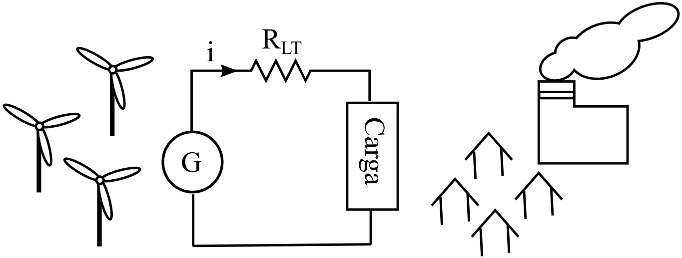
Tema 3: Análisis de circuitos de corriente alterna

Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

Belén García
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Carlos III de Madrid

¿Por qué circuitos en corriente alterna?



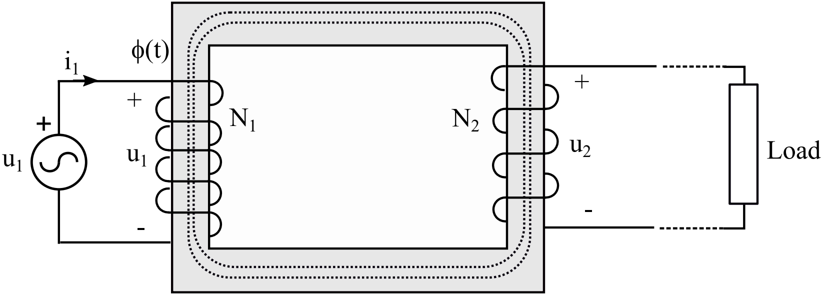
Las pérdidas en la línea dependen de la corriente que fluye a través de ella.

$$p_{load} = u \cdot i \qquad p_{loss} = R_{TL} \cdot i^2$$

Si se eleva la tensión del sistema, se reducen las pérdidas.

Transformadores

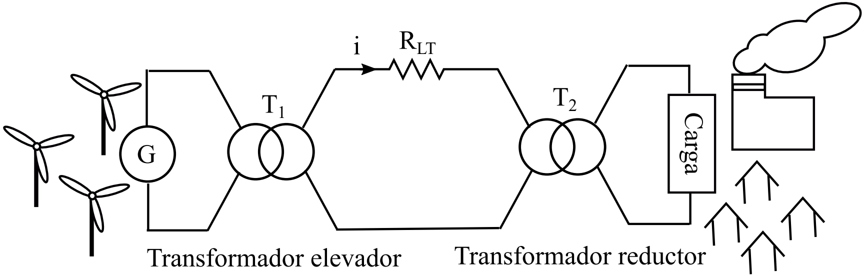
Los transformadores se utilizan para modificar el nivel de tensión de la energía eléctrica.



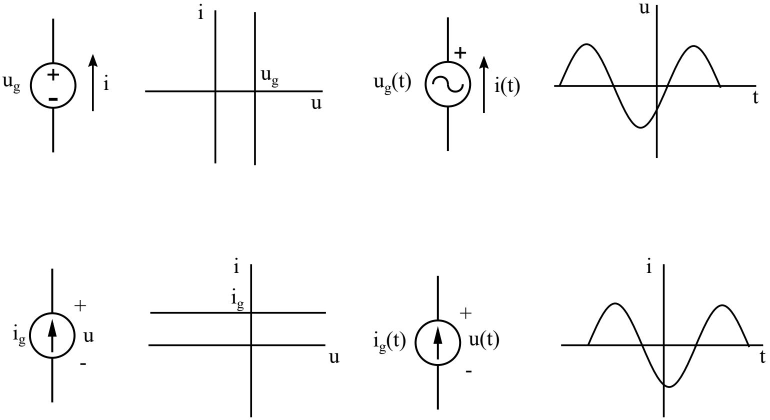
Los transformadores están constituidos por dos bobinas acopladas con distinto número de espiras. La **relación de transformación** es:

$$r_t = \frac{N_1}{\;} = \frac{u_1}{\;}$$

Configuración de un sistema eléctrico

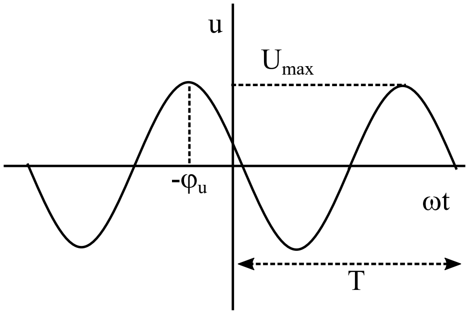


Fuentes de CC y de CA



$$u(t) = U_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = I_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Funciones sinusoidales



$$u(t) = U_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Las funciones sinusoidales también pueden definirse en términos de una función seno ($sen\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$), pero en este curso usaremos el coseno

Parámetros principales de una función sinusoidal

- **Amplitud** (Umax): valor máximo alcanzado por la tensión
- **Período** (T): tiempo necesario para completar un ciclo (se expresa en [s])
- **Frecuencia**: número de ciclos descritos en un segundo.

$$f = \frac{1}{T} \quad [Hz]$$

- **Frecuencia angular**: Frecuencia de la función en radianes por segundo.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad [rad] \cdot [s]^{-1}$$

- **Ángulo de fase** (φ): diferencia de fase entre el máximo de la función y el origen (expresado en [rad] y a veces en grados).

Parámetros principales de una función sinusoidal

- **Valor medio**: El valor medio de una función sinusoidal es igual a cero

$$U_{mean} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} U_{max}\cdot\cos(\omega t+\varphi_u)dt = 0$$

- **Valor cuadrático medio** (rms) o valor eficaz:

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)dt}$$

Valor RMS de una señal sinusoidal

El valor RMS de una función sinusoidal es:

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} U_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_u) dt} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

Es frecuente expresar las funciones sinusoidales en función de sus valores eficaces:

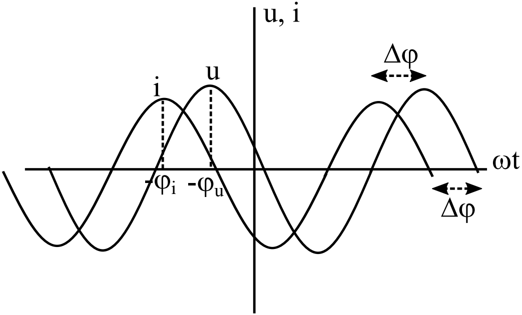
$$U = U_{rms} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \qquad I = I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Desfase relativo entre dos señales

Distancia entre los cruces por cero o los picos de las señales

$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$ $\qquad$ $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

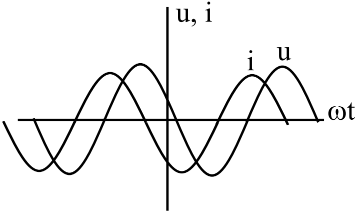


$\Delta\varphi_{u,i} = \varphi_u - \varphi_i$

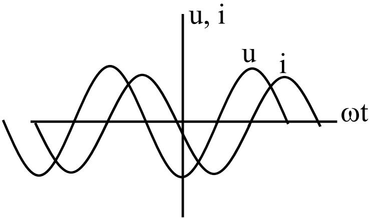
$\Delta\varphi_{u,i} < 0$: tensión retrasada, corriente adelantada.

$\Delta\varphi_{u,i} > 0$: corriente retrasada, tensión adelantada.

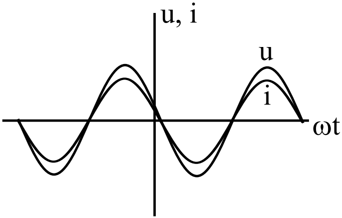
Desfase relativo entre dos señales



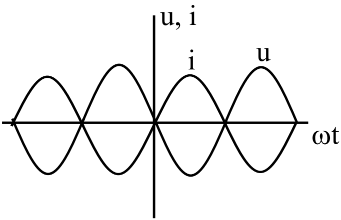
Corrente adelantada
Tensión retrasada



Tensión adelantada
Corriente retrasada



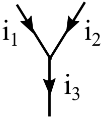
Corriente y tensión en fase



Corriente y tensión en oposición

Análisis de circuitos CA en el dominio del tiempo

1. Operar con funciones sinusoidales no es sencillo.



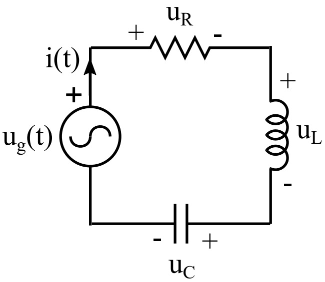
$i_1+i_2=i_3$

$$i_3 = \sqrt{2}\cdot I_1\cdot\cos(\omega t+\varphi_{i_1})+\sqrt{2}\cdot I_2\cdot\cos(\omega t+\varphi_{i_2}) = \sqrt{2}\cdot I_3\cdot cos(\omega t+\varphi_{i_3})$$

Encontrar I_3 y φ_{i_3} requiere un análisis matemático complicado

2. El análisis de circuitos de CA en el dominio del tiempo involucra la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales.

Análisis de un circuito RLC en el dominio del tiempo

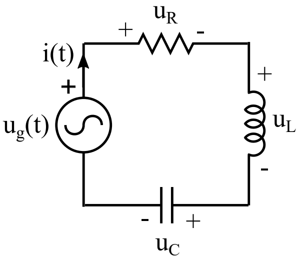


$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Aplicando la 2LK: $\quad u_g(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \qquad u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

Análisis de un circuito RLC en el dominio del tiempo



$$u_g(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

$$\frac{du_g(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

$$i(t) = i_{transitoria} + i_{reg-perm}$$

$$u_g(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad => \quad i_{rp}(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Conclusiones sobre el análisis de circuitos de CA

- El análisis de circuitos CA requiere la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales. En circuitos con muchos elementos, encontrar una solución es complicado.
- Si la excitación de un circuito es una tensión o una corriente sinusoidal de frecuencia ω, todas las corrientes y tensiones resultantes serán funciones sinusoidales de la misma frecuencia.
- Nuestro objetivo es encontrar las amplitudes y los ángulos de de fase de las corrientes y las tensiones buscadas.
- A continuación vamos a estudiar el análisis de circuitos de AC en el dominio de la frecuencia que está basado en la representación de las funciones sinusoidales mediante números complejos.

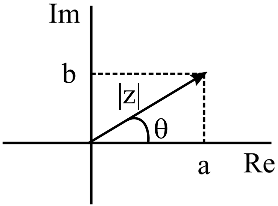
Números complejos: repaso

$$j = \sqrt{-1}$$

Número complejo:

$$z = a + bj$$

$$z = |z|\angle\theta \qquad z = |z| \cdot e^{j\theta}$$



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \arctan\frac{b}{a} \qquad a = |z| \cdot \cos\theta \quad b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Ecuación de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\operatorname{sen}\theta$$

Representación fasorial de una función sinusoidal

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Aplicando la ecuación de Euler ($e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$):

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Re(e^{j(\omega t + \varphi_u)}) = \sqrt{2} \cdot Re(U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t})$$

La información importante de u(t) es U y φ_u, ya que ω es igual para todas las corrientes y tensione del circuito.

El **fasor asociado a una función sinusoidal** es un número complejo que contiene información sobre el valor eficaz y el ángulo de fase de la función sinusoidal:

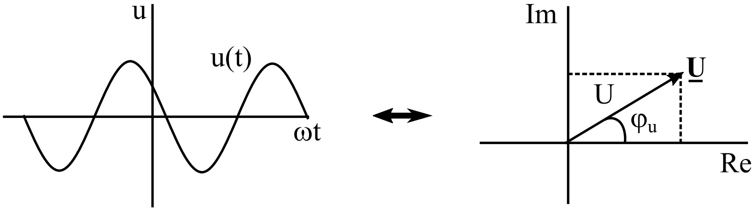
$$\underline{\mathbf{U}} = U \cdot e^{j\varphi_u} = U\angle\varphi_u$$

Representación fasorial de una función sinusoidal

Los fasores representan funciones sinusoidales en el **dominio de frecuencia**

Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot Re(U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t})$$

$$\underline{\mathbf{U}} = U \cdot e^{j\varphi_u} = U\angle\varphi_u$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{U}} \cdot e^{j\omega t})$$

Leyes de Kirchhoff en forma fasorial

Se puede probar que la 1LK y la 2LK también se verifican para los fasores asociados a las tensiones y corrientes.

$$i_k(t) = \sqrt{2} \cdot I_k \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i,k}) \qquad \underline{\mathbf{I}_k} = I_k \angle \varphi_{i,k}$$

Primera ley de Kirchhoff:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \underline{\mathbf{I}_k} = 0$$

$$u_k(t) = \sqrt{2} \cdot U_k \cdot \cos(\omega t + \varphi_{u,k}) \qquad \underline{\mathbf{U}_k} = U_k \angle \varphi_{u,k} = 0$$

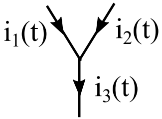
Segunda ley de Kirchhoff:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t) \qquad \sum_{k=1}^{n} \underline{\mathbf{U}_k} = 0$$

Ejemplo

Calcular $i_3(t)$ sabiendo que:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos(25t + 45^o)A \qquad i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \cos(25t + 90^o)A$$



Solución

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = 10\angle 45^o A = 7{,}07 + 7{,}07jA \qquad \underline{\mathbf{I}}_2 = 20\angle 90^o A = 20jA$$

$$\underline{\mathbf{I}}_3 = \underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 = 10\angle 45^o + 20\angle 90^o = 7{,}07 + 27{,}07j = 28\angle 75{,}36^o A$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 28 \cdot \cos(25t + 75{,}36^o)A$$

Impedancia de los elementos pasivos

En los condensadores y las bobinas las relaciones entre tensiones y corrientes vienen dadas por ecuaciones diferenciales:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \qquad u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

Para evitar resolver ecuaciones diferenciales en el análisis de circuitos CA definimos la **impedancia de los elementos pasivos** como:

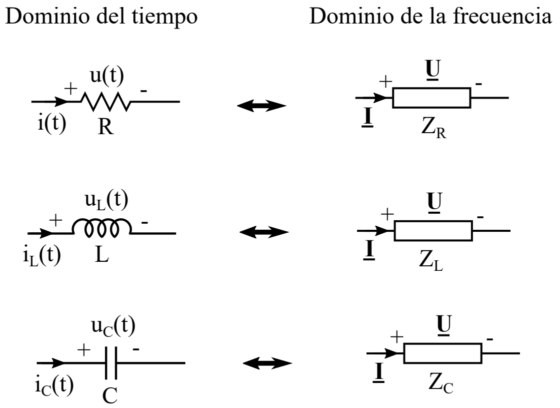
$$Z = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{I}}} \qquad [V] \cdot [A]^{-1} = [\Omega]$$

Admitancia: Inversa de la impedancia

$$Y = \frac{1}{Z} \qquad [\Omega]^{-1} = [S]$$

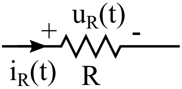
Ley de Ohm en el dominio de la frecuencia

Representamos los tres tipos de elementos pasivos como impedancias.



Ley de Ohm en el dominio de la frecuencia: $\underline{\mathbf{U}} = Z \cdot \underline{\mathbf{I}}$

Impedancia de una resitencia



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

Dominio de tiempo:

$$i_R(t) = \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

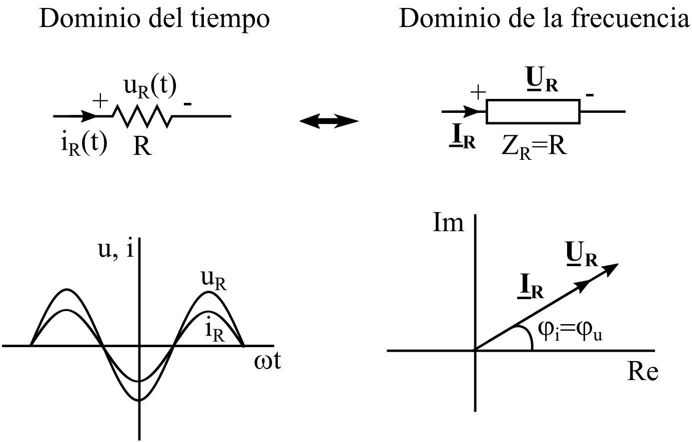
$$u_R(t) = \sqrt{2} \cdot R \cdot I_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Dominio de la frecuencia:

$$\underline{\mathbf{I}}_R = I_R \angle \varphi_i \qquad \underline{\mathbf{U}}_R = R \cdot I_R \angle \varphi_i \qquad Z_R = \frac{\underline{\mathbf{U}}_R}{\underline{\mathbf{I}}_R} = \frac{R \cdot I_R \angle \varphi_i}{I_R \angle \varphi_i} = R$$

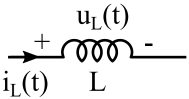
$$\boxed{\textbf{Impedancia de una resistencia:} \quad Z_R = R}$$

Resistencias en el dominio de la frecuencia



La corriente y la tensión están en fase: $\varphi_i = \varphi_u \qquad \Delta\varphi_{u,i} = 0$

Impedancia de una bobina



$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

Dominio del tiempo:

$$i_L(t) = \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

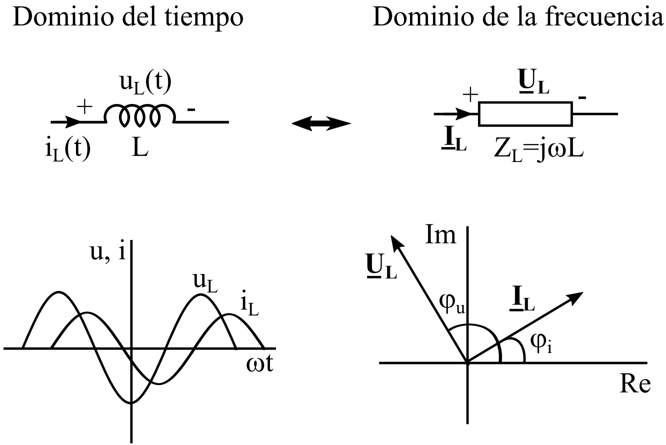
$$u_L(t) = -\sqrt{2} \cdot \omega \cdot L \cdot I_L \cdot sin(\omega t + \varphi_i) = -\sqrt{2} \cdot \omega \cdot L \cdot I_L \cdot \cos(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$$

Dominio de la frecuencia:

$$\underline{\mathbf{I}}_L = I_L \angle \varphi_i \quad \underline{\mathbf{U}}_L = \omega \cdot L \cdot I_L \angle \varphi_i + \frac{\pi}{2} \quad Z_L = \frac{\omega \cdot L \cdot I_L \angle \varphi_i + \frac{\pi}{2}}{I_L \angle \varphi_i} = j\omega L$$

$$\boxed{\textbf{Impedancia de una bobina:} \quad Z_L = j\omega L}$$

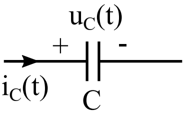
Bobinas en el dominio de la frecuencia



Bobinas: tensión adelantada 90^o respecto a la corriente.

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \qquad \Delta\varphi_{u,i} = \frac{\pi}{2} = 90^o$$

Impedancia de un condensador



$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Dominio del tiempo:

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = -\sqrt{2} \cdot \omega \cdot C \cdot U_C \cdot sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot C \cdot U_C \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2} + \pi)$$

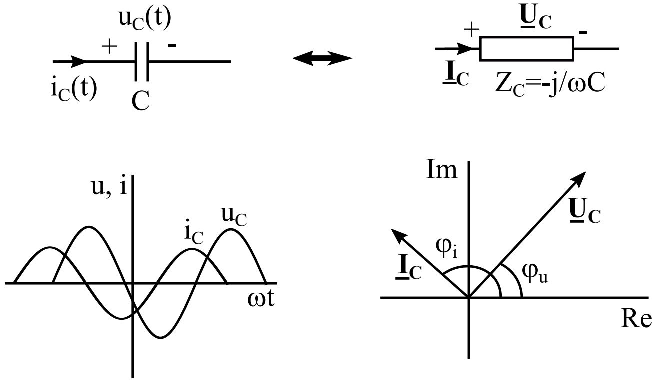
Dominio de la frecuencia:

$$\underline{\mathbf{U}}_C = U_C \angle \varphi_u \quad \underline{\mathbf{I}}_C = j\omega C U_C \angle \varphi_u \quad Z_C = \frac{U_C \angle \varphi_u}{j\omega C U_C \angle \varphi_u} = \frac{-j}{\omega C}$$

Impedancia de un condensador: $\boxed{Z_C = -j/\omega C}$

Condensadores en el dominio de la frecuencia

Dominio del tiempo   Dominio de la frecuencia



Condensador: corriente adelantada 90^o respecto a la tensión

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2} \qquad \Delta\varphi_{u,i} = -\frac{\pi}{2} = -90^o$$

Asociación de impedancias

- En el dominio del tiempo no es posible asociar elementos pasivos de distinta naturaleza:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

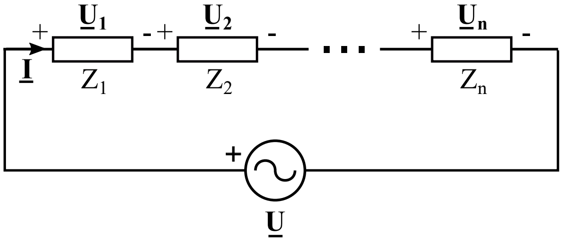
- En el dominio de la frecuencia, la relación entre $\underline{\mathbf{U}}$ y $\underline{\mathbf{I}}$ es la misma para R, L y C:

$$\underline{\mathbf{U}} = Z \cdot \underline{\mathbf{I}}$$

- La representación de R, L y C con impedancias hace que sea posible la asociación de elementos pasivos distintos.

Asociación de impedancias en serie

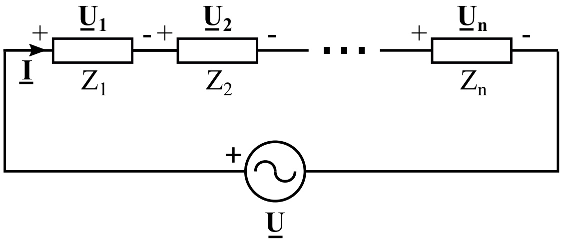
Dos o más impedancias están conectadas en serie si a través de ellas fluye la misma corriente:



El conjunto de n impedancias se puede reemplazar por una impedancia equivalente Z_{eq}

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

Ecuación del divisor de tensión

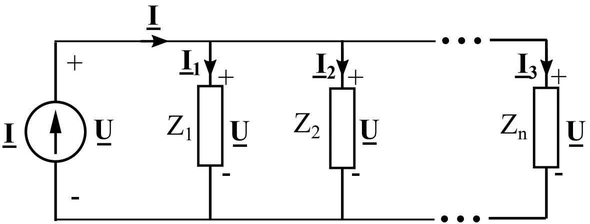


La ecuación del divisor de tensión también es válida en el dominio de la frecuencia. El fasor tensión en la impedancia k es:

$$\underline{\mathbf{U}}_k = \frac{Z_k}{Z_{eq}} \cdot \underline{\mathbf{U}}$$

Asociación de impedancias en paralelo

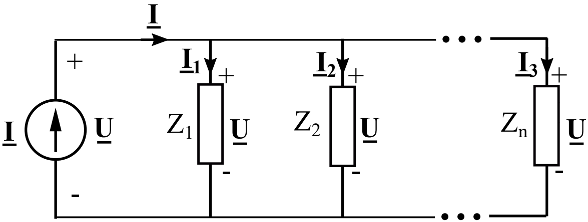
Dos o más impedancias están conectadas en paralelo si tienen la misma caída de tensión entre sus terminales:



El conjunto de n impedancias se puede reemplazar por una impedancia equivalente Z_{eq}

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k} \qquad Y_{eq} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

Ecuación del divisor de corriente



La ecuación del divisor de corriente también es válida en el dominio de la frecuencia. El fasor corriente en la impedancia k es:

$$\underline{\mathbf{I}}_k = \frac{Y_k}{Y_{eq}} \cdot \underline{\mathbf{I}}$$

* Para el caso de dos impedancias en paralelo:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \underline{\mathbf{I}} \qquad \underline{\mathbf{I}}_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot \underline{\mathbf{I}}$$

Impedancia compleja

- Las impedancias que representan los elementos pasivos son:

$$Z_R = R \ \in \mathbb{R} \qquad Z_L = j\omega \cdot L \ \in \mathbb{C} \qquad Z_C = \frac{-j}{\omega \cdot C} \ \in \mathbb{C}$$

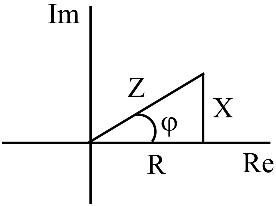
- Si sumamos dos o más elementos de diferente naturaleza podemos encontrar impedancias con parte real e imaginaria:

$$Z = R + jX$$

- La parte real de la impedancia siempre proviene de elementos resistivos, y se llama **Resistencia** (R).
- La parte imaginaria siempre proviene de bobinas y condensadores y se llama **Reactancia** (X).

Componentes de una impedancia compleja

Triángulo de impedancias:



$$Z = R + jX$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}$$

El **factor de potencia** de una impedancia es el coseno de φ

	Resistencia	Reactancia	Impedancia
Resistencia	R	0	R
Bobina	0	$\omega \cdot L$	$j\omega \cdot L$
Condensador	0	$-1/\omega \cdot C$	$-j/\omega \cdot C$

Método de mallas

1. Se asigna un **fasor corriente de malla** a cada malla del circuito
2. Se aplica 2KL en forma fasorial a cada malla del circuito con un criterio de signo consistente llegando a un sistema de ecuaciones en el que los fasores corrientes de malla son las incógnitas.

   Las ecuaciones de malla en forma matricial son:

   $$[Z] \cdot [\underline{\mathbf{I}}_{mesh}] = [\underline{\mathbf{U}}_g]$$

   $[Z]$ es la **matriz de impedancias**:

   Zii=Suma de las impedancias en la malla i

   Zij= - Suma de las impedancias compartidas por la malla i y j
3. Se resuelven las ecuaciones para encontrar las corrientes de malla.

Método de nudos

1. Se asigna una **fasor tensión de nudo** a cada nudo del circuito y se elige uno como **nudo de referencia**.
2. Se aplica 1LC en forma fasorial a cada nudo del circuito con un criterio de signo consistente

   Las ecuaciones de nudo en forma matricial son:

   $$[Y] \cdot [\underline{\mathbf{U}}_{node}] = [\underline{\mathbf{I}}_g]$$

   $[Y]$ es la **matriz de admitancias** cuyos términos son:

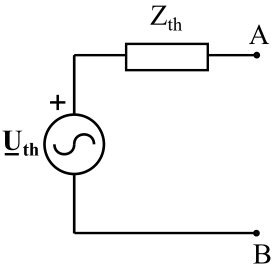
   Yii=Suma de las admitancias conectadas al nudo i

   Yij= - Suma de las admitancias compartidas por los nudos i y j
3. Se resuelven las ecuaciones para encontrar las tensiones de nudos.

Equivalente Thevenin

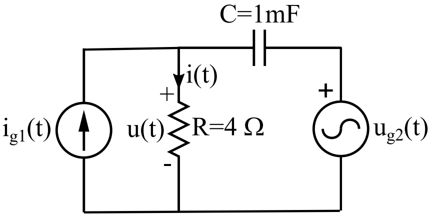
El teorema de Thenvenin es válido para circuitos de CA en el dominio de la frecuencia.

El equivalente Thevenin de un circuito en el dominio de la frecuencia consiste en una fuente de tensión de valor $\underline{\mathbf{U}}_{th}$ y una impedancia en serie Z_{th}



Los métodos que se pueden seguir para obtener los parámetros del equivalente son análogos a los estudiados para los circuitos de CC.

Principio de superposición para el análisis de circuitos con fuentes de distinta frecuencia



$$i_{g1}(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos(100 \cdot t + 90)\, V$$

$$u_{g2}(t) = \sqrt{2} \cdot 50 \cdot \cos(200 \cdot t - 90)\, V$$

¿Qué frecuencia debemos considerar para el cálculo de las impedancias?

Principio de superposición: "La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas de los circuitos cuando las fuentes actúan por separado".

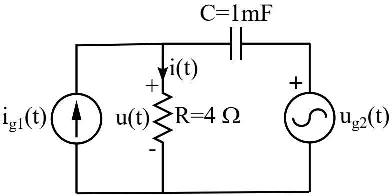
Aplicación del principio de superposición: paso 1

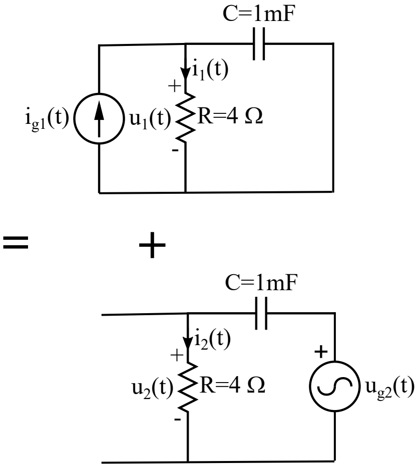
1. Se apagan todas las fuentes de frecuencia ω_2 sustituyendo las fuentes de tensión por cortocircuitos y las fuentes de corriente por circuitos abiertos.
2. Se pasa el circuito al dominio de la frecuencia considerando la frecuencia ω_1 para calcular las impedancias de los elementos pasivos.
3. Se calcula la respuesta del circuito en el dominio de la frecuencia (es decir, los fasores corriente y tensión en las distintas partes del circuito)
4. Se encuentran las corrientes y tensiones instantáneas en el dominio del tiempo que serían la respuesta del circuito a las fuentes de frecuencia ω_1.

Aplicación del principio de superposición: paso 2

1. Se apagan todas las fuentes de frecuencia ω_1.
2. Se recalculan las impedancias de los elementos pasivos para la frecuencia ω_2 y se obtienen los fasores corriente y tensión de los distintos elementos.
3. Se obtienen las corrientes y tensiones en el dominio del tiempo.
4. Se obtiene la respuesta del sistema cuando todas las fuentes actúan simultáneamente como la suma de las respuestas separadas en el dominio del tiempo. Las corrientes y tensiones serán una suma de dos funciones sinusoidales de frecuencias ω_1 y ω_2.

Ejemplo



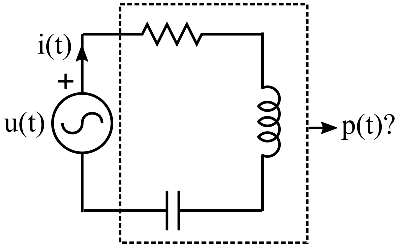


$$i = i_1(t) + i_2(t)$$

$$u = u_1(t) + u_2(t)$$

Potencia instantánea

Imaginemos que queremos calcular la potencia absorbida por la red RLC que se muestra en el diagrama:



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

El ángulo de fase entre u(t) e i(t) es: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Para simplificar tomamos la corriente como origen de fase:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi) \qquad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t)$$

Potencia instantánea de un circuito de CA

La potencia eléctrica instantánea es el producto entre u(t) e i(t):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\omega t)$$

usando: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos\varphi + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$$

usando: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi + U \cdot I \cdot (cos2\omega t \cdot \cos\varphi - \operatorname{sen} 2\omega t \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

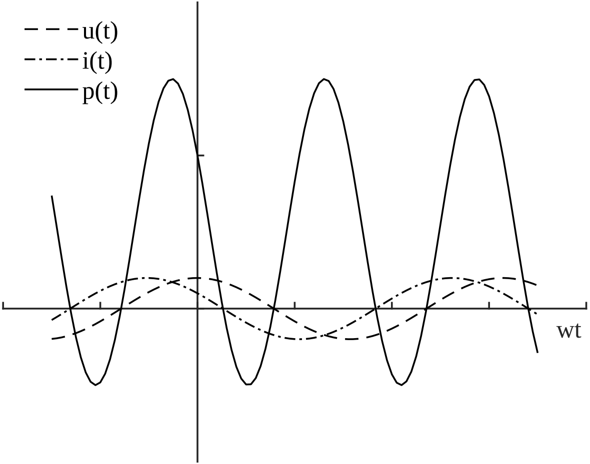
Reordenando:

$$\boxed{\text{p(t)= U}\cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t}$$

Potencia instantánea de un circuito de CA

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$

p(t) es a veces + y a veces -

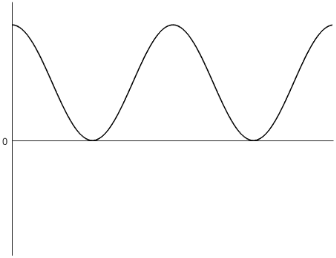


Potencia instantánea: significado físico de sus términos

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$

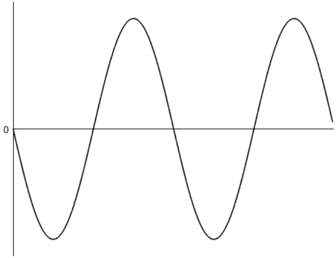
Analizando los dos términos de la potencia por separado:

$$U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t)$$



Valor medio $U \cdot I \cdot cos\varphi$

$$-U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$



Amplitud $U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi$

Potencia instatánea en CA

- La potencia instantánea fluctúa con la frecuencia 2ω siendo a veces positiva y a veces negativa
- p(t) está formado por dos términos:
  1. Uno es siempre positivo y de valor medio $U \cdot I \cdot cos\varphi$.

     Este término es la potencia absorbida en las resistencias.

     $$P = U \cdot I \cdot cos\varphi \qquad \textbf{Potencia activa}$$

  2. El otro es a veces positivo ya veces negativo con valor promedio y amplitud $U \cdot I \cdot sin\varphi$

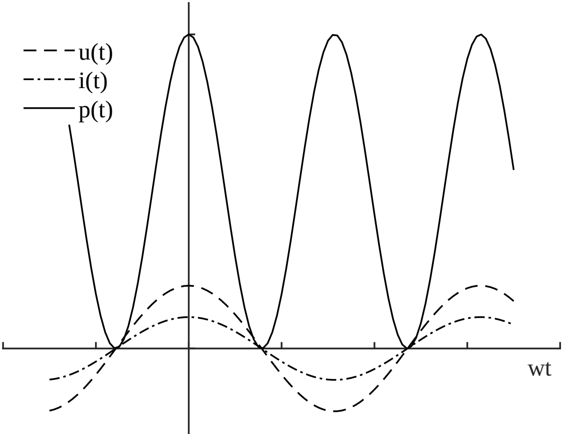
     Este término es la potencia intercambiada con la fuente por bobinas y condensadores.

     $$Q = U \cdot I \cdot sin\varphi \qquad \textbf{Potencia reactiva}$$

Potencia instantánea de una resistencia

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0 \qquad p_R(t) = U \cdot I \cdot (1 + \cos 2\omega t)$$



Potencia instantánea de una resistencia

La potencia instantánea de una resistencia es

$$p_R(t) = U \cdot I \cdot (1 + \cos 2\omega t)$$

- La potencia siempre es positiva. Esto es consistente con lo estudiado: las resistencias **siempre** disipan energía.
- La potencia fluctúa con frecuencia 2ω
- El valor medio de la potencia es $U \cdot I$

Potencia activa y reactiva de una resistencia

Dada la relación entre $\underline{\mathbf{U}}$ y $\underline{\mathbf{I}}$ en las resistencias:

$$\underline{\mathbf{U}} = R \cdot \underline{\mathbf{I}} \qquad \varphi_R = 0^o$$

$$P_R = U \cdot I \cdot \cos\varphi_R = U \cdot I \qquad Q_R = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi_R = 0$$

P también se puede expresar en función de R:

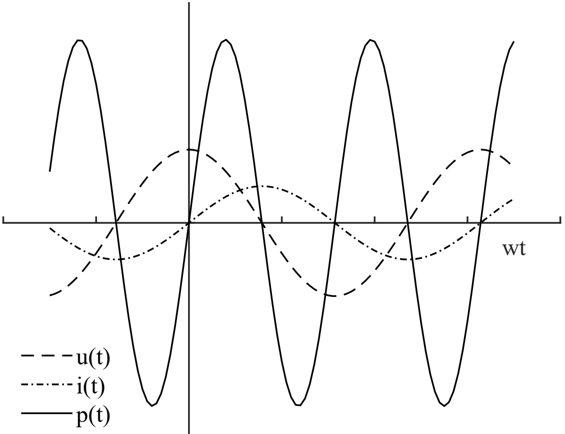
$$U = R \cdot I \qquad P_R = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} > 0$$

La potencia activa de una resistencia siempre es positiva; **las resistencias siempre absorben potencia activa**.

Potencia instantánea de una bobina

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$\varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = 90^o \qquad p_L(t) = -U \cdot I \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$



Potencia instantánea de un bobina

La potencia instantánea de un bobina es:

$$p_L(t) = -U \cdot I \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$

- La potencia de un bobina fluctúa con frecuencia 2ω y es a veces positiva y a veces negativa.
- El valor medio de la potencia instantánea es cero.
- Esto es consistente con lo estudiado: las bobinas no disipan potencia, sino que almacenan energía en un campo magnético.
- En una parte del ciclo, la energía se almacena, y en otra la energía se libera y se devuelve a la fuente.

Potencia activa y reactiva de una bobina

Dada la relación entre $\underline{\mathbf{U}}$ y $\underline{\mathbf{I}}$ en una bobina:

$$\underline{\mathbf{U}} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{\mathbf{I}} \qquad \varphi_L = 90^o$$

$$P_L = U \cdot I \cdot \cos\varphi_L = 0 \qquad Q_L = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi_L = U \cdot I$$

Q también se puede expresar en función de la reactancia:

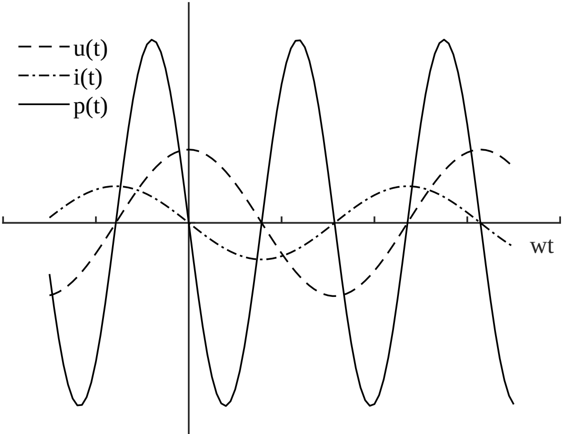
$$U = \omega \cdot L \cdot I = X_L \cdot I \qquad Q_L = X_L \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_L} > 0$$

La potencia reactiva de un bobina es siempre positiva; decimos que **las bobinas siempre absorben potencia reactiva**.

Potencia instantánea de un condensador

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$\varphi_C = \varphi_u - \varphi_i = -90^o \qquad p_C(t) = U \cdot I \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$



La potencia instantánea de un condensador es:

$$p_C(t) = U \cdot I \cdot \operatorname{sen} 2\omega t$$

- La potencia fluctúa con frecuencia 2ω siendo a veces positiva ya veces negativa. Esto significa que el condensador absorbe y entrega potencia alternativamente.
- El valor medio de la potencia instantánea es cero.
- Esto es consistentes con el hecho de que los condensadores no disipan potencia, sino que almacenan energía en un campo eléctrico.
- En una parte del ciclo la energía se almacena y en otra se devuelve a la fuente.

Potencia activa y reactiva de un condensador

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{-j}{\omega \cdot C} \cdot \underline{\mathbf{I}} \qquad \varphi_C = -90^o$$

$$P_C = U \cdot I \cdot \cos \varphi_C = 0 \qquad Q_C = U \cdot I \cdot \operatorname{sen} \varphi_C = -U \cdot I$$

Q también se puede expresar en función de la reactancia:

$$U = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I = -X_C \cdot I \qquad Q_C = X_C \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_C} < 0$$

La potencia reactiva de un condensador siempre es negativa; decimos que **los condensadores generan potencia reactiva**.

Potencia absorbida frente a potencia intercambiada

Hemos observado que existen dos comportamientos diferentes en relación a la potencia en los circuitos de alterna:

1. Las resistencias absorben potencia de las fuentes y la transforman en calor.
2. Las bobinas y condensadores absorben pontencia de las fuentes, la almacenan y la devuelven más tarde.

Tanto la potencia absorbida como la potencia fluctuante son importantes y deben tenerse en cuenta en el análisis de los circuitos de CA.

Sin embargo tienen un impacto diferente en los circuitos porque la primera supone un consumo real de energía el segundo es un flujo continuo de energía entre la fuente y las cargas inductivas y capacitivas.

Potencia activa y reactiva

Dos tipos de energía en los circuitos de CA:

- **Potencia activa (P)**: Potencia absorbida en las resistencias.

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

  P se mide en vatios [W]

- **Potencia reactiva (Q)**: es la potencia que fluctúa entre las bobinas y condensadores y las fuentes.

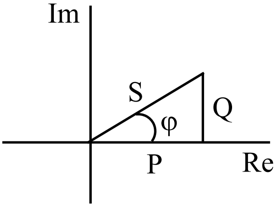
$$Q = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

  Q se mide en voltio-amperios reactivos [var]

- **Potencia compleja ($\mathcal{S}$)**:

$$\mathcal{S} = P + Qj \qquad [VA]$$

Triángulo de potencia y otros parámetros relacionados con la potencia



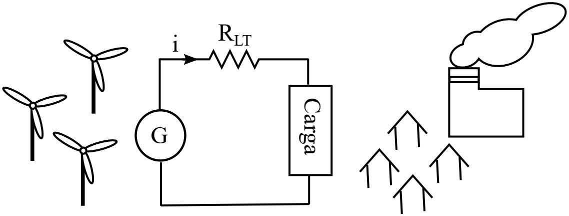
Potencia aparente (S): Es el módulo de la potencia compleja:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I \qquad [VA]$$

Factor de potencia: coseno de la diferencia de fase entre la tensión y corriente.

$$p.f. = \cos\varphi = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

Importancia práctica del factor de potencia



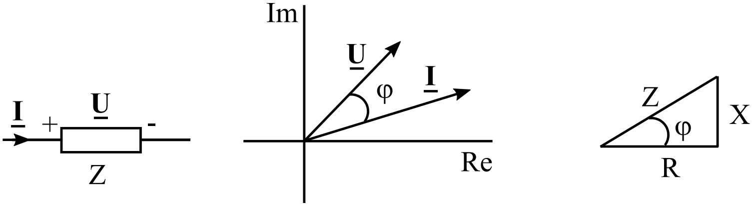
- Las bobinas y condensadores no absorben energía, pero la intercambian con la fuente
- Sin embargo, el flujo de energía sobrecarga las líneas y produce pérdidas y caídas de tensión
- Las compañías eléctricas no cobran por la potencia activa sino por la potencia aparente consumida.
- Idealmente, el factor de potencia debe ser 1 (Q=0)

Potencia activa y potencia reactiva de resistencias, bobinas y condensadores

Resistencia	$\varphi_R = 0^o$	$P_R = R \cdot I^2$	$Q_R = 0$
Bobina	$\varphi = 90^o$	$P_L = 0$	$Q_L = X_L \cdot I^2 = \omega \cdot L \cdot I^2 > 0$
Condensador	$\varphi = -90^o$	$P_C = 0$	$Q_C = X_C \cdot I^2 = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I^2 < 0$

Las resistencias absorben potencia activa, las bobinas absorben potencia reactiva y los condensadores ceden potencia reactiva

Potencia de una impedancia compleja



$$Z = R + jX \qquad\qquad \underline{\mathbf{U}} = Z \cdot \underline{\mathbf{I}}$$

Potencia activa y reactiva

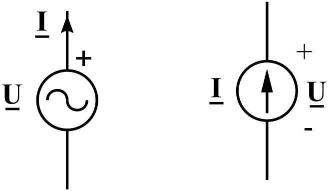
$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = R \cdot I^2 \qquad\qquad Q = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi = X \cdot I^2$$

Potencia compleja $\mathcal{S} = P + Qj = Z \cdot I^2$

Potencia aparente $S = |\mathcal{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I$

Potencia compleja de fuentes de CA

Criterios de signo para la potencia: una fuente entrega potencia cuando la corriente va del terminal de menor tensión al terminal de mayor tensión. La potencia entregada por las fuentes se considera positiva.



$$\mathcal{S}_g = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = P_g + Q_g j$$

La parte real de la potencia compleja es la potencia activa entregada por la fuente y la parte imaginaria es la potencia reactiva entregada por la fuente. En algunos casos P_g o Q_g pueden ser negativas, lo que implica que la fuente absorbe potencia activa o reactiva.

Teorema de Boucherot: balance de potencias en los circuitos de CA

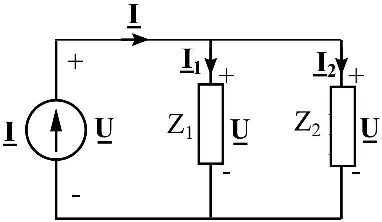
La cantidad total de potencia activa y reactiva absorbida en un circuito eléctrico es igual a la suma de la potencia activa y reactiva absorbida por sus elementos pasivos.

$$P_T = \sum_k P_k \qquad Q_T = \sum_k Q_k$$

Esto quiere decir que la suma de la potencia compleja suministrada por las fuentes es igual a la suma de la potencia compleja absorbida por las impedancias.

$$\sum \mathcal{S}_g = \sum_k P_k + j \cdot Q_k$$

Ejemplo



La potencia suministrada por la fuente es igual a la suma de la potencia compleja absorbida por las impedancias Z_1 y Z_2.

$$\mathcal{S}_g = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{U}} \cdot (\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2)^* = S_{Z_1} + S_{Z_2} = (P_1 + P_2) + j(Q_1 + Q_2)$$