathbf{I}}_B = 10{,}33\angle{-63{,}43 - 120} = 10{,}33\angle{-183{,}43^o}A$$

$$\underline{\mathbf{I}}_C = 10{,}33\angle{-63{,}43 - 120} = 10{,}33\angle 56{,}56^o AA$$

Las corrientes de línea son las mismas para los circuitos YY y YΔ. Las corrientes de fase para el sistema original son:

$$\underline{\mathbf{I}}_{FA} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_B}{\sqrt{3}}\angle 30^o = 5{,}96\angle{-33{,}43^o}A$$

y para las fases B y C:

$$\underline{\mathbf{I}}_{FB} = 5{,}96\angle{-153{,}43^o}A$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{FC} = 5{,}96\angle 86{,}57^o A$$

Tensión de fase en el extremo del generador del sistema:

$$\underline{\mathbf{U}}_{AN} = \underline{\mathbf{I}}_A \cdot Z_{TL} + \underline{\mathbf{U}}_{A'N'} = 272{,}66\angle 1{,}94^o V$$

Tensión de línea en el generador:

$$U_{L_g} = U_{F_g} \cdot \sqrt{3} = 472{,}27V$$

Fasores tensión de línea en el lado de la carga:

$$\underline{\mathbf{U}}_{A'B'} = 472{,}27\angle 1{,}94 + 30^o V = 472{,}27\angle 31{,}94^o V$$
$$\underline{\mathbf{U}}_{B'C'} = 472{,}27\angle{-88{,}06^o} V$$
$$\underline{\mathbf{U}}_{C'A'} = 472{,}27\angle 151{,}94^o V$$

Caída de tensión en la línea de transporte:

$$\underline{\mathbf{U}}_{AA'} = \underline{\mathbf{I}}_A \cdot Z_{LT} = 42{,}58\angle 12{,}53^o V$$
$$\Delta U_{LT} = 42{,}58 V$$

4. Potencia en circuitos trifásicos

4.1. Potencia instantánea

Para calcular la potencia instantánea de una carga o un generador trifásico, debemos sumar la potencia de las tres fases.

$$p(t) = u_a(t) \cdot i_a(t) + u_b(t) \cdot i_b(t) + u_c(t) \cdot i_c(t) \tag{37}$$

En un sistema trifásico las tensiones de las tres fases son:

$$u_a(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t)$$
$$u_b(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t - 120^o)$$
$$u_c(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + 120^o)$$

y las corrientes

$$i_a(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$
$$i_b(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - 120^o - \varphi)$$
$$i_c(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + 120^o - \varphi)$$

$$p(t) = 2 \cdot U \cdot I \cdot (\cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - 120^o) \cdot \cos(\omega t - 120^o - \varphi) + \cos(\omega t + 120^o) \cdot \cos(\omega t + 120^o - \varphi)$$

aplicando:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \tag{38}$$

se llega a:

$$p(t) = U \cdot I \cdot (3 \cdot \cos\varphi + \underbrace{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - 120^o - \varphi) + \cos(2\omega t + 120^o - \varphi)}_{0})$$

Como la suma de tres funciones sinusoidales con desfase relativo 120^o es cero, encontramos que la potencia instantánea de un sistema trifásico es constante y dependiente de la amplitud de la corriente, la amplitud del tensión y el factor de potencia:

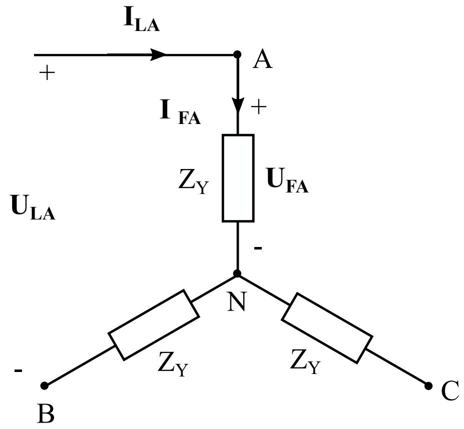
$$p(t) = 3 \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi \tag{39}$$

El hecho de que la potencia instantánea trifásica sea constante tiene implica que las vibraciones en los ejes de los motores y generadores trifásicos son menores que en las máquinas monofásicas. Esto los hace más robustos desde el punto de vista mecánico, mejora su fiabilidad y prolonga su vida útil.

4.2. Potencia activa y reactiva de una carga trifásica

4.2.1. Sistemas conectados en estrella

Consideremos una carga trifásica con impedancia por fase $Z_Y = |ZY|\angle\theta$



La potencia activa absorbida por la carga es la suma de la potencia activa absorbida por cada impedancia individual:

$$P = P_A + P_B + P_C \tag{40}$$

donde:

$$P_A = U_{FA} \cdot I_{FA} \cdot \cos\varphi \qquad P_B = U_{FB} \cdot I_{FB} \cdot \cos\varphi \qquad P_C = U_{FC} \cdot I_{FC} \cdot \cos\varphi$$

como las tensiones trifásicas y las corrientes trifásicas tienen el mismo módulo (U):

$$P_A = P_B = P_C = U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi \tag{41}$$

La potencia activa de la carga trifásica es:

$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi \tag{42}$$

La potencia también se puede expresar en función de las magnitudes de línea. Como en Y $I_L = I_F$ y $U_F = U_L/\sqrt{3}$:

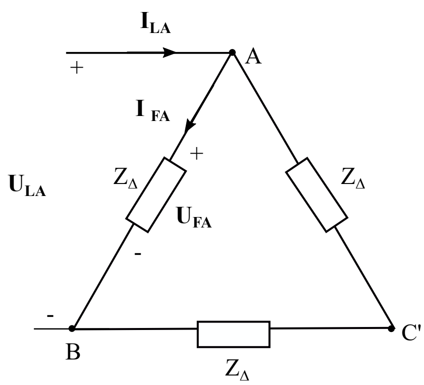
$$P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \tag{43}$$

Las ecuaciones (42) y (43) también son válidas para calcular la potencia de los generadores.

Siguiendo el mismo razonamiento encontramos la siguiente ecuación para la potencia reactiva de una carga o generador conectado en estrella:

$$Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi \tag{44}$$

4.2.2. Sistemas conectados en triángulo



Para cargas y generadores conectados en triángulo también podemos aplicar:

$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi \tag{45}$$

$$Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi \tag{46}$$

Para expresar la potencia activa y reactiva en función de las magnitudes de línea, consideramos las relaciones entre las magnitudes de fase y de línea en un sistema en triángulo ($U_L = U_F$ $I_F = I_L/\sqrt{3}$):

$$P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \tag{47}$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi \tag{48}$$

4.2.3. Expresiones generales para la potencia activa y reactiva de un sistema trifásico

Del razonamiento anterior se puede concluir que las expresiones para calcular la potencia activa y reactiva de un trifásico son las mismas para los sistemas en estrella y en triángulo y son:

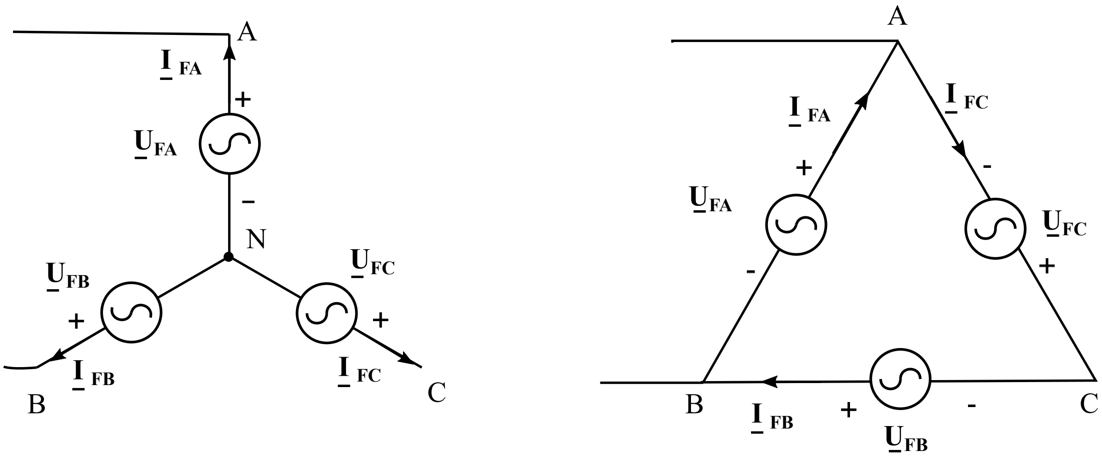
$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \tag{49}$$

$$Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi \tag{50}$$

4.3. Potencia compleja de generadores trifásicos

La potencia compleja de un generador trifásico, conectado en estrella o triángulo es la suma de las potencias complejas de las tres fases:

$$\mathcal{S}_g = \underline{\mathbf{U}}_{FA} \cdot \underline{\mathbf{I}}^*_{FA} + \underline{\mathbf{U}}_{FB} \cdot \underline{\mathbf{I}}^*_{FB} + \underline{\mathbf{U}}_{FC} \cdot \underline{\mathbf{I}}^*_{FC} = 3 \cdot \underline{\mathbf{U}}_{FA} \cdot \underline{\mathbf{I}}^*_{FA} \tag{51}$$



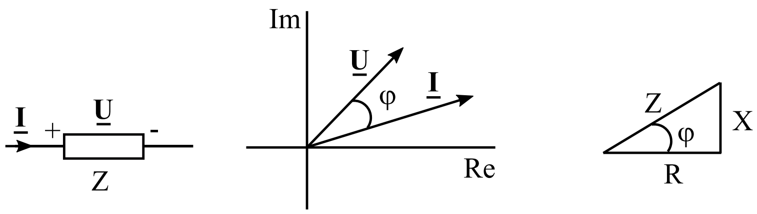
5. Corrección del factor de potencia

5.1. Factor de potencia

Para caracterizar una carga en CA es necesario especificar su potencia nominal pero también su factor de potencia. El factor de potencia proporciona información sobre la proporción entre la potencia activa y la potencia reactiva que absorbe la carga.

$$f.p = \cos\varphi \tag{52}$$

El ángulo φ también es el ángulo de fase entre la corriente y el tensión en impedancia, y el ángulo de la impedancia compleja:



$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctan\frac{Q}{P} = \arctan\frac{X}{R} \tag{53}$$

Si $\varphi > 0$ decimos que el factor de potencia es **inductivo**, si $\varphi < 0$ el factor de potencia es **capacitivo**.

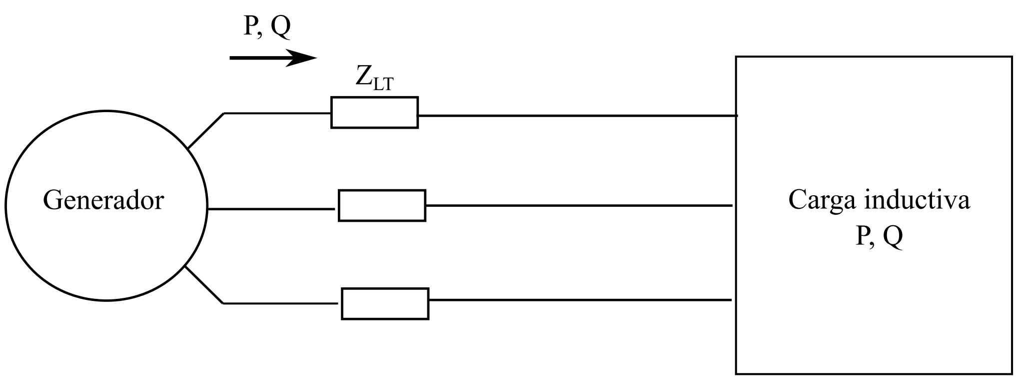
La siguiente tabla resume los valores de potencia reactiva y factores de potencia de los diferentes tipos de cargas. Los sistemas resistivos tienen factor de potencia 1, lo que significa que no hay absorción de potencia reactiva.

	Q	φ	$\cos\varphi$	**character**
Cargas resistivas	0	0	1	-
Cargas inductivas	> 0	> 0	$0 < p.f < 1$	inductivo
Cargas capacitivas	< 0	< 0	$0 < p.f < 1$	capacitivo

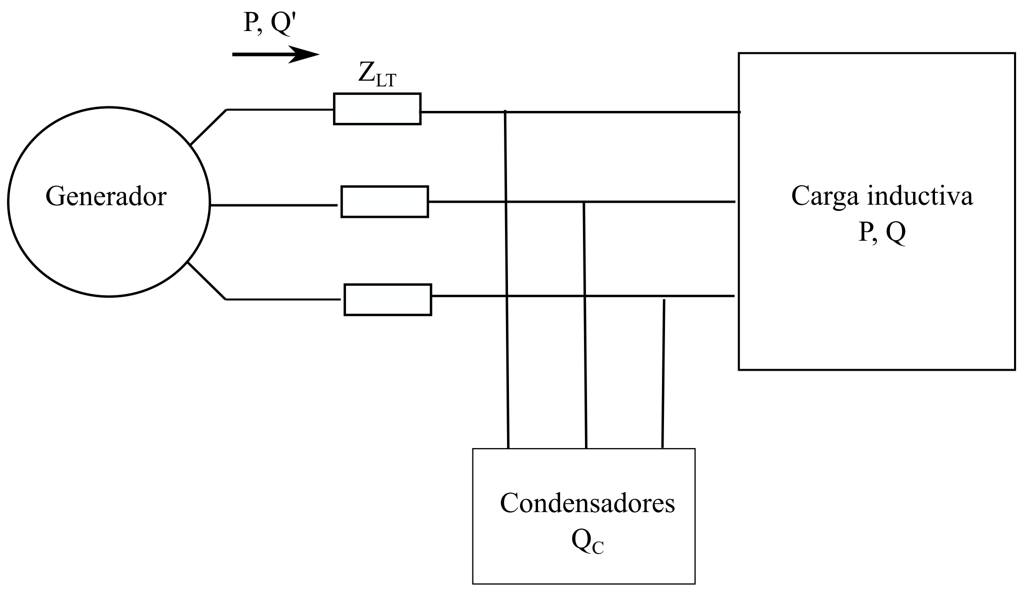
5.2. Compensación de potencia reactiva

En los sistemas de CA hay un intercambio continuo de energía entre generadores y cargas capacitivas e inductivas. La amplitud de la potencia fluctuante se define como **potencia reactiva** y es de diferente signo en ambos tipos de elementos. De acuerdo al criterio de signo que establecimos en el tema anterior, las bobinas absorben potencia reactiva ($Q_L > 0$) y los condensadores la entregan ($Q_C < 0$).

Muchas cargas de la vida real, como los motores eléctricos, son altamente inductivas y es habitual que la operación de los sistemas eléctricos de potencia involucre un alto consumo de potencia reactiva que se transferiría desde los generadores hacia las cargas. El problema de tener un alto valor de la potencia fluctuante es que la corriente que fluye a través de las líneas aumentaría, lo que impacta en las pérdidas del sistema y provoca caídas de tensión. Por ello, las empresas eléctricas penalizan a los clientes que consumen energía con bajo factor de potencia.

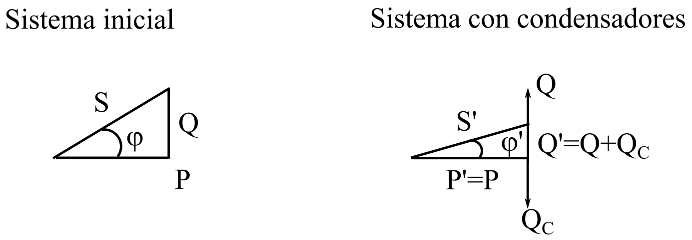


La solución que da la industria a este problema consiste en conectar bancos de condensadores en paralelo con las cargas inductivas; estos condensadores cederían parte de la potencia reactiva absorbida por las inductancias. En este caso el generador tan solo suministraría una parte la potencia reactiva demandada por la carga mientras que la mayor parte de la potencia reactiva requerida la entregarían los condensadores:



Es importante tener en cuenta que los condensadores no absorben ni entregan potencia activa, por lo que la potencia activa del sistema no varía.

Si se representan las potencias se en un triángulo de potencia (despreciando la absorción de potencia activa y reactiva en la línea para simplificar el razonamiento), vemos cómo cambia la relación entre la potencia activa y reactiva y cómo disminuye el ángulo φ' al conectar los condensadores:



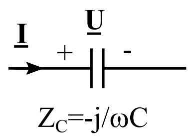
La potencia reactiva entregada por el generador cuando los condensadores están conectados sería:

$$Q' = Q + Q_C \tag{54}$$

5.3. Determinación de la capacidad del banco de condensadores

5.3.1. Potencia reactiva de un condensador

Si se aplica una tensión $\underline{\mathbf{U}} = U\angle\varphi_u$ y un flujo de corriente $\underline{\mathbf{I}} = I\angle\varphi_i$ a un condensador de capacidad C:

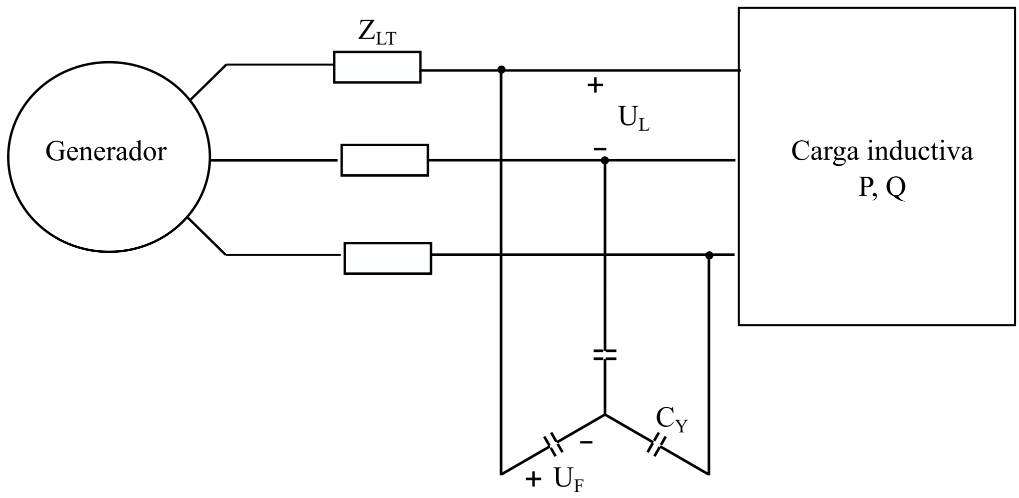


Su potencia reactiva es:

$$Q_C = X_C \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_C} = -\omega \cdot C \cdot U^2 \tag{55}$$

5.3.2. Potencia reactiva de un banco de condensadores en estrella

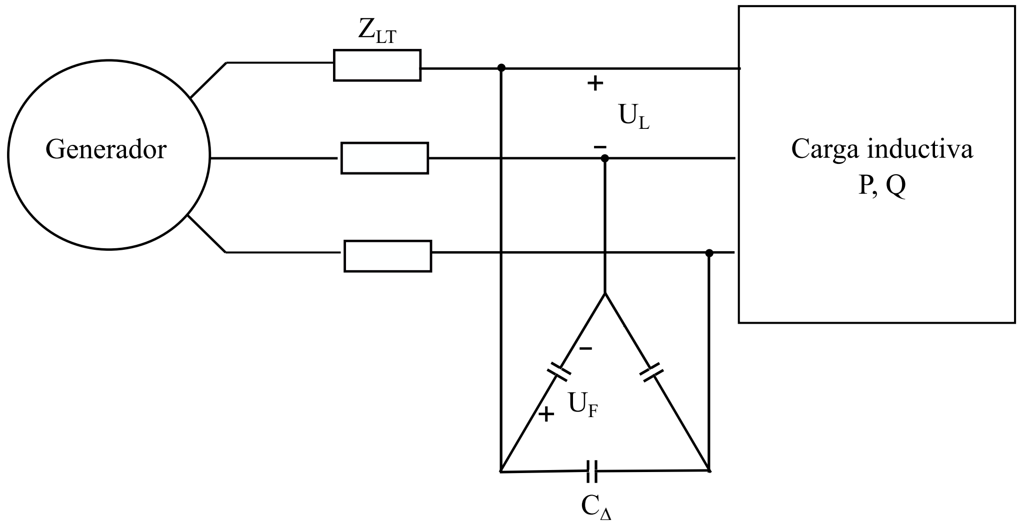
La potencia reactiva total de un banco de condensadores conectados en estrella sería la suma de la potencia reactiva de los tres condensadores y puede expresarse en función de la tensión de fase o de la tensión de línea:



$$Q_{CY} = -3 \cdot \omega \cdot C_Y \cdot \underbrace{U_F}_{U_L/\sqrt{3}}{}^{2} = -\omega \cdot C_Y \cdot U_L^2 \tag{56}$$

5.3.3. Potencia reactiva de un banco de condensadores en triángulo

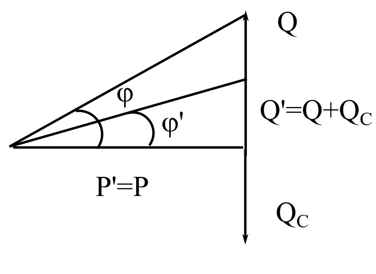
Si los condensadores están conectados en triángulo, la expresión de la potencia en términos del tensión de fase es igual que en el caso anterior, pero si la potencia se expresa en función de la tensión de línea vemos que con los mismos condensadores extraeremos el triple de potencia si están conectados en triángulo. Por esta razón, esta es la configuración más utilizada para la compensación de reactiva.



$$Q_{C\Delta} = -3 \cdot \omega \cdot C_\Delta \cdot \underbrace{\overset{2}{U_F}}_{U_L} = -3 \cdot \omega \cdot C_\Delta \cdot U_L^2 \tag{57}$$

5.3.4. Capacidad requerida para obtener un valor determinado del factor de potencia

Si tenemos un sistema que está trabajando con factor de potencia $\cos\varphi$ y queremos compensar la potencia reactiva para que el factor de potencia se corrija a $\cos\varphi'$:



$$Q = P \cdot \tan\varphi \qquad\qquad Q' = P \cdot \tan\varphi' \tag{58}$$

$$Q_C = Q - Q' = P \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi') \tag{59}$$

Si los condensadores están conectados en Δ su valor será:

$$C_\Delta = \frac{P \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')}{3 \cdot \omega \cdot U_L^2} \tag{60}$$

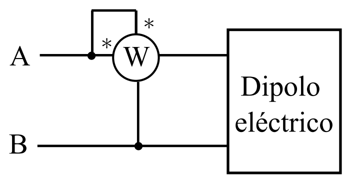
Y están conectados en Y se necesitará una capacidad tres veces mayor:

$$C_Y = \frac{P \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega \cdot U_L^2} \tag{61}$$

6. Medida de potencia en sistemas trifásicos

6.1. Principio de funcionamiento de un vatímetro.

Un vatímetro es un aparato de medida que proporciona información sobre la potencia absorbida por los dipolos eléctricos. Los vatímetros incorporan dos circuitos de medida: uno para medir la corriente (bobina amperimétrica), y otro para medir la tensión (bobina voltimétrica). La bobina amperimétrica debe estar conectada en serie con el dipolo, mientras que la bobina de voltimétrica se conectará en paralelo con él. Los terminales de la bobina amperimétrica y la bobina voltimétrica con la misma polaridad relativa se marcan con un asterisco:



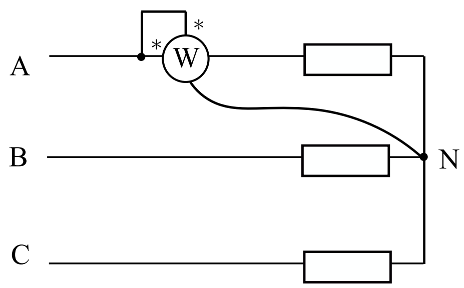
La lectura del vatímetro de la figura es:

$$W = I_A \cdot U_{AB} \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{AB}\underline{\mathbf{I}}_A}) \tag{62}$$

En los sistemas trifásicos, los vatímetros se pueden conectar de diferentes maneras para medir la potencia; el modo de conexión depende de la configuración del sistema que se esté caracterizando y de la variable que se busque. Los siguientes apartados dan algunos ejemplos de conexiones que se pueden utilizar para medir la potencia activa y reactiva en sistemas trifásicos.

6.2. Medida de la potencia activa en sistemas trifásicos con neutro accesible

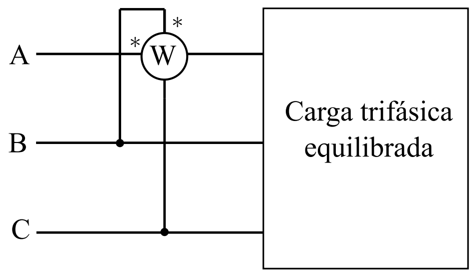
En el sistema de la figura, el vatímetro mide la potencia activa de la impedancia en la fase A. La potencia activa de la carga trifásica se puede calcular como $3 \cdot W$.



$$W = I_A \cdot U_{AN} \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{AN}\underline{\mathbf{I}}_A}) = U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = \frac{P}{3} \tag{63}$$

6.3. Medida de la potencia reactiva de un sistema trifásico con un vatímetro

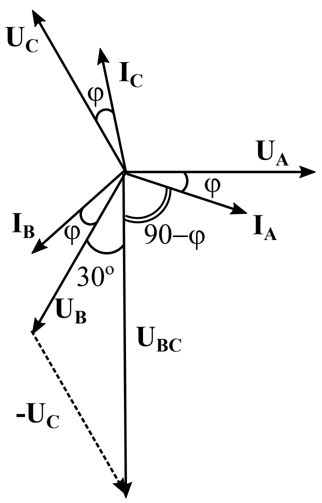
La potencia reactiva de una carga trifásica equilibrada se puede medir con un solo vatímetro, incluso si no hay punto neutro o no hay acceso a él. El vatímetro debe medir la corriente que fluye a través de una fase y la caída de tensión entre las otras dos fases:



El vatímetro de la figura mide:

$$W = U_{BC} \cdot I_A \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{BC}\underline{\mathbf{I}}_A}) \tag{64}$$

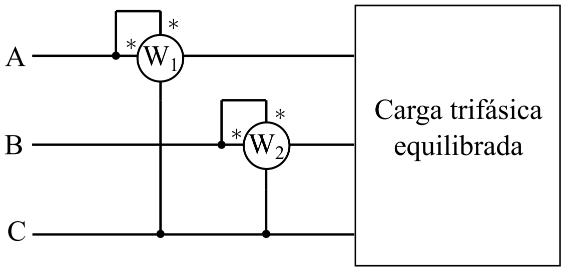
El valor del ángulo $\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{BC}\underline{\mathbf{I}}_A}$ se puede determinar usando un diagrama fasorial. Como se puede ver el ángulo es igual a $90 - \varphi$ para una carga inductiva. Si la carga es capacitiva, la corriente se adelanta al tensión en φ y el ángulo $\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{BC}\underline{\mathbf{I}}_A}$ es $90 + \varphi$:



$$W = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{BC}\underline{\mathbf{I}}_A}) = U_L \cdot I_A \cdot cos(90 - \varphi) = U_L \cdot I_A \cdot sen(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{3}} \tag{65}$$

6.4. El método de los dos vatímetros

El método de los dos vatímetros permite medir la potencia activa y reactiva de los sistemas trifásicos equilibrados. Para aplicarlo se deben conectar dos vatímetros W_1 y W_2 como se muestra en el siguiente diagrama:

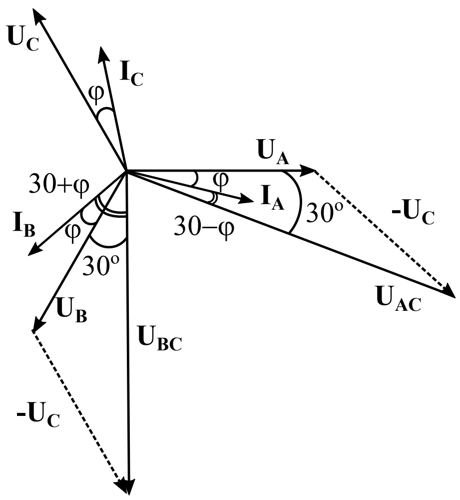


Los vatímetros miden:

$$W_1 = U_{AC} \cdot I_A \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{AC}\underline{\mathbf{I}}_A}) \tag{66}$$

$$W_2 = U_{BC} \cdot I_B \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{BC}\underline{\mathbf{I}}_B}) \tag{67}$$

Los valores de los ángulos se pueden encontrar mediante el diagrama fasorial:



$$W_1 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{AC}\underline{\mathbf{I}}_A}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30 - \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\varphi) \tag{68}$$

$$W_2 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{BC}\underline{\mathbf{I}}_B}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30 + \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2} \cdot sen\varphi) \tag{69}$$

La potencia activa y reactiva del sistema trifásico se puedes obtener como la suma y la diferencia de las lecturas de los dos vatímetros.

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P \tag{70}$$

$$W_1 - W_2 = \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \tag{71}$$