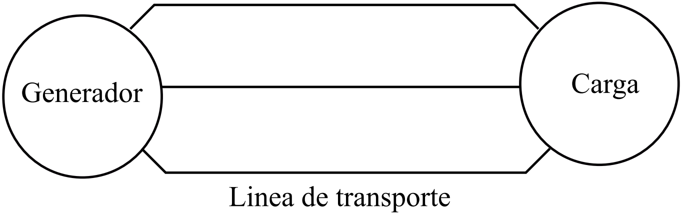
Tema 4: Sistemas trifásicos

Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

Belén García
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Carlos III de Madrid

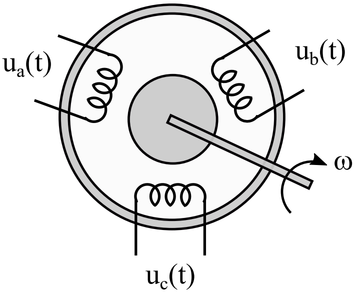
Configuración de sistemas trifásicos

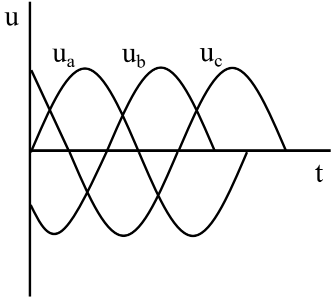
- La mayoría de los sistemas de energía son trifásicos.
- Cada parte del sistema se llama **fase**



Generadores trifásicos

Los generadores trifásicos generan tres tensiones sinusoidales de la misma amplitud y desfase 120^o





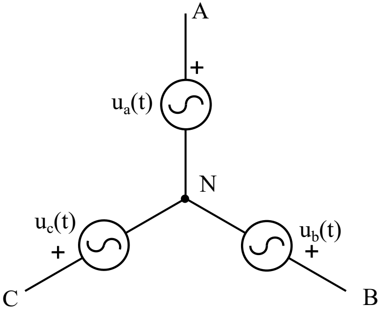
$$u_a(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t)$$

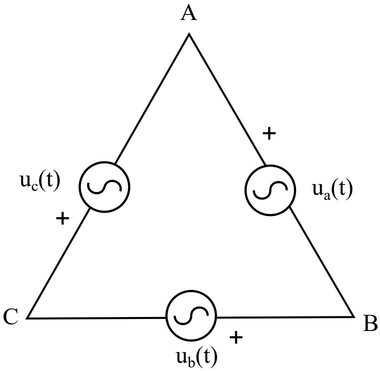
$$u_b(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t - 120^o)$$

$$u_c(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + 120^o)$$

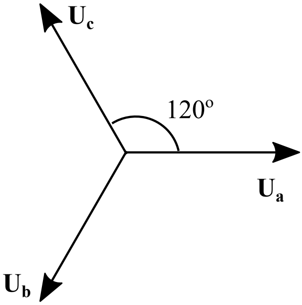
Generadores en estrella y delta

Los generadores trifásicos se representan como tres fuentes de CA conectadas en **estrella** o **triángulo**





Secuencia de fases directa e inversa

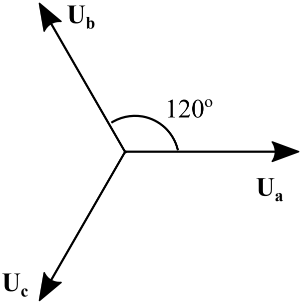


Secuencia directa

$$\underline{\mathbf{U}}_a = U \backslash 0^o$$

$$\underline{\mathbf{U}}_b = U \backslash -120^o$$

$$\underline{\mathbf{U}}_c = U \backslash 120^o$$



Secuencia inversa

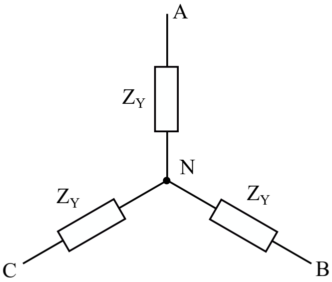
$$\underline{\mathbf{U}}_a = U \backslash 0^o$$

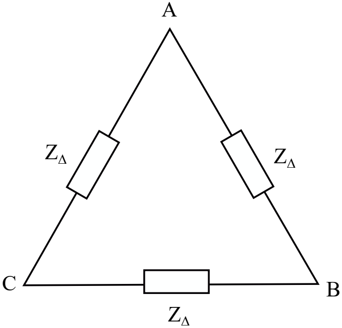
$$\underline{\mathbf{U}}_b = U \backslash 120^o$$

$$\underline{\mathbf{U}}_c = U \backslash -120^o$$

Cargas trifásicas

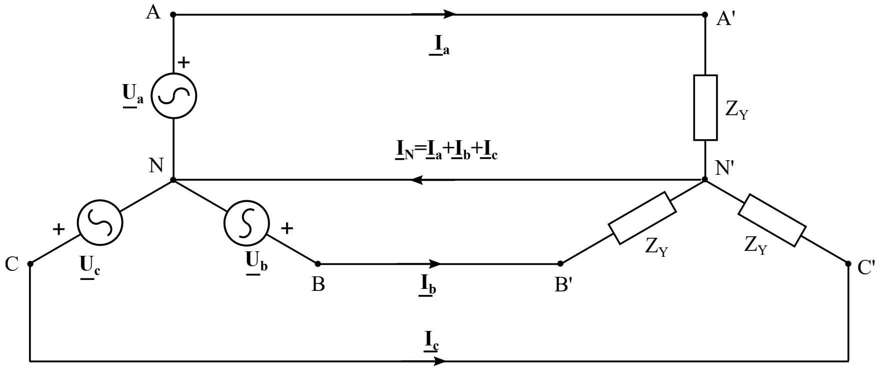
- Las cargas trifásicas se representan como un conjunto de tres impedancias conectadas entre sí.
- En los **sistemas equilibrados** la impedancia conectada a cada fase tiene el mismo valor
- Las cargas se pueden conectar en estrella o en triángulo





Sistemas trifásicos equilibrados estrella-estrella

En los sistemas estrella-estrella los puntos neutros de los generadores y las cargas pueden estar conectados por medio de un **cable de neutro**.



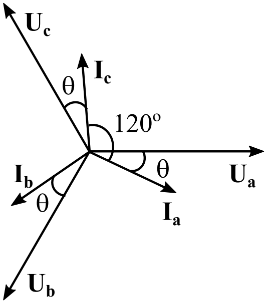
La corriente de cada fase fluye desde el generador hacia la carga y regresa a través del cable neutro.

Corrientes en un sistema Y-Y equilibrado

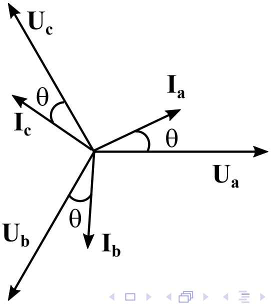
$$\underline{\mathbf{I}_a} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{U}_a}}}{Z_Y} = \frac{U \backslash 0}{Z_Y} \qquad \underline{\mathbf{I}_b} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{U}_b}}}{Z_Y} = \frac{U \backslash -120^o}{Z_Y} \qquad \underline{\mathbf{I}_c} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{U}_c}}}{Z_Y} = \frac{U \backslash 120^o}{Z_Y}$$

Las corrientes también forman un sistema trifásico. Si $Z_Y = |Z_Y| \backslash \theta$

Carga inductiva



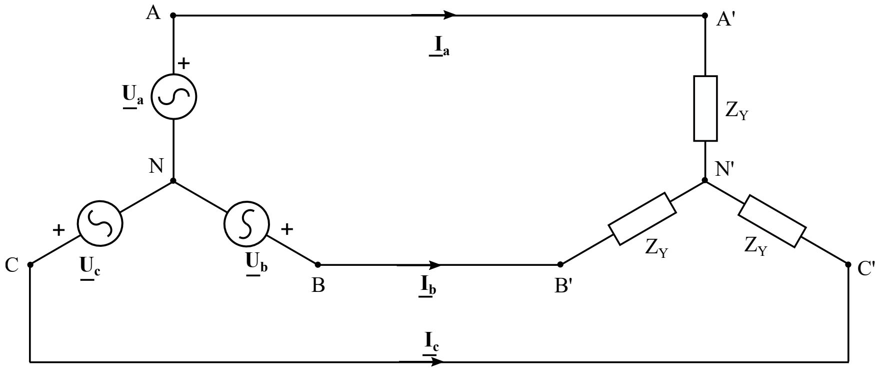
Carga capacitiva



Corriente a través del cable neutro

Como la corriente que fluye a través del neutro es cero, el cable a menudo se suprime.

$$\underline{\mathbf{I}_N} = \underline{\mathbf{I}_a} + \underline{\mathbf{I}_b} + \underline{\mathbf{I}_c} = \frac{U}{Z_Y} \cdot (1 \backslash 0 + 1 \backslash -120^o + 1 \backslash 120^o) = 0$$



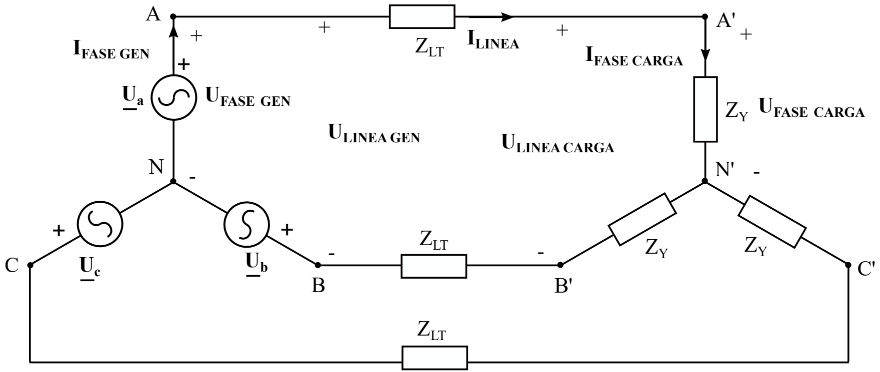
Ahorro en los sistemas trifásicos

- Menor inversión en material
- Pérdidas de línea más bajas para la misma potencia transferida

Tensiones y corrientes de línea y de fase

- **Tensión de fase o tensión simple**: Caída de tensión en una sola fase del generador o de la carga.
- **Tensión de línea o tensión compuesta**: Caída de tensión entre cualquier par de líneas. Podríamos obtener la tensión de línea en el lado del generador o en el lado de la carga.
- **Corriente de fase**: Corriente en una sola fase, es decir, corriente que fluye a través de una de las fuentes ideales o a través de una de las impedancias.
- **Corriente de línea**: Corriente que circula por una de las líneas que conectan el generador y la carga

Tensiones y corrientes de línea y de fase



Relación entre las magnitudes de línea y de fase en un sistema estrella-estrella

Relación entre las corrientes de línea y de fase:

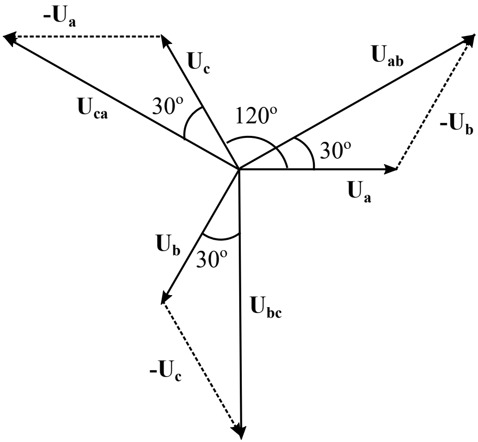
$$\underline{\mathbf{I}}_L = \underline{\mathbf{I}}_F$$

Relación entre las tensiones de línea y de fase:

$$\underline{\mathbf{U}}_{Fa} = \underline{\mathbf{U}}_a \qquad \underline{\mathbf{U}}_{Fb} = \underline{\mathbf{U}}_b \qquad \underline{\mathbf{U}}_{Fc} = \underline{\mathbf{U}}_c$$

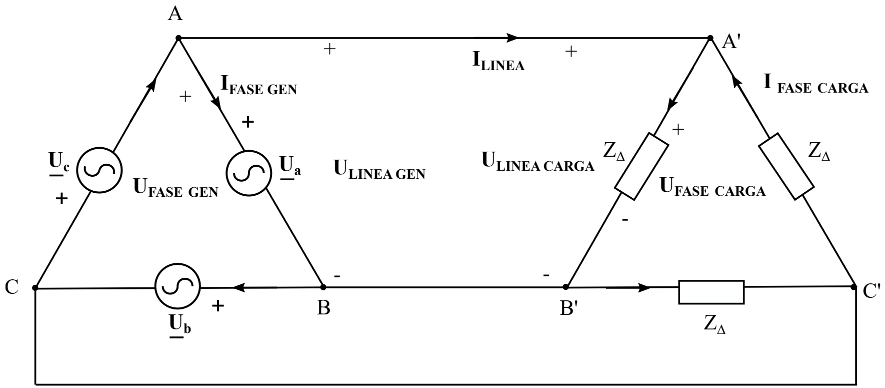
$$\underline{\mathbf{U}}_{La} = \underline{\mathbf{U}}_a - \underline{\mathbf{U}}_b = U \setminus 0 - U \setminus -120^o = \sqrt{3} \cdot U \setminus 30^o = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{Fa} \setminus 30^o$$
$$\underline{\mathbf{U}}_{Lb} = \underline{\mathbf{U}}_{BC} = \underline{\mathbf{U}}_b - \underline{\mathbf{U}}_c = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{Fb} \setminus 30^o$$
$$\underline{\mathbf{U}}_{Lc} = \underline{\mathbf{U}}_{CA} = \underline{\mathbf{U}}_c - \underline{\mathbf{U}}_a = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{Fc} \setminus 30^o$$

Relación entre las magnitudes de línea y de fase en un sistema estrella-estrella



Las tensiones de línea son $\sqrt{3}$ veces mayores que las tensiones de fase y están adelantados 30^o respecto a ellas.

Relación entre las magnitudes de línea y de fase en un sistema triángulo-triángulo



Relación entre las magnitudes de línea y de fase en un sistema triángulo-triángulo

Tensiones de línea y de fase:

$$\underline{\mathbf{U}}_{LINE} = \underline{\mathbf{U}}_{FASE}$$

Corrientes de fase:

$$\underline{\mathbf{I}}_{Fa} = \underline{\mathbf{I}}_{B'C'} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_a}{Z_\Delta} = \frac{U \setminus 0}{Z_\Delta}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{Fb} = \underline{\mathbf{I}}_{A'B'} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_b}{Z_\Delta} = \frac{U \setminus -120^o}{Z_\Delta}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{Fc} = \underline{\mathbf{I}}_{C'A'} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_c}{Z_\Delta} = \frac{U \setminus 120^o}{Z_\Delta}$$

Relación entre las magnitudes de línea y de fase en un sistema triángulo-triángulo

Corrientes de línea:

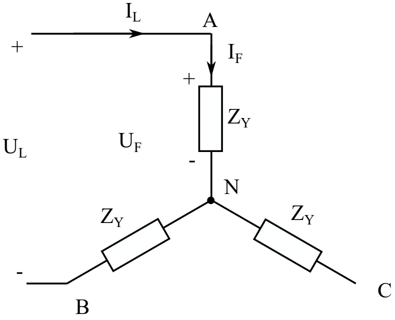
$$\underline{\mathbf{I}}_{La} = \underline{\mathbf{I}}_{Fa} - \underline{\mathbf{I}}_{Fb} = \frac{U \angle 0}{Z_\Delta} - \frac{U \angle -120^o}{Z_\Delta} = \sqrt{3} \cdot \frac{U}{Z_\Delta} \angle -30^o = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{Fa} \angle -30^o$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{Lb} = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{Fb} \angle -30^o$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{Lc} = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{Fc} \angle -30^o$$

Las corrientes de línea son $\sqrt{3}$ veces mayores que las corrientes de fase y están retrasadas 30^o respecto a ellas

Resumen

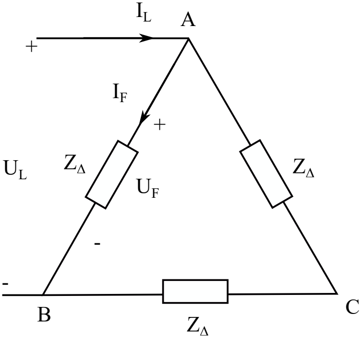


Configuración en estrella

$$U_{linea} = \sqrt{3} \cdot U_{fase}$$

$$I_{linea} = I_{fase}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{LA} = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{FA} \backslash 30$$



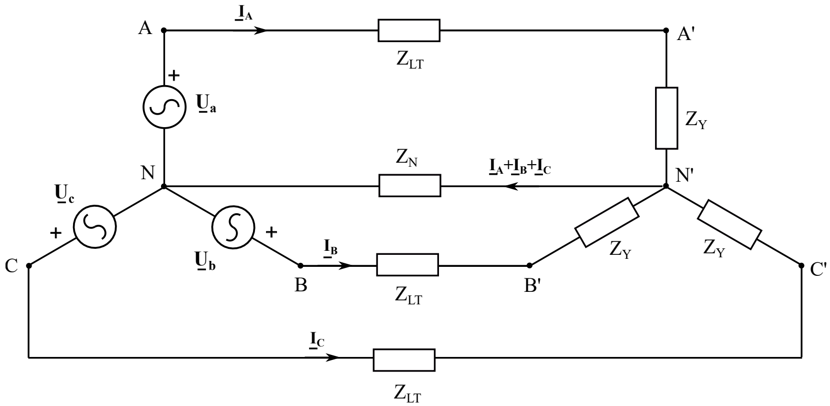
Configuración en triángulo

$$U_{linea} = U_{fase}$$

$$I_{linea} = \sqrt{3} \cdot I_{fase}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{LA} = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{FA} \backslash -30$$

Análisis de sistemas trifásicos: equivalente monofásico

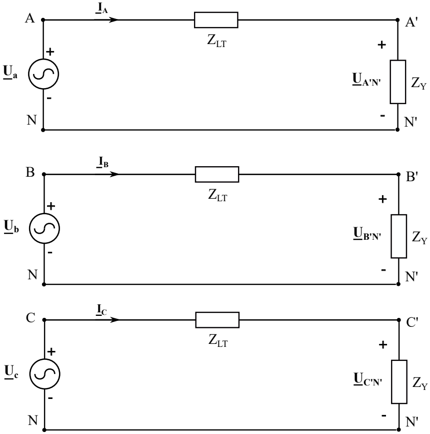


$$-\underline{\mathbf{U}}_a + \underline{\mathbf{I}}_a \cdot (Z_{TL} + Z_Y) + (\underline{\mathbf{I}}_a + \underline{\mathbf{I}}_b + \underline{\mathbf{I}}_c) \cdot Z_N = 0$$

$$-\underline{\mathbf{U}}_b + \underline{\mathbf{I}}_b \cdot (Z_{TL} + Z_Y) + (\underline{\mathbf{I}}_a + \underline{\mathbf{I}}_b + \underline{\mathbf{I}}_c) \cdot Z_N = 0$$

$$-\underline{\mathbf{U}}_c + \underline{\mathbf{I}}_c \cdot (Z_{TL} + Z_Y) + (\underline{\mathbf{I}}_a + \underline{\mathbf{I}}_b + \underline{\mathbf{I}}_c) \cdot Z_N = 0$$

Análisis de sistemas trifásicos



Como no hay flujo de corriente a través del cable de neutro las tres fases se pueden analizar como circuitos independientes.

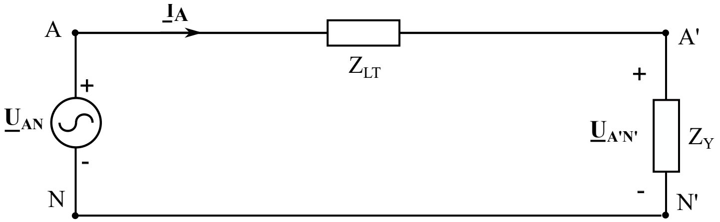
$$-\underline{\mathbf{U}_a} + \underline{\mathbf{I}_a} \cdot (Z_{TL} + Z_Y) = 0$$

$$-\underline{\mathbf{U}_b} + \underline{\mathbf{I}_b} \cdot (Z_{TL} + Z_Y) = 0$$

$$-\underline{\mathbf{U}_c} + \underline{\mathbf{I}_c} \cdot (Z_{TL} + Z_Y) = 0$$

Equivalente fase-neutro de un sistema trifásico

- Representamos los circuitos mediante un equivalente monofásico.
- Como el sistema está equilibrado, las magnitudes eléctricas de las tres fases tienen la misma amplitud y un desfase conocido (120^o).
- El comportamiento de todo el sistema podría derivarse del análisis del llamado **equivalente monofásico** o **equivalente fase-neutro** del sistema.

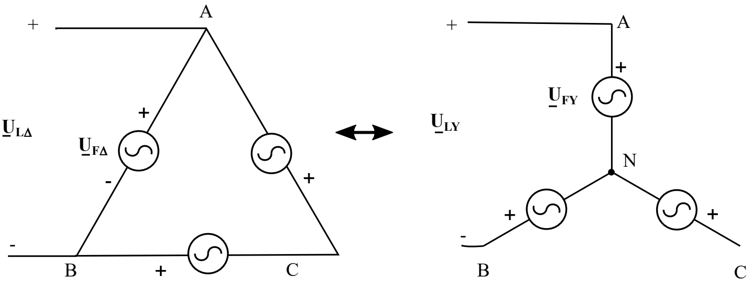


Análisis de circuitos con elementos conectados en triángulo

- En sistemas con una carga o un generador conectado en triángulo no es posible aplicar el equivalente monofásico directamente, ya que en estas configuraciones no hay punto neutro.
- Sin embargo, es posible aplicar una transformación estrella-triángulo para obtener un sistema YY equivalente al original.
- En sistemas $Y\Delta$ o $\Delta\Delta$ o ΔY:
  1. El sistema se transforma en un sistema equivalente YY.
  2. Se resuelve el sistema YY equivalente mediante el equivalente fase-neutro.
  3. Se vuelve al sistema original y se calculan otras variables pedidas.

Transformación ΔY para generadores conectados en triángulo

Los generadores conectados en Δ se pueden transformar en un generador equivalente en Y:

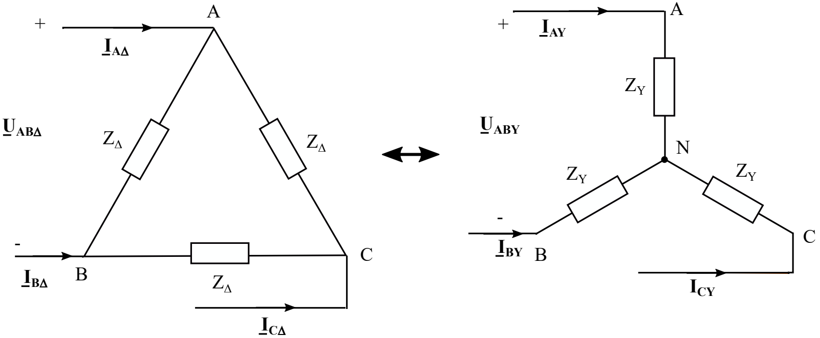


Las dos configuraciones son equivalentes si:

$$\underline{\mathbf{U}}_{LY} = \underline{\mathbf{U}}_{L\Delta}$$

Transformación ΔY para impedancias conectadas en triángulo

Queremos encontrar el valor de Z_Y que hace que las dos cargas sean equivalentes:



Las cargas son equivalentes si al alimentarlas con las mismas tensiones de línea circulan corrientes de línea iguales:

$$\underline{\mathbf{U}}_{AB\Delta} = \underline{\mathbf{U}}_{ABY} => \underline{\mathbf{I}}_{A\Delta} = \underline{\mathbf{I}}_{AY}$$

Transformación ΔY para impedancias conectadas en triángulo

El comportamiento en las tres fases es el mismo excepto por el cambio de fase de 120^o. Analizamos la fase A:

$$\underline{\mathbf{I}}_{A\Delta} = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{FA} \backslash -30^o = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} \cdot \sqrt{3} \backslash -30^o}{Z_\Delta}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{AY} = \underline{\mathbf{I}}_{FA} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} / \sqrt{3} \backslash 30^o}{Z_Y}$$

¿Qué valor de impedancia Z_Y hace que se verifique la identidad $\underline{\mathbf{I}}_{A\Delta} = \underline{\mathbf{I}}_{AY}$?:

$$\frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} \cdot \sqrt{3} \backslash -30^o}{Z_\Delta} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{AB} / \sqrt{3} \backslash 30^o}{Z_Y} \quad => \quad \boxed{Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}}$$

Potencia instantánea

La potencia instantánea de los sistemas trifásicos es constante*:

$$p(t) = u_a(t) \cdot i_a(t) + u_b(t) \cdot i_b(t) + u_c(t) \cdot i_c(t) = 3 \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Como la potencia es constante, las vibraciones en los ejes de los motores y los generadores trifásicos son menores que en los monofásicos, lo que los hace más robustos desde el punto de vista mecánico.

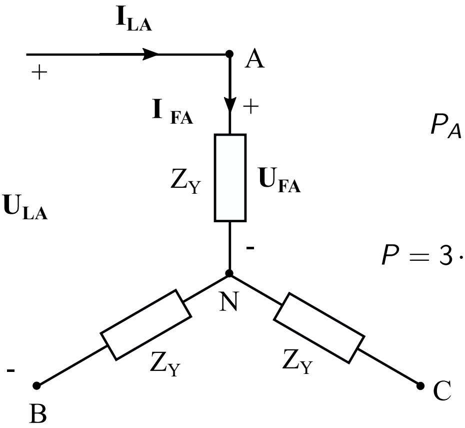
$$u_a(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t) \qquad i_a(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$u_b(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t - 120^o) \qquad i_b(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - 120^o - \varphi)$$

$$u_c(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + 120^o) \qquad i_c(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + 120^o - \varphi)$$

* Leer la demostración en los apuntes.

Potencia activa y reactiva de una carga trifásica en estrella



$$Z_Y = |Z_Y| \backslash \theta$$

$$P = P_A + P_B + P_C$$

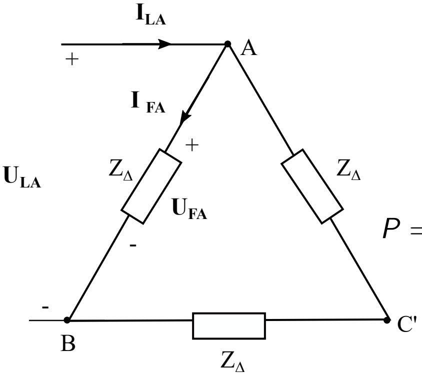
$$P_A = P_B = P_C = U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi$$

$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi$$

$$I_L = I_F \qquad U_F = U_L/\sqrt{3}$$

$$Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Potencia activa y reactiva de una carga trifásica en triángulo



$$P = P_A + P_B + P_C$$

$$P_A = P_B = P_C = U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi$$

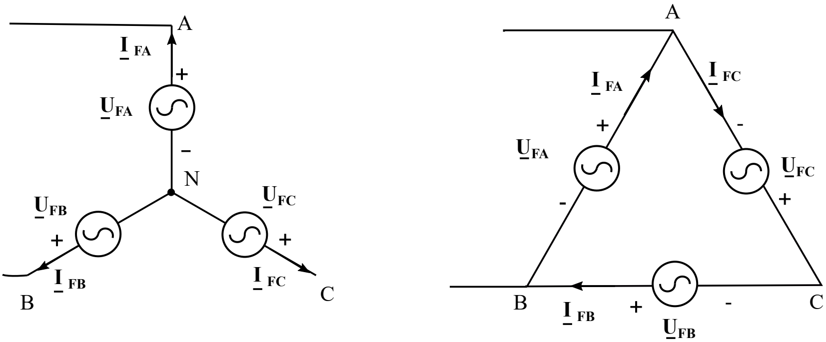
$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi$$

$$U_L = U_F \qquad I_F = I_L/\sqrt{3}$$

$$Z_\Delta = |Z_\Delta| \setminus \theta$$

$$Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

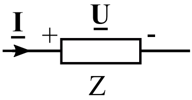
Potencia compleja de un generador trifásico

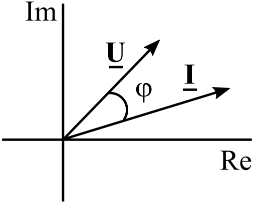


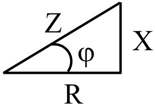
$$\mathcal{S}_g = \underline{\mathbf{U}}_{FA} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{FA}^* + \underline{\mathbf{U}}_{FB} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{FB}^* + \underline{\mathbf{U}}_{FC} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{FC}^* = 3 \cdot \underline{\mathbf{U}}_{FA} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{FA}^*$$

Factor de potencia

Factor de potencia : $\quad p.f. = \cos\varphi$





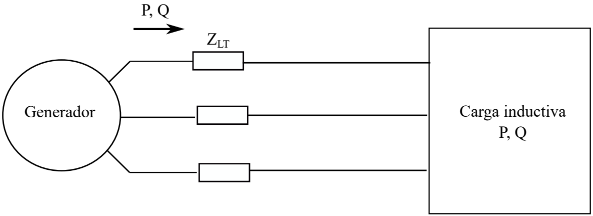


$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctan\frac{Q}{P} = \arctan\frac{X}{R}$$

	Q	φ	$\cos\varphi$	**Carácter**
Cargas resistivas	0	0	1	-
Cargas inductivas	>0	>0	$0 < p.f < 1$	inductivo
Cargas capacitivas	<0	<0	$0 < p.f < 1$	capacitivo

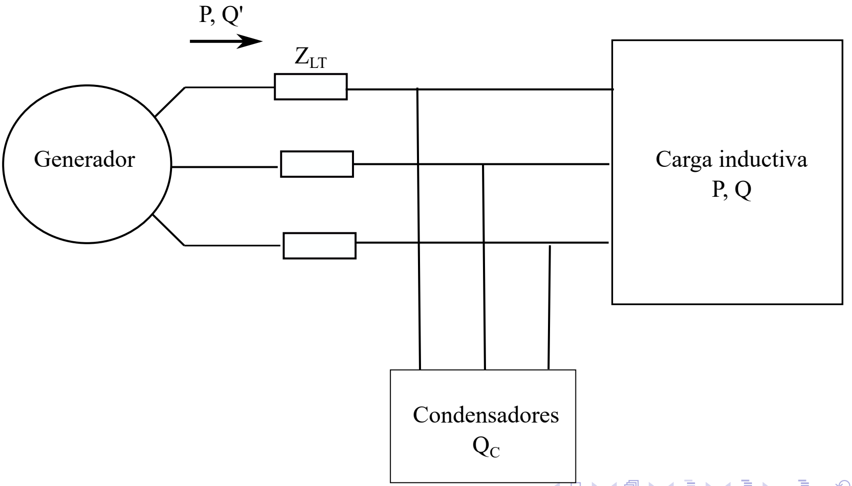
Compensación de potencia reactiva

- Muchas cargas, como los motores eléctricos, son altamente inductivas y a menudo el funcionamiento de los sistemas eléctricos implica grandes cantidades de potencia reactiva transferida desde los generadores hacia las cargas.
- La fluctuación de potencia aumenta la corriente que circula por las líneas aumentando las pérdidas y provocando caídas de tensión.
- Las empresas eléctricas penalizan a los clientes que consumen energía con bajo factor de potencia.



Compensación de potencia reactiva

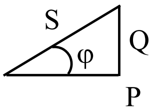
Se conectan bancos de condensadores en paralelo con las cargas, para compensar parte de la potencia reactiva absorbida por ellas.



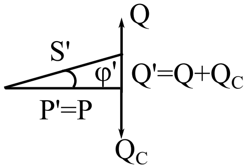
Compensación de potencia reactiva

- Los condensadores no absorben ni entregan potencia activa, por lo que la potencia activa del sistema no cambia. $Q_C < 0$
- La relación entre la potencia activa y reactiva cambia y el ángulo φ' se vuelve más pequeño.
- El factor de potencia se acerca a 1

Sistema inicial



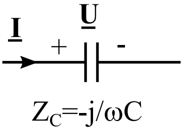
Sistema con condensadores



$$Q' = Q + Q_C$$

Potencia reactiva de un condensador

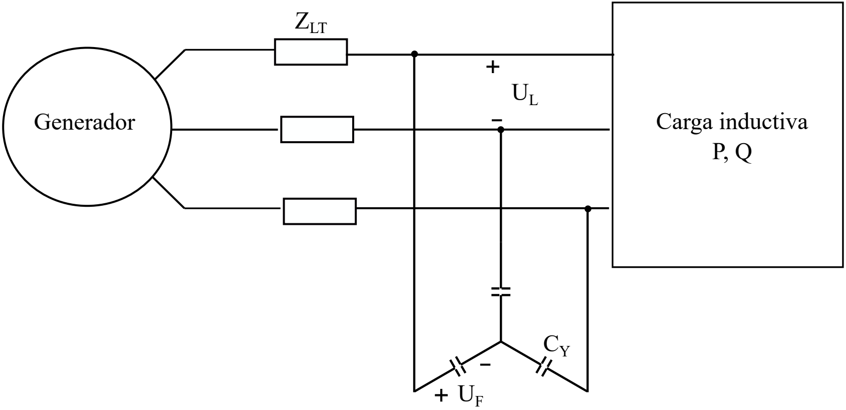
Un condensador de capacidad C, con caída de tensión $\underline{\mathbf{U}} = U \setminus \varphi_u$ y corriente $\underline{\mathbf{I}} = I \setminus \varphi_i$



$$Q_C = X_C \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_C} = -\omega \cdot C \cdot U^2$$

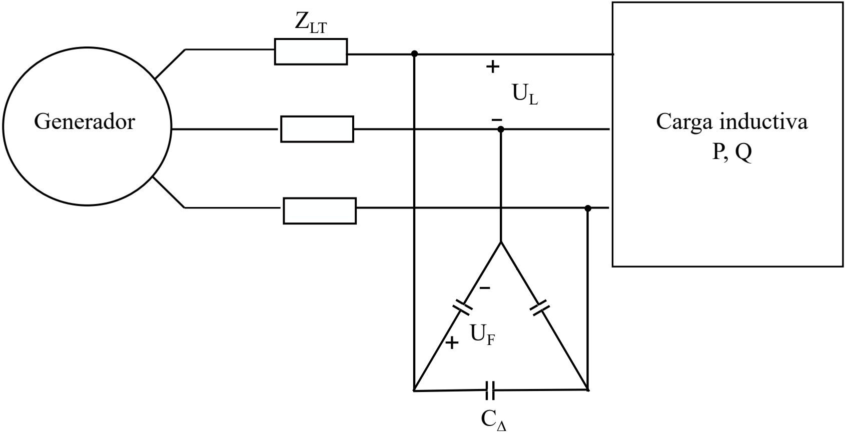
$$P_C = 0$$

Potencia reactiva de un banco de condensadores en estrella



$$Q_{CY} = -3 \cdot \omega \cdot C_Y \cdot \underbrace{U_{Ph}}_{U_L/\sqrt{3}}^{2} = -\omega \cdot C_Y \cdot U_L^2$$

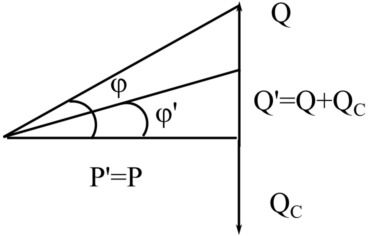
Potencia reactiva de un banco de condensadores en triángulo



$$Q_{C\Delta} = -3 \cdot \omega \cdot C_{\Delta} \cdot \underbrace{U_{Ph}}_{U_L}^{2} = -3 \cdot \omega \cdot C_{\Delta} \cdot U_L^2 \qquad (1)$$

Capacidad requerida para obtener un factor de potencia determinado

Queremos compensar la potencia reactiva de un sistema que trabaja con factor de potencia $\cos\varphi$ para que el factor de potencia sea $\cos\varphi'$



$$Q = P{\cdot}\tan\varphi \qquad Q' = P{\cdot}\tan\varphi' \qquad Q_C = Q - Q' = P{\cdot}(\tan\varphi - \tan\varphi')$$

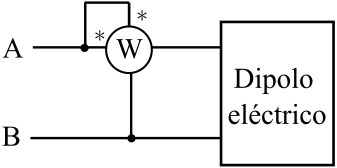
$$C_\Delta = \frac{P\cdot(\tan\varphi - \tan\varphi')}{3\cdot\omega\cdot U_L^2} \qquad C_Y = \frac{P\cdot(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega\cdot U_L^2}$$

Medida de potencia: principio de funcionamiento de los vatímetros

Un vatímetro es un aparato de medida que proporciona información sobre la potencia absorbida por un dipolo eléctrico.

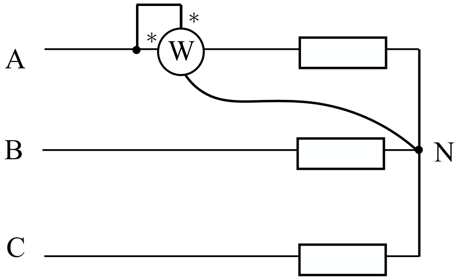
Los vatímetros incorporan dos circuitos de medida: la bobina amperimétrica y la bobina de voltimétrica.

Los terminales de las bobinas amperimétrica y voltimétrica de la misma polaridad se marcan con un asterisco *.



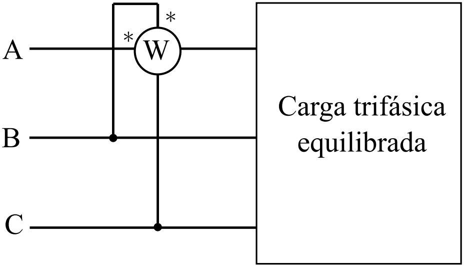
$$W = I_A \cdot U_{AB} \cdot \cos(\widehat{\underline{\mathbf{U}}_{AB}\underline{\mathbf{I}}_A})$$

Medida de la potencia activa en sistemas con neutro accesible



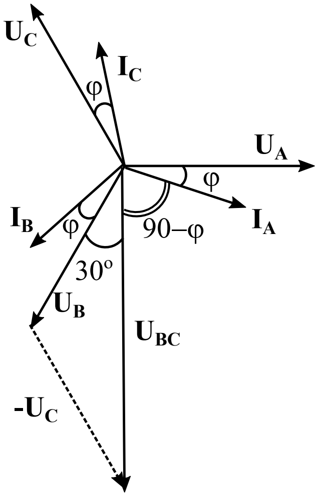
$$W = I_A \cdot U_{AN} \cdot \cos(\underline{\mathbf{U}}_{AN} \widehat{\ } \underline{\mathbf{I}}_A) = U_{Ph} \cdot I_{Ph} \cdot \cos\varphi = \frac{P}{3}$$

Medida de la potencia reactiva de un sistema trifásico con un vatímetro

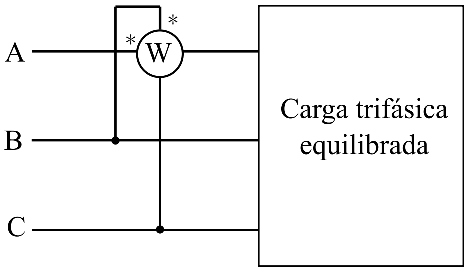


$$W = U_{BC} \cdot I_A \cdot \cos(\underline{\mathbf{U}}_{BC} \measuredangle \underline{\mathbf{I}}_A)$$

Angle $\underline{\mathbf{U}}_{BC} \angle \underline{\mathbf{I}}_A$

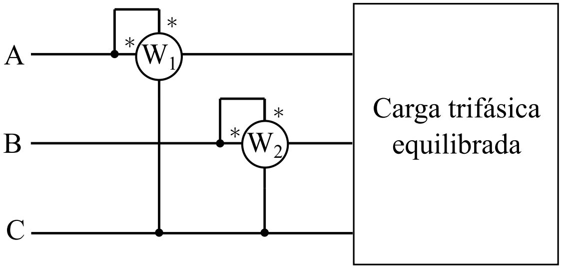


Medida de la potencia reactiva de un sistema trifásico con un vatímetro



$$W = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\underline{\mathbf{U}}_{BC} \measuredangle \underline{\mathbf{I}}_A) = U_L \cdot I_A \cdot cos(90 - \varphi) = U_L \cdot I_A \cdot sen(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

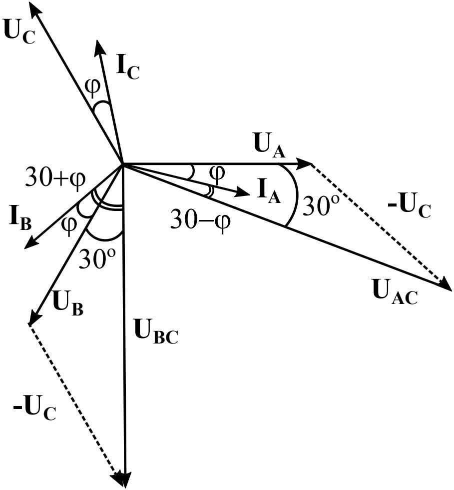
El método de los dos vatímetros



$$W_1 = U_{AC} \cdot I_A \cdot \cos(\underline{\mathbf{U}}_{AC} \angle \underline{\mathbf{I}}_A)$$

$$W_2 = U_{BC} \cdot I_B \cdot \cos(\underline{\mathbf{U}}_{BC} \angle \underline{\mathbf{I}}_B)$$

Ángulos $\underline{\mathbf{U}}_{AC} \angle \underline{\mathbf{I}}_{A}$ y $\underline{\mathbf{U}}_{BC} \angle \underline{\mathbf{I}}_{B}$



El método de los dos vatímetros

$$W_1 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\underline{\mathbf{U}}_{AC} \wedge \underline{\mathbf{I}}_A) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30 - \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

$$W_2 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\underline{\mathbf{U}}_{BC} \wedge \underline{\mathbf{I}}_B) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30 + \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

La potencia activa y reactiva del sistema trifásico se pueden obtener como la suma y la diferencia de las medidas de los dos vatímetros:

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P$$

$$W_1 - W_2 = \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$