BY NC ND

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Fundamentos de Ingeniería Eléctrica
Tema 1: Conceptos básicos.

Belén García
Departamento de Ingeniería Eléctrica

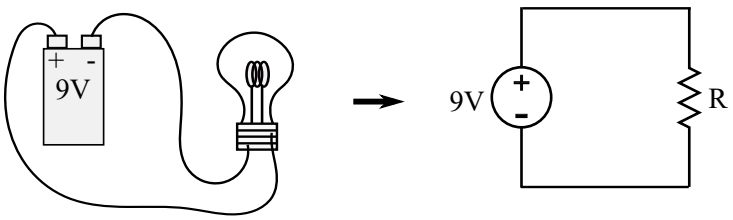
En este primer tema se revisarán las principales variables de interés para el análisis de circuitos y algunas de las relaciones que existen entre ellas. Además se introducirán los elementos principales de los circuitos eléctricos.

1 Los circuitos eléctricos

Un circuito eléctrico es un modelo que representa un sistema real. El modelado de los sistemas mediante circuitos permite calcular de forma sencilla la respuesta de las distintas partes del sistema ante determinadas excitaciones.

En este curso aprenderemos algunas relaciones básicas que nos ayudarán a conocer cuál es la respuesta de distintos tipos de sistemas ante distintos tipos de excitaciones. Las relaciones que estudiaremos están basadas en las leyes del electromagnetismo, pero en muchos casos los sistemas se podrán analizar mediante ecuaciones algebraicas lineales, lo que facilitará mucho el estudio.

El siguiente diagrama representa una bombilla alimentada por una pila. Si queremos conocer cuál es la potencia consumida por la bombilla, podemos modelar el sistema representando la bombilla como una resistencia y la pila como una fuente de tensión de corriente continua. La aplicación de algunas reglas básicas nos permitirá calcular la corriente que circula por la bombilla y, a partir de ella, podremos conocer el valor de la potencia absorbida.



Tal como ocurre en otros campos de la física y de la ingeniería, los modelos son siempre representaciones aproximadas de la realidad. Algunos fenómenos que son importantes

para el estudio que se pretende hacer se representan adecuadamente, mientras que otros se desprecian. Por ejemplo, en el caso anterior hemos despreciado el efecto de los cables que conectan la pila y la bombilla para centrarnos en los elementos que nos interesa analizar.

En este curso se adoptarán las siguientes simplificaciones:

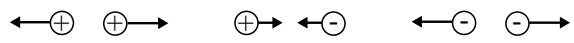
- Consideraremos **circuitos de parámetros concentrados**, esto quiere decir que el efecto de cada elemento está concentrado en un punto del espacio. De esta manera asumimos que la corriente se mueve a velocidad infinita entre los distintos elementos del circuito.
- Analizaremos los **circuitos en régimen permanente**, asumiendo que el sistema ha trabajado bajo las mismas condiciones un tiempo suficientemente largo como para alcanzar este estado.

  El estudio de los fenómenos transitorios es muy importante para el análisis de los sistemas eléctricos y se abordará en cursos posteriores. A pesar de ello se debe tener en cuenta que los sistemas eléctricos operan la mayor parte del tiempo en régimen permanente, por lo que lo que estudiaremos en este curso nos permitirá representar el comportamiento de los sistemas de manera realista durante una buena parte de su tiempo de operación.

2 Variables para el análisis de circuitos

2.1 Carga eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad de los materiales que constituye el origen de la interacción electrostática. Hay dos tipos de carga eléctrica que denominamos carga positiva y carga negativa. La interacción entre dos cargas depende del su signo: las cargas de igual signo se repelen mientras que las cargas de distinto signo se atraen.

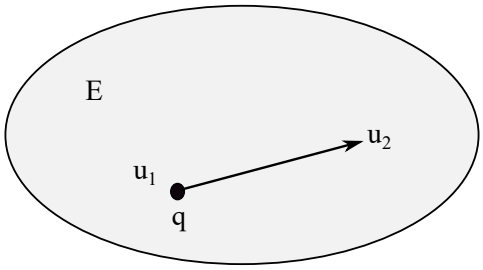


La carga elemental es la carga del electrón, pero en el Sistema Internacional de Unidades (SI) la unidad de carga es el Culombio [C].

$$q_{e^-} = -1.6 \cdot 10^{-19} C$$

2.2 Tensión o voltaje

La presencia de carga eléctrica en una región del espacio da lugar a una distribución de campo eléctrico. Tal como ocurre con las masas en los campos gravitatorios, cualquier carga que esté en el interior de un campo eléctrico se verá afectada por este campo, y según el punto del espacio en el que esté la carga tendrá una cierta **energía potencial eléctrica**. Esto es lo que llamamos el **potencial, voltaje o nivel de tensión** de este punto.



El movimiento de una carga entre dos puntos del campo eléctrico implica un cambio de su energía potencial. Definimos la **diferencia de potencial o caída de tensión** entre dos puntos como el trabajo que hay que suministrar para desplazar una carga entre dos puntos del espacio. Desde el punto de vista matemático la diferencia de potencial se expresa como la derivada del trabajo respecto a la carga:

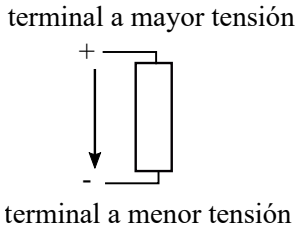
$$u = \frac{dw}{dq} \tag{1}$$

En el SI la diferencia de potencial o tensión se expresa en Voltios [V].

El concepto de diferencia de potencial se puede comprender fácilmente mediante un símil gravitatorio. Para mover una masa desde un punto de menor energía potencial hasta otro de mayor energía potencial (por ejemplo para mover una piedra desde el suelo hasta encima de una mesa) es necesario suministrar trabajo. Por otra parte, al mover una masa desde un punto de mayor energía potencia hasta otro de menor energía potencial se liberará trabajo que se emplea, por ejemplo, en acelerar la masa.

Lo mismo ocurre con el movimiento de las cargas en el seno de un campo eléctrico: las cargas se mueven entre puntos del circuito que se encuentran a distinto nivel de tensión (i.e. distinto nivel de energía potencial eléctrica), y eso produce absorciones o liberaciones de energía.

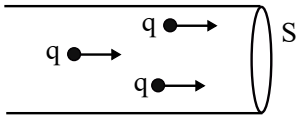
En el análisis de circuitos frecuentemente es interesante marcar qué terminal de un elemento se encuentra a mayor potencial y cuál a menor potencial. A esto se le llama la **polaridad** del elemento. El punto de mayor potencial se marcará con un signo + y el signo a menor potencial con un signo -. También se puede usar una flecha para marcar los terminales: en análisis de circuitos eléctricos la cola de la flecha se coloca en el punto de mayor potencial y la punta en el de menor potencial. En estas notas se usará la notación con los signos +/-.



2.3 Corriente eléctrica

Los materiales conductores son aquellos que contienen electrones libres que pueden moverse con relativa facilidad. Cuando se aplica una diferencia de potencial entre dos puntos de un

material conductor, los electrones se moverán en su interior dando lugar a una corriente eléctrica. El sentido de circulación de la corriente se marca con una flecha.



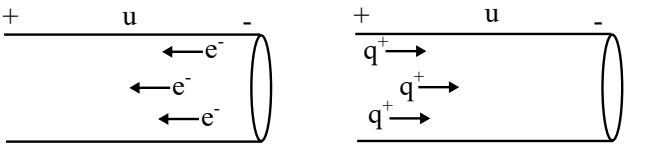
La **corriente eléctrica** o intensidad, se define como la carga total que fluye a través de una sección de un material conductor por unidad de tiempo:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \tag{2}$$

La corriente se mide en amperios [A] en el SI.

Hay dos criterios de signo que se pueden adoptar a la hora de definir la corriente eléctrica:

- **Representación real**. Considera la corriente eléctrica como un movimiento de cargas negativas (electrones). Si se aplica una diferencia de potencial a un conductor, los electrones se mueven desde el punto de potencial menor (-) hacia el punto de potencial mayor (+). Esto es lo que ocurre en los sistemas reales.
- **Representación convencional**. Es el criterio que se suele adoptar en análisis de circuitos eléctricos y es el que se usará en este curso. En la representación convencional, se considera la corriente como un movimiento de cargas positivas desde el punto de mayor potencial del conductor (+) hacia el punto de menor potencial (-). Considerar un movimiento de una cantidad carga negativa en un sentido es equivalente a considerar el movimiento de la misma cantidad de carga negativa en sentido contrario.



2.4 Potencia eléctrica

Muchos problemas de análisis de circuitos tienen como objetivo calcular la cantidad de potencia entregada o absorbida por un elemento de un circuito.

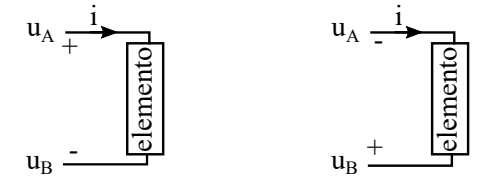
La potencia desarrollada por un sistema físico se define como el trabajo realizado por unidad de tiempo:

$$p = \frac{dw}{dt} \tag{3}$$

Considerando las expresiones que se introdujeron anteriormente para definir la tensión (1) y la corriente (2), se puede obtener una expresión general para calcular la **potencia eléctrica absorbida o suministrada por un elemento de un circuito eléctrico**, en función de la corriente que fluye a través de éste o de la caída de tensión entre sus terminales:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{u \cdot dq}{dt} = u \cdot i \tag{4}$$

En algunos casos un elemento de un circuito absorbe potencia, mientras que en otros entrega potencia. Si observamos la siguiente figura, podemos ver que en el diagrama del la izquierda la corriente (es decir, las cargas eléctricas) se mueve desde el punto de mayor tensión (u_A) hacia el punto de menor tensión (u_B). Las cargas pierden energía al atravesar este elemento, por lo que podemos decir que el elemento **absorbe potencia**. Por otra parte, en el diagrama de la derecha, la corriente se mueve desde un punto con menor tensión hacia un punto de mayor tensión. De este modo, las cargas ganan energía al atravesar el elemento y decimos que el elemento **entrega potencia**.



Criterio de signos

Como estudiaremos más adelante, en los circuitos eléctricos diferenciaremos entre los elementos activos, que son elementos que entregan energía al circuito, y los elementos pasivos, que absorben energía del circuito.

Para definir el criterio de signos adoptado en este curso por el momento nos centraremos en las resistencias como elementos pasivos:

- La potencia entregada por los elementos activos (fuentes de tensión y corriente) se considerará positiva. En ocasiones las fuentes pueden absorber potencia, en ese caso se tomará la potencia de la fuente negativa.
- La potencia absorbida por las resistencias se considerará positiva.

Entre los distintos elementos de un circuito siempre existirá un **balance de potencias** cumpliéndose que la energía cedida por los elementos activos es igual a la energía absorbida por los elementos pasivos:

$$p_{fuentes} = p_{resistencias} \tag{5}$$

3 Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff son una herramienta clave para el análisis de los circuitos eléctricos. Estas leyes, establececidas por Gustav Kirchhoff en 1848, pemiten encontrar relaciones algebraicas entre las corrientes y las tensiones de un circuito eléctrico.

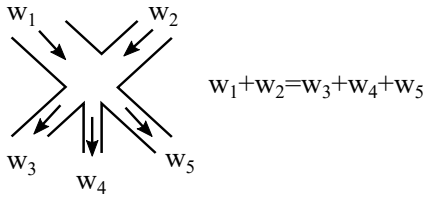
3.1 Primera ley de Kirchhoff: ley de las corrientes

La primera ley de Kirchhoff (1LK) está basada en el principio de conservación de la carga y establece que **la suma algebraica de las corrientes en cualquier nudo de un circuito es cero**.

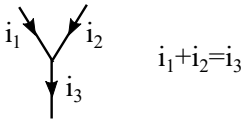
$$\sum i = 0 \tag{6}$$

Un nudo en un circuito es un punto de unión entre dos o más elementos.

La primera ley de Kirchhoff se puede ilustrar mediante un símil hidráulico. Imaginemos un sistema en el que varias tuberías se unen en una junta. Es claro que el caudal de agua que entra a la junta es igual al caudal que sale de ella, ya que en la junta no se puede almacenar agua.



Del mismo modo, la carga eléctrica no se puede almacenar en ningún punto de un circuito, por lo que la cantidad de carga (i.e. la corriente) que entra en un nudo de un circuito es igual a la cantidad de carga que sale de él.



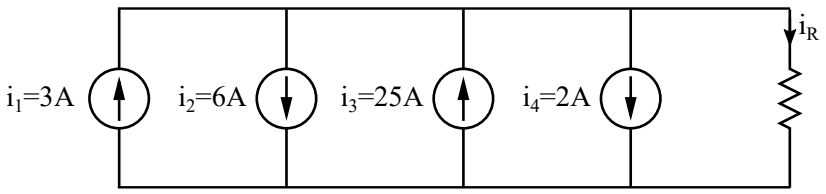
Para aplicar la 1LK se debe establecer un criterio de signo. En estas notas se tomarán las corrientes salientes del nudo como positivas y las corrientes entrantes como negativas. [1].

En el ejemplo anterior la ecuación que se obtendría al aplicar la 1LK es la siguiente:

$$\sum i = 0 \quad => \quad -i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

Ejemplo

En el siguiente circuito, calcular el valor de i_R:



Para encontrar el valor de la corriente i_R se puede considerar que todas las ramas del circuito se unen en un nudo que está situado en su parte superior. Aplicando 1LK:

[1] La elección del criterio de signo para la aplicación de las leyes de Kirchhoff es arbitraria. Si consideramos el criterio opuesto obtendríamos las mismas ecuaciones al quedar los dos lados de la ecuación multiplicados por -1)

$$\sum i = 0 \quad => \quad -i_1 + i_2 - i_3 + i_4 + i_R = 0$$

$$i_R = 3 - 6 + 25 - 2 = 20A$$

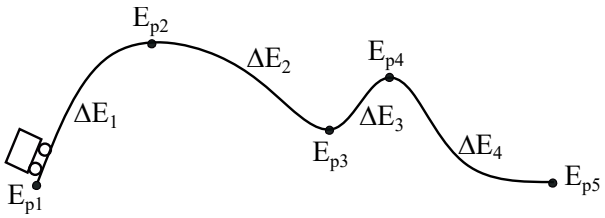
3.2 Segunda ley de Kirchhoff: ley de las tensiones

La segunda ley de Kirchhoff's (2LK) está basada en el principio de conservación de la energía y establece que **la suma algebraica de las tensiones a lo largo de un camino cerrado de un circuito es cero**.

$$\sum u = 0 \tag{7}$$

Si recordamos que la tensión de cada punto de un circuito es su energía potencial eléctrica, la 2LK se puede ilustrar mediante un símil mecánico.

La siguiente figura representa una montaña rusa en la que la velocidad del vagón es la misma al principio y al final del recorrido.



En cada punto del recorrido el vagón tiene una cierta energía potencial $E_{pk} = m \cdot g \cdot h_k$, de manera que cuando el vagón se mueve entre dos puntos pierde o gana energía potencial:

$$\Delta E_1 = E_{p2} - E_{p1},\ \Delta E_2 = E_{p3} - E_{p2},\ \Delta E_3 = E_{p4} - E_{p3},\ \Delta E_4 = E_{p5} - E_{p4}$$

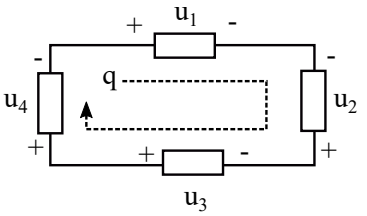
De acuerdo al principio de conservación de la energía la energía potencial que se gana en los tramos de subida es igual a la energía potencial que se pierde en los tramos de bajada:

$$\Delta E_1 + \Delta E_3 = \Delta E_2 + \Delta E_4$$

Del mismo modo, cuando las cargas eléctricas (i.e. la corriente eléctrica) se mueven dentro de un camino cerrado de un circuito perderán energía potencial en algunos tramos y ganarán energía en otros, siendo el balance de las pérdidas y las ganancias de energía igual a cero.

El siguiente diagrama muestra un circuito con cuatro elementos caracterizados mediante una cierta caída de tensión (u_k). Cuando la carga eléctrica fluye a través de estos elementos eleva su nivel de tensión en los tramos en los que la carga pasa de un punto de más potencial a un punto de menos potencial (cuando según la dirección asignada vaya desde un signo + a un signo -, como pasa en el elemento 1 y en el 4). En otros tramos la carga pasará de un punto de menor potencial a otro con mayor potencial por lo que ganará energía potencial

(esto ocurre en los elementos 2 y en el 3, ya que en ellos la carga va de - a +). De acuerdo a la 2LK, la suma de elevaciones de tensión será iguales a la suma de las caídas de tensión.



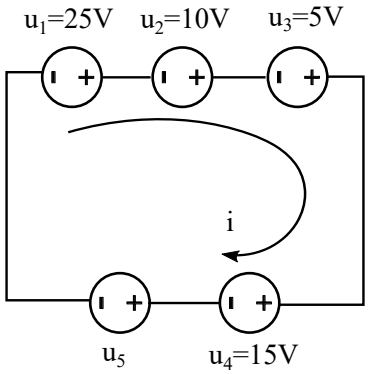
$u_1+u_4=u_2+u_3$

Si asignamos signo positivo a las caídas de tensión y signo negativo a las elevaciones [2] la ecuación de la 2LK queda:

$$\sum u = 0 \quad => \quad u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0$$

Ejemplo

Dado el siguiente circuito, calcular el valor de u_5:



Aplicando 2LK:

$$\sum u = 0 \quad => \quad -u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

$$u_5 = 25 + 10 + 5 - 15 = 25V$$

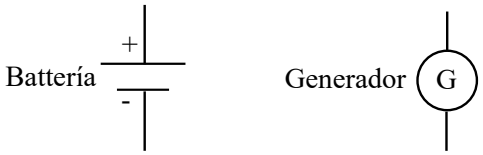
4 Elementos de los circuitos eléctricos

Los circuitos eléctricos están compuestos por un conjunto de elementos conectados entre sí de manera que es posible el flujo de corriente y el intercambio de energía eléctrica entre ellos.

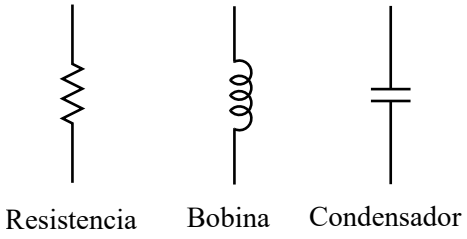
Podemos distinguir entre dos tipos de elementos:

[2] Como ocurría con las corrientes, el criterio de signo para las caídas y elevaciones de tensión es arbitrario.

- Elementos activos: Son componentes que pueden suministrar energía al circuito [3]. Algunos ejemplos de elementos activos serían las baterías de corriente continua o los generadores de corriente alterna.



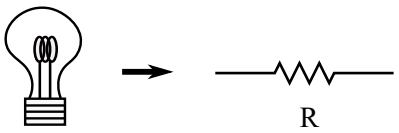
- Elementos pasivos: Son componentes que absorben o almacenan energía eléctrica. Los elementos pasivos que se encuentran en la vida real (motores eléctricos, bombillas, calentadores...) se pueden modelar mediante resistencias, bobinas y condensadores.



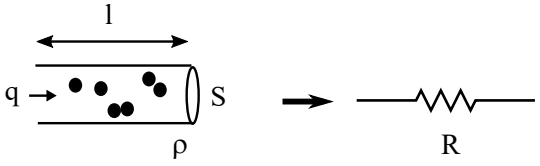
4.1 Resistencias

4.1.1 Definición

Las resistencias se emplean para modelar elementos que transforman la energía eléctrica en calor. Algunos ejemplos de elementos de la vida real que se comportan como resistencias son las bombillas, los hornos o los radiadores eléctricos. Estos elementos se pueden caracterizar mediante su **resistencia eléctrica** (R). La resistencia eléctrica se mide en Ohmios [Ω] en el SI.



Desde el punto de vista físico, la resistencia eléctrica cuantifica la pérdida de energía que experimentan las cargas eléctricas cuando atraviesan un determinado camino dentro de de un material conductor. Las cargas chocan y esas colisiones disipan energía que se transforma en calor.



La resistencia eléctrica de un elemento depende de la naturaleza del material del que está constituido y de su geometría. La resistividad (ρ) de un material es una propiedad física

[3] Estudiaremos que bajo ciertas configuraciones del circuito los elementos activos también pueden absorber energía

que está relacionada con la facilidad con la que los electrones se mueven en su interior. La resistividad es la inversa de la conductividad (σ) y se mide en $[\Omega] \cdot [m]^{-1}$.

Además de la resistividad, la resistencia depende de la longitud del camino que recorren las cargas y de su sección. Esto es comprensible si pensamos que una trayectoria más larga aumenta la probabilidad de colisión, y por tanto el número de colisiones, y que un aumento de la sección disminuye la probabilidad de colisión.

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} \tag{8}$$

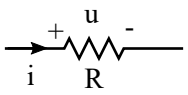
Adicionalmente, definimos la conductancia (G) de un elemento como la inversa de su resistencia. La conductancia se mide en Siemens [S] en el SI.

$$G = \frac{1}{R} \tag{9}$$

4.1.2 Ley de Ohm

El flujo de corriente a través de una resistencia siempre implica una pérdida de energía. La energía de las cargas a la entrada de la resistencia siempre es mayor que la energía a la salida. En el análisis de circuitos, esta pérdida de energía se caracteriza como una caída de tensión. La magnitud de la caída de tensión de una resistencia depende de la cantidad de carga que fluya a través de la resistencia y del valor de la resistencia.

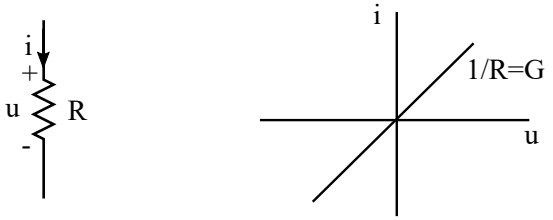
La polaridad relativa entre tensión y corriente en una resistencia es **siempre** como se muestra en el siguiente diagrama. La corriente entra por el terminal con mayor nivel de tensión (+) y sale por el terminal con menor nivel de tensión (-). Esto es consistente con el hecho de que **una resistencia siempre absorbe energía eléctrica**.



La **ley de Ohm** establece que la relación entre la caída de tensión y la corriente que fluye a través de una resistencia sigue la siguiente relación lineal:

$$u = R \cdot i \tag{10}$$

La curva u/i en una resistencia siempre es una función lineal de pendiente G:



4.1.3 Potencia absorbida por una resistencia

Una resistencia siempre absorbe energía eléctrica. La cantidad de energía absorbida por una resistencia se puede calcular como el producto de la caída de tensión en la resistencia y la corriente que fluye a través de ella. Además, se pueden plantear ecuaciones alternativas que son útiles para calcular la potencia en muchos casos:

$$p_R = u \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R} \tag{11}$$

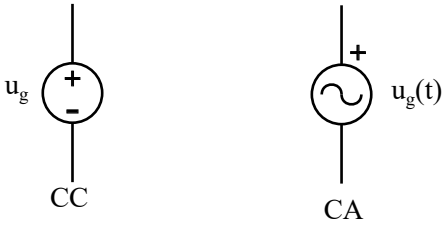
4.2 Fuentes ideales

Las fuentes son elementos que suministran energía a los circuitos eléctricos.

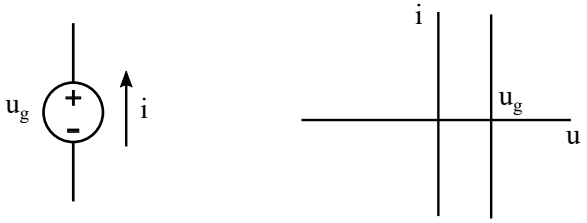
Las fuentes ideales no existen en la vida real, pero en muchos casos permiten modelar con precisión algunos elementos activos. Podemos diferenciar entre dos tipos de fuentes ideales: las fuentes ideales de tensión y las fuentes ideales de corriente.

4.2.1 Fuentes de tensión ideales

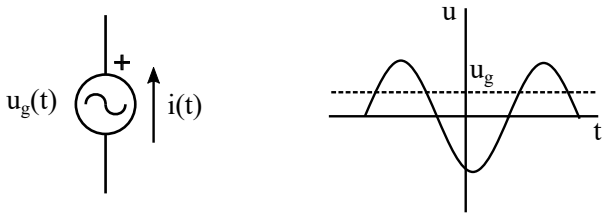
Una fuente de tensión ideal es un elemento que mantiene una caída de tensión constante entre sus terminales independientemente de la corriente que fluya a través de ella. Las fuentes de tensión pueden proporcionar tensión de corriente continua (CC) o tensión de corriente alterna (CA). El siguiente diagrama muestra el símbolo empleado para representar las fuentes de tensión de CC y CA:



La curva u/i de una fuente de tensión de CC muestra que la caída de tensión entre su terminales es constante para cualquier valor de la corriente.



Como se estudiará más adelante, la caída de tensión en una fuente de CA varía en el tiempo siguiendo una función sinusoidal de amplitud constante para cualquier corriente que fluya a través de ella.



Para caracterizar una fuente ideal de tensión de CC, necesitamos conocer su **tensión de salida**, que es la caída de tensión entre sus terminales, y su **polaridad**. La polaridad de la fuente indica qué terminal está a un nivel de tensión mayor (el marcado con signo +) y cuál está a un nivel de tensión inferior (el marcado con signo -).

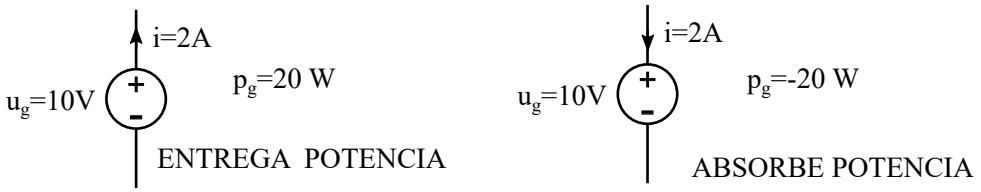
La potencia suministrada por una fuente de tensión se puede calcular como el producto de la tensión de salida y la corriente que fluye a través de ella.

$$p_g = u_g \cdot i \tag{12}$$

Aunque las fuentes de tensión son elementos activos, bajo algunas configuraciones también pueden absorber energía. Para determinar si una fuente absorbe o genera potencia, debemos observar la polaridad relativa de la tensión y la corriente. Una fuente entrega potencia si la corriente fluye de + a -. Por el contrario, una fuente entrega potencia si la corriente fluye de - a +.

En el siguiente ejemplo, la fuente de la izquierda entrega potencia y la fuente de la derecha absorbe potencia. Según el criterio de signo establecido en la sección 2.4, tomaremos como positiva la potencia entregada y como negativa la potencia absorbida.

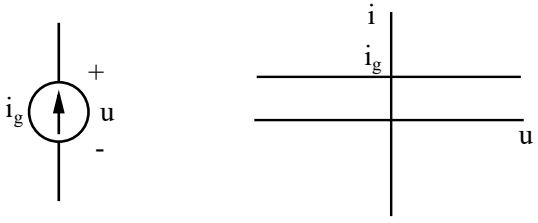
Ejemplo



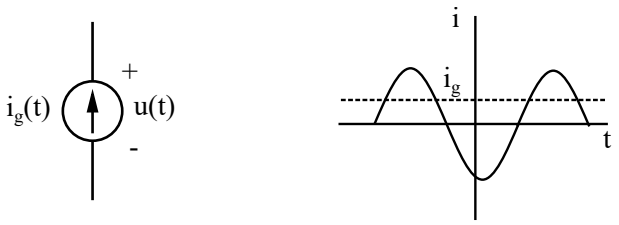
4.2.2 Fuentes de corriente ideales

Una fuente de corriente ideal es un elemento que mantiene un flujo de corriente constante a través de él independientemente de la caída de tensión existente entre sus terminales.

El siguiente diagrama muestra el símbolo de una fuente de corriente ideal y su curva u/i. Como puede verse, la corriente es constante para cualquier valor de tensión entre sus terminales.



Más adelante se estudiarán las fuentes de corriente ideales de CA, que proporcionan una corriente sinusoidal con amplitud y valor cuadrático medio constantes.



Una fuente de corriente ideal se define por su **corriente de salida**, que es la corriente que fluye a través de ella, y su **polaridad**, que es la dirección de la corriente. La polaridad de una fuente de corriente está indicada por la dirección de la flecha.

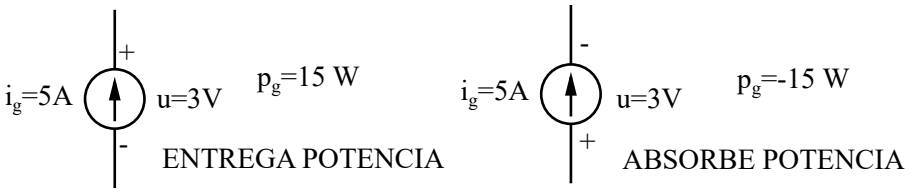
La potencia suministrada por una fuente de corriente ideal se puede calcular como el producto entre la tensión de salida y la corriente.

$$p_g = i_g \cdot u \tag{13}$$

Al igual que sucede con las fuentes de tensión, las fuentes de corriente ideales también pueden absorber potencia en ciertas situaciones. Para determinar si una fuente absorbe o genera potencia se debe observar la polaridad relativa entre la tensión y la corriente. Una fuente entrega potencia si la corriente fluye de - a + y absorbe potencia si la corriente fluye de + a -.

En el ejemplo que se muestra a continuación la fuente de la izquierda entrega potencia y la fuente de la derecha absorbe potencia. De acuerdo con el criterio de signo establecido, tomaremos la potencia entregada como positiva y la potencia absorbida como negativa.

Ejemplo



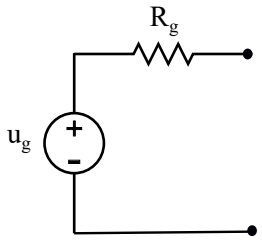
4.3 Fuentes reales

En la realidad, las fuentes de tensión y corriente siempre tienen pérdidas y caídas de tensión internas. En ocasiones estas pérdidas se pueden despreciar y podremos considerar fuentes ideales que representarán los sistemas de manera más sencilla. En otros casos será necesario considerar las pérdidas internas de las fuentes para conseguir una mayor precisión en los análisis realizados.

A continuación se describen los modelos que se emplean en análisis de circuitos para representar las fuentes de tensión y corriente reales.

4.3.1 Fuentes de tensión reales

Una fuente de tensión real puede modelar como una fuente de tensión en serie con una resistencia. La resistencia representa la resistencia de los elementos internos de la fuente que dan lugar a pérdidas. Idealmente, el valor de la resistencia R_g sería muy pequeño en los dispositivos reales.

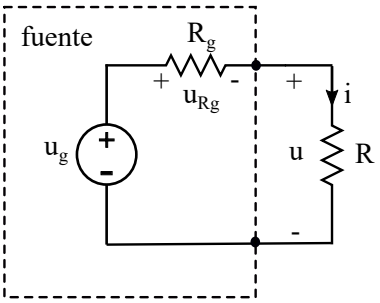


Cuando una fuente de tensión real suministra energía a una resistencia, la tensión suministrada (u) no es constante sino que depende de la corriente (i) que circula por el circuito:

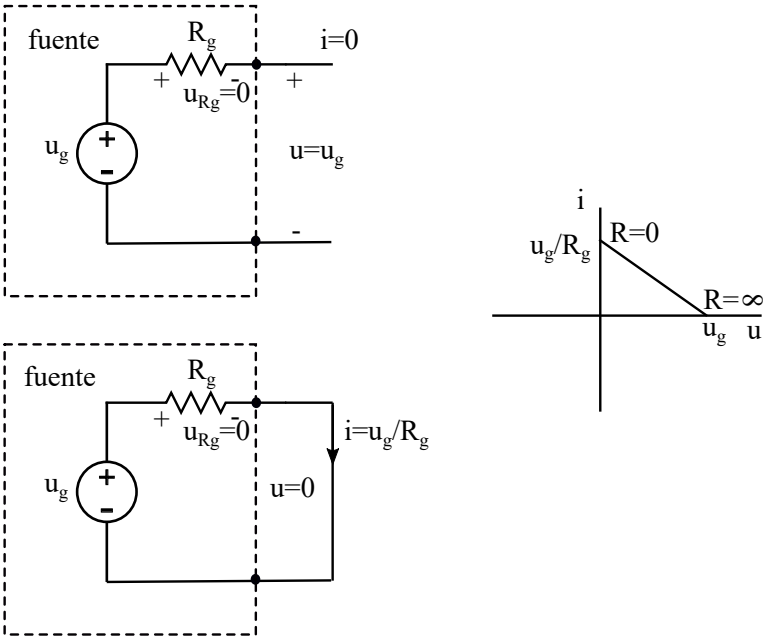
$$u = u_g - R_g \cdot i \tag{14}$$

donde:

$$i = \frac{u_g}{R_g + R} \tag{15}$$



El siguiente diagrama muestra la curva u/i de una fuente de tensión real. Como se explicó anteriormente, la tensión de salida no es constante sino que depende de la corriente suministrada por la fuente. Así, si la corriente es cero, la caída de tensión interna en la resistencia (u_{Rg}) también es cero; este es el caso que se presenta si el circuito se deja abierto ($R = \infty$). Por el contrario, si se conecta un cortocircuito entre los dos terminales de la fuente de tensión real, la corriente suministrada es máxima y la caída de tensión en la resistencia interna será igual a u_g.



La potencia suministrada por una fuente de tensión real a una resistencia conectada entre sus terminales es:

$$p_g = R \cdot i^2 = R \cdot \frac{u_g^2}{(R_g + R)^2} \tag{16}$$

y las pérdidas internas de la fuente:

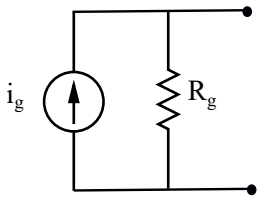
$$p_{R_g} = u_{R_g} \cdot i = R_g \cdot \frac{u_g^2}{(R_g + R)^2} \tag{17}$$

El rendimiento de una fuente real depende de la relación entre la resistencia interna de la fuente y la resistencia de los elementos conectados a ella:

$$\eta = \frac{p_g}{p_g + p_{R_g}} = \frac{R}{R_g + R} \tag{18}$$

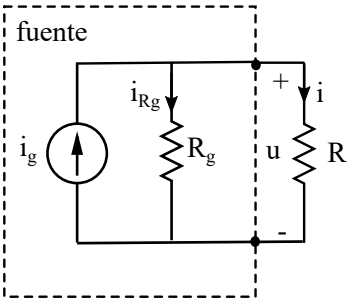
4.3.2 Fuentes de corriente reales

Las fuentes de corriente reales se pueden modelar como una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia.



Cuando una fuente de corriente real alimenta a una resistencia, la corriente suministrada (i) no es constante sino que depende de la caída de tensión (u) entre sus terminales.

$$i = i_g - \frac{u}{R_g} \tag{19}$$



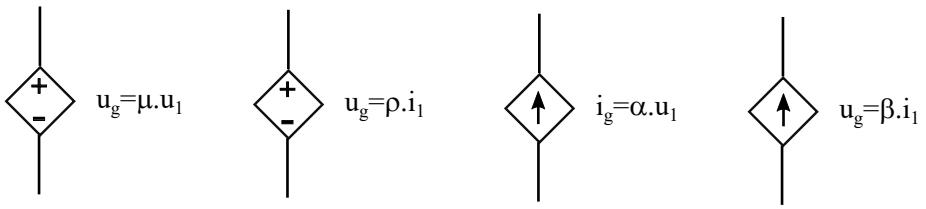
Como ocurría con las fuentes de tensión reales, el rendimiento de una fuente de corriente real depende de la relación entre la resistencia interna de la fuente y la resistencia conectada a ella:

$$\eta = \frac{p_g}{p_g + p_{R_g}} = \frac{R_g}{R_g + R} \tag{20}$$

4.4 Fuentes dependientes

Las fuentes dependientes son elementos que suministran una corriente o tensión que depende de la tensión o corriente en alguna parte del circuito. Se puede distinguir entre cuatro tipos de fuentes dependientes:

- Fuente de tensión controlada por tensión: proporciona una tensión de salida u_g que depende de la tensión u_1 entre un par de terminales del circuito.
- Fuente de tensión controlada por corriente: proporciona una tensión de salida u_g que depende de la corriente i_1 que circula por una rama del circuito.
- Fuente de corriente controlada por tensión: proporciona una corriente de salida i_g que depende de la tensión u_1 entre un par de terminales del circuito.
- Fuente de corriente controlada por corriente: proporciona una corriente de salida i_g que depende de la corriente i_1 que circula por una rama del circuito.



La constante de proporcionalidad con la que se define la fuente se denomina **ganancia**.

5 Asociación de elementos y otras equivalencias

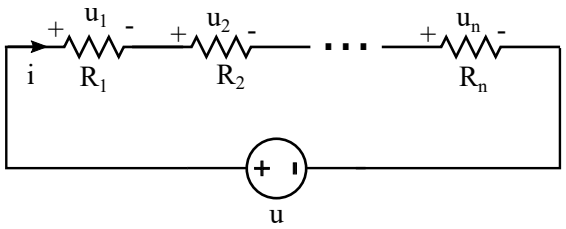
En ocasiones nos enfrentaremos al análisis de un circuito con un número elevado de elementos pasivos o activos en el que no resulta sencillo aplicar las leyes básicas para el

cálculo de las corrientes y las tensiones. En algunos de estos casos será posible asociar o transformar elementos para obtener circuitos equivalentes más sencillos. En esta sección se presentan algunas de las transformaciones que se pueden aplicar para la simplificación de los circuitos eléctricos.

5.1 Asociación de resistencias

5.1.1 Resistencias conectadas en serie

Decimos que dos o más elementos están conectados en **serie** si a través de ellos fluye la **misma corriente**. Las n resistencias de la figura están en serie: la corriente i que entra a la red no tiene un camino alternativo, por lo que la corriente será la misma para todas las resistencias.



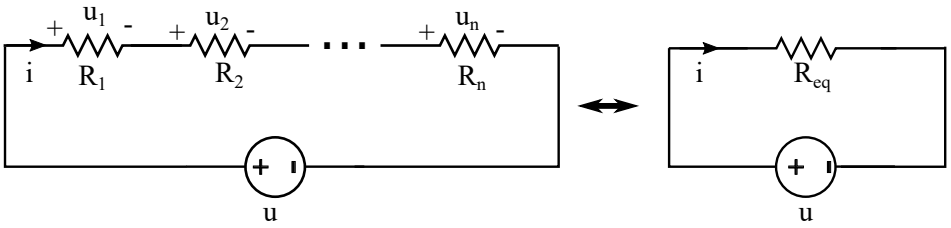
La caída de tensión en cada resistencia viene dada por la ley de Ohm:

$$\begin{aligned} \mathrm{u}_1 &= R_1 \cdot i \\ \mathrm{u}_2 &= R_2 \cdot i \\ &... \\ \mathrm{u}_n &= R_n \cdot i \end{aligned}$$

La tensión total u se puede calcular usando la 2LK:

$$u = u_1 + u_2 + ... + u_n = R_1 \cdot i + R_2 \cdot i + ... + R_n \cdot i = (R_1 + R_2 + ... + R_n) \cdot i$$

El conjunto de n resistencias se puede sustituir por una **resistencia equivalente** R_{eq}:



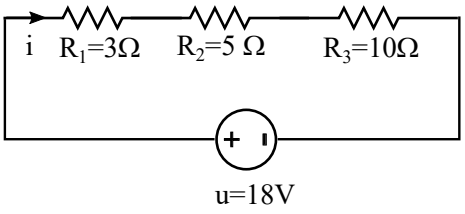
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + ... + R_n = \sum_k R_k \tag{21}$$

$$u = R_{eq} \cdot i$$

Visto desde la fuente de tensión, el efecto de las n resistencias conectadas en serie es idéntico al efecto que tendría la resistencia equivalente, de manera que no sería posible distinguir ambas configuraciones. Decimos que ambas configuraciones son **equivalentes**.

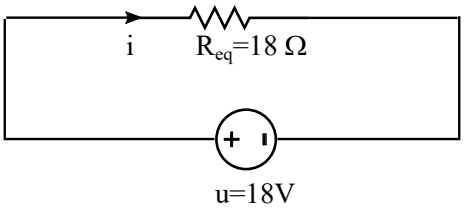
Ejemplo

Calcular la corriente i en el siguiente circuito.



En primer lugar asociaremos todas las resistencias en serie encontrando un circuito equivalente simplificado:

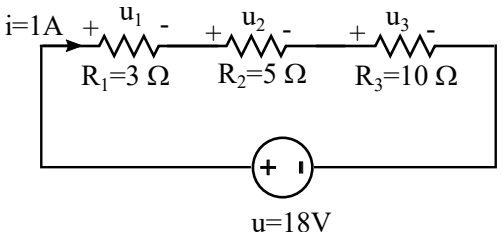
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + +R_3 = 3 + 5 + 10 = 18\Omega$$



La corriente se puede calcular mediante la ley de Ohm:

$$i = \frac{u}{R_{eq}} = 1A$$

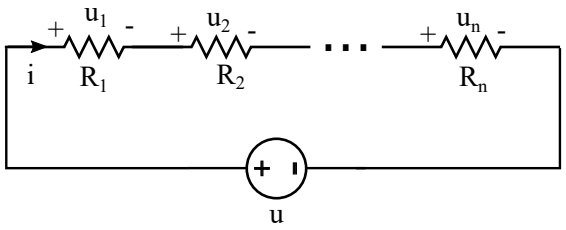
Si queremos calcular la caída de tensión a través de las resistencias originales R_1, R_2 y R_3, volveremos al circuito original y usaremos la corriente obtenida para calcularlas:



$$u_1 = R_1 \cdot i = 3V \quad u_2 = R_2 \cdot i = 5V \quad u_3 = R_3 \cdot i = 10V$$

La ecuación del divisor de tensión

Algunos dispositivos electrónicos utilizan redes formadas por varias resistencias conectadas en serie para obtener una fracción de la tensión de salida de una fuente. Esos dispositivos se basan en el hecho de que la caída de tensión en cada una de las resistencias conectadas en serie es una fracción de la tensión de la fuente.



La caída de tensión en la resistencia k es:

$$u_k = R_k \cdot i$$

y como la corriente es:

$$i = \frac{u}{R_1 + R_2 + ... + R_n}$$

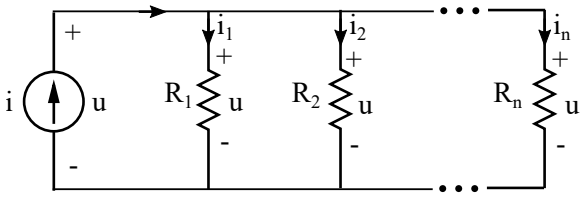
la ecuación para calcular la caída de tensión en la resistencia k sería:

$$u_k = \frac{R_k}{R_{eq}} \cdot u \tag{22}$$

La ecuación del divisor de tensión también es útil para analizar circuitos en los que queremos calcular la caída de tensión en una de las resistencias de un conjunto de resistencias conectadas en serie.

5.1.2 Resistencias conectadas en paralelo

Dos o más elementos están conectados en **paralelo** si tienen la **misma caída de tensión entre sus terminales**. Las n resistencias de la figura están en paralelo, ya que la caída de tensión (u) en todas ellas es la misma.



Cada resistencia tiene una corriente distinta:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = u \cdot G_1$$

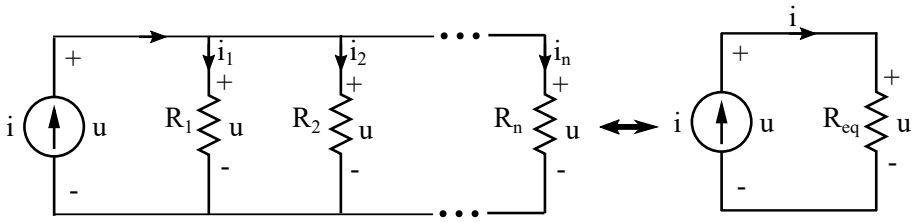
$$i_2 = \frac{u}{R_2} = u \cdot G_2$$

$$i_n = \frac{u}{R_n} = u \cdot G_n$$

La corriente total se puede calcular mediante la 1LK:

$$i = i_1 + i_2 + ... + i_n = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + ... + \frac{u}{R_n} = u \cdot (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n})$$

De la ecuación anterior se deduce que el conjunto de n resistencias en paralelo se puede transformar en una resistencia equivalente R_{eq}:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} = \sum_k \frac{1}{R_k} \tag{23}$$

$$i = \frac{u}{R_{eq}}$$

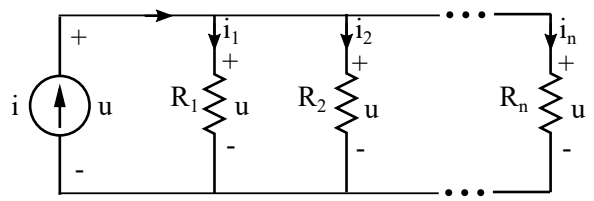
Las ecuaciones también se pueden expresar en términos de las conductancias:

$$G_{eq} = \sum_i G_i \qquad\qquad i = u \cdot G_{eq} \tag{24}$$

Visto desde la fuente de corriente, el efecto de las n resistencias conectadas en paralelo es idéntico al efecto de la resistencia equivalente actuando en solitario. Decimos que ambas configuraciones son **equivalentes**.

La ecuación del divisor de corriente

Un divisor de corriente es un circuito constituido por varias resistencias conectadas en paralelo. El divisor de corriente se puede utilizar para obtener una fracción de la corriente de salida de una fuente de corriente.



La corriente en la resistencia k es:

$$i_k = \frac{u}{R_k} = u \cdot G_k$$

y la tensión es:

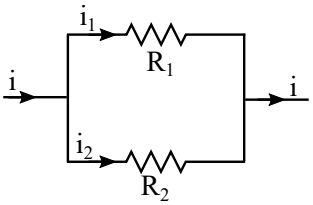
$$u = \frac{i}{G_1 + G_2 + ... + G_n}$$

La corriente que circula a través de la resistencia k se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} \cdot i \tag{25}$$

La ecuación del divisor de corriente es útil para analizar de circuitos en los que queremos calcular la corriente que fluye a través de una de las resistencias de un conjunto de resistencias conectadas en paralelo.

Es interesante conocer la ecuación del divisor de corriente para el caso particular de dos resistencias en paralelo, ya que es una configuración que aparece frecuentemente al analizar circuitos eléctricos:



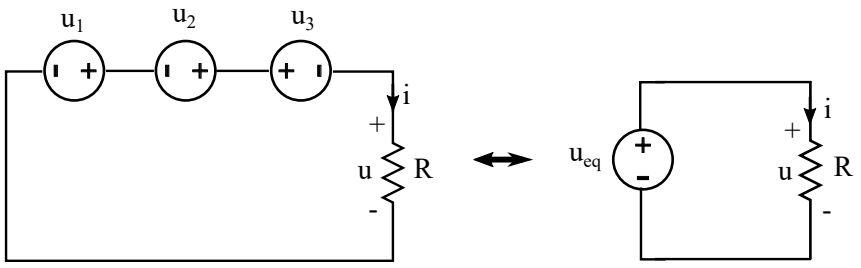
Las expresiones para calcular las corrientes i_1 e i_2 son:

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i \qquad\qquad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i \tag{26}$$

5.2 Asociación de fuentes ideales

5.2.1 Asociación de fuentes de tensión ideales en serie

Cuando en un circuito nos encontramos con un conjunto de fuentes de tensión ideales conectadas en serie, será posible sustituir estos elementos por una **fuente de tensión equivalente**.



La tensión de salida de la fuente equivalente se obtiene como la suma de las tensiones de las fuentes individuales, teniendo en cuenta su polaridad:

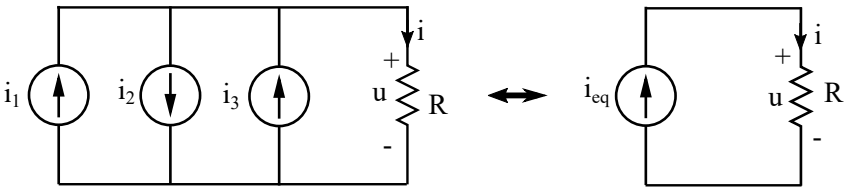
$$u_{eq} = u_1 + u_2 - u_3 \tag{27}$$

Desde el punto de vista de la resistencia R, ambas configuraciones son equivalentes, ya que la corriente y la caída de tensión en la resistencia son idénticas en ambos casos.

Dos o más fuentes de corriente ideales con diferente corriente de salida nunca pueden conectarse en serie, ya que dos elementos están en serie cuando la corriente que fluye a través de ellos es la misma.

5.2.2 Asociación de fuentes de corriente ideales en paralelo

Es posible asociar varias fuentes de corriente ideales que se encuentren en paralelo para encontrar una **fuente de corriente ideal equivalente**:



La corriente de salida de la fuente de corriente ideal equivalente se obtiene como la suma algebraica de las corrientes de salida de las fuentes de corriente ideales:

$$i_{eq} = i_1 - i_2 + i_3 \tag{28}$$

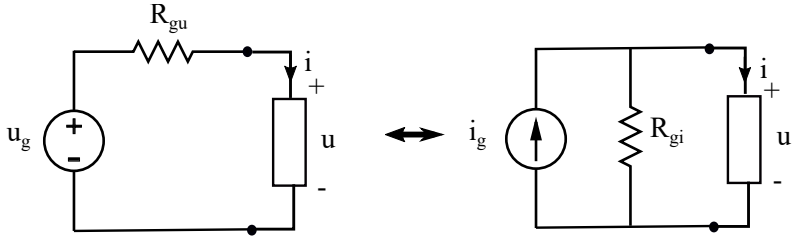
Para la resistencia R ambas configuraciones son equivalentes; esto significa que la corriente y la caída de tensión en la resistencia son idénticas en ambos casos.

Por otra parte no sería posible encontrar fuentes de tensión ideales con diferente tensión de salida conectadas en paralelo ya que la dos elementos están en paralelo si la las caídas de tensión entre sus terminales son iguales.

5.3 Transformación de fuentes reales

Otra equivalencia que a veces resulta útil para el análisis de circuitos es la transformación de fuentes de tensión reales en fuentes de corriente reales y viceversa.

Una fuente de tensión real y una fuente de corriente real son equivalentes si la corriente (i) y la tensión (u) suministradas a un elemento conectado entre los terminales de ambas fuentes es la misma.



Si analizamos el circuito alimentado por la fuente de tensión la tensión u sería:

$$u = u_g - R_{gu} \cdot i$$

En el caso del circuito con la fuente de corriente la corriente i sería:

$$i = i_g - \frac{u}{R_{gi}}$$

Las dos fuentes anteriores son equivalentes si se cumplen las siguientes condiciones:

$$i_g = \frac{u_g}{R_{gu}} \qquad R_{gu} = R_{gi} \tag{29}$$

Ejemplo

Encontrar la fuente de corriente equivalente a una fuente de tensión con resistencia interna $R_g = 3\Omega$ y tensión de salida $u_g = 30V$

La fuente de corriente equivalente tendría una resistencia interna de 3 Ω y una corriente de salida:

$$i_g = \frac{u_g}{R_g} = \frac{30}{3} = 10A$$

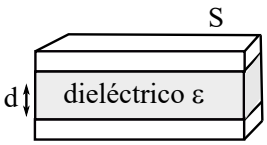
6 Elementos pasivos adicionales: bobinas y condensadores

Las bobinas y los condensadores son elementos pasivos que toman energía de las fuentes y la almacenan en forma de campos electromagnéticos. Estos elementos son particularmente importantes en los circuitos de CA.

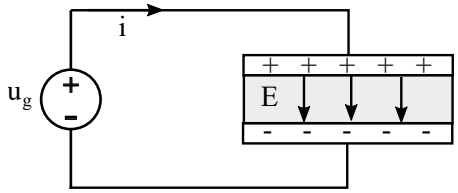
6.1 Condensadores

6.1.1 Principio de funcionamiento

Un condensador es un elemento que almacena energía eléctrica en forma de campo eléctrico. Los condensadores están constituidos por dos placas metálicas separadas una cierta distancia y con un material dieléctrico situado entre ellas que impide la conducción de corriente:



Si se aplica una diferencia de potencial entre las dos placas se produce un desplazamiento de carga quedando una de ellas cargada con carga positiva y la otra con carga negativa. El desplazamiento de carga da lugar a un campo eléctrico que provoca que los dipolos eléctricos que componen el material se orienten en la dirección del campo en un proceso llamado polarización del dieléctrico.



La cantidad de carga desplazada en un condensador es proporcional a la caída de tensión aplicada entre sus terminales. El factor de proporcionalidad se llama **capacidad** del condensador (C). La capacidad se mide en Faradios [F] en el SI.

$$q = C \cdot u \tag{30}$$

La capacidad de un condensador depende de su geometría y de las propiedades del material dieléctrico que se coloca entre las placas metálicas:

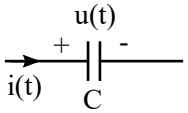
$$C = \frac{\varepsilon \cdot S}{d} \tag{31}$$

donde d es la distancia entre las placas, S es la superficie de las placas y ε es la permitividad del material dieléctrico.

La permitividad de un material está relacionada con su respuesta al efecto de un campo eléctrico, en términos de polarización, y se calcula como el producto de la permitividad relativa del material dieléctrico (ε_r) y la permitividad del vacío (ε_0):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \tag{32}$$

En los circuitos eléctricos, los condensadores se representan con el siguiente símbolo:



Como se explicó anteriormente, la aplicación de una caída de tensión entre las placas de un condensador da lugar a un movimiento de carga que implica el establecimiento de una corriente. Para obtener una relación entre la tensión y la corriente en un condensador, debemos aplicar derivadas a la ecuación (30):

$$q = C \cdot u \;\; => \;\; \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt} \tag{33}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \tag{34}$$

También podemos calcular la caída de tensión en los terminales del condensador para una determinada corriente:

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t)dt \tag{35}$$

Como puede verse, la caída de tensión en un condensador en el instante t depende de la tensión en un instante anterior t_0. Esto significa que la tensión de los condensadores siempre varía suavemente. Decimos que la tensión de un condensador es una variable de estado.

6.1.2 Condensadores en circuitos de CC

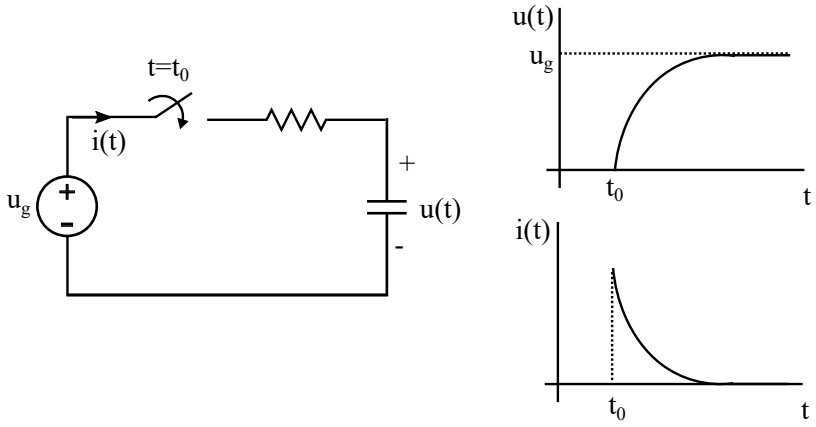
Si aplicamos una caída de tensión de CC a un condensador, por ejemplo, usando una fuente de tensión de salida constante u_g, la corriente que fluye a través del condensador sería cero:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \frac{du_g}{dt} = 0 \tag{36}$$

Esto significa que **en CC**, en régimen permanente, **un condensador se comporta como un circuito abierto**.

En condiciones transitorias, por ejemplo después de la conexión o desconexión de una fuente, la tensión cambia y la corriente será distinta de cero.

En el siguiente ejemplo:



Inmediatamente después de la conexión de la fuente, la tensión en el condensador, que era cero, comienza a aumentar hasta que se alcanza el régimen permanente en el que $u = u_g$. Durante el transitorio, hay una corriente que transporta la energía desde la fuente hasta el condensador. Este proceso se denomina **carga del condensador**.

Una vez que se carga el condensador, la corriente pasa a ser cero y la tensión del condensador sigue siendo igual a u_g hasta que se produzca un proceso de descarga.

6.1.3 Potencia y energía

La potencia absorbida por un condensador se puede calcular mediante la expresión general de la potencia eléctrica que estudiamos anteriormente:

$$p = u \cdot i = u \cdot C \cdot \frac{du}{dt} \tag{37}$$

Por tanto, la energía almacenada en un condensador es:

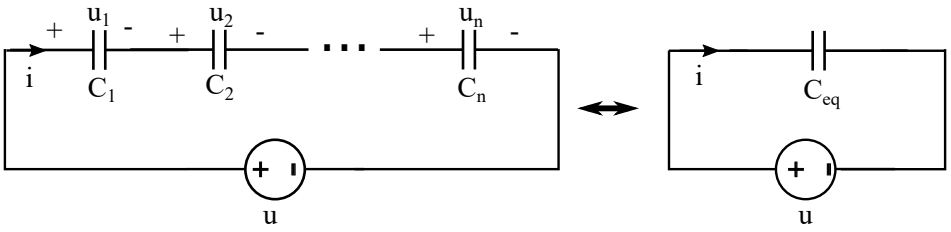
$$p = \frac{dw}{dt} \quad => \quad \int dw = C \int u \cdot du \tag{38}$$

$$w = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2 \tag{39}$$

6.1.4 Asociación de condensadores

Al igual que ocurría con las resistencias y las fuentes, es posible encontrar expresiones para calcular la capacidad equivalente de un conjunto de condensadores conectados en serie o en paralelo.

En el caso de n condensadores conectados en serie se puede encontrar una capacidad equivalente que tenga un comportamiento idéntico al de los n condensadores:



Para obtener C_{eq} se puede aplicar la 2LK al circuito y tomar derivadas en la ecuación resultante:

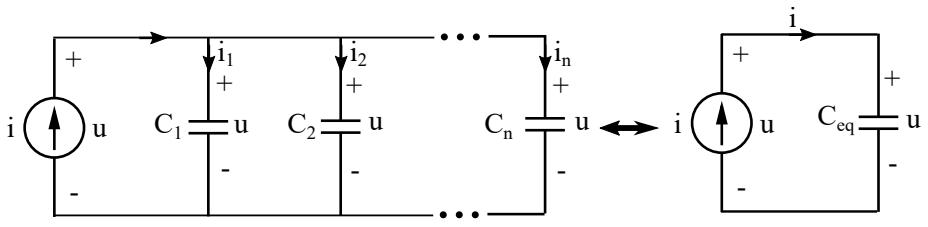
$$u = u_1 + u_2 + ... + u_n \tag{40}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + ... + \frac{du_n}{dt} = (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}) \cdot i = \frac{1}{C_{eq}} \cdot i \tag{41}$$

La capacidad equivalente es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} = \sum_k \frac{1}{C_k} \tag{42}$$

Asimismo, un conjunto de n condensadores conectados en paralelo se puede reemplazar por un condensador equivalente:



Para encontrar la expresión de C_{eq}, se debe aplicar la 1LK a la red original:

$$i = i_1 + i_2 + ... + i_n = (C_1 + C_2 + ... + C_n) \cdot \frac{du(t)}{dt} = C_{eq} \cdot \frac{du(t)}{dt} \tag{43}$$

encontrando que:

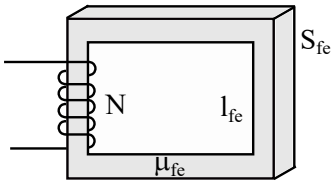
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_n = \sum_k C_k \tag{44}$$

6.2 Bobinas

6.2.1 Principio de funcionamiento

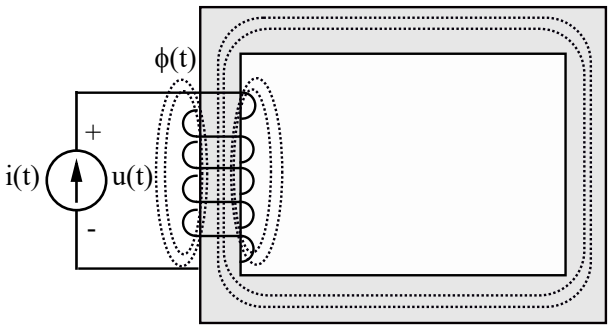
Las bobinas son elementos pasivos que toman energía de una fuente y la almacenan en un campo magnético.

Las bobinas están constituidas por un conductor arrollado alrededor de un núcleo, generalmente de material magnético, formando N vueltas:



Cuando la corriente circula por el conductor se origina un flujo magnético de acuerdo a la ley de Ampere:

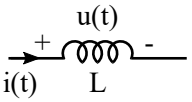
$$N \cdot \phi = L \cdot i \tag{45}$$



El parámetro que define la relación entre la corriente aplicada y el flujo es la autoinductancia o **inductancia propia** (L). La inductancia de una bobina depende del número de vueltas, la sección del camino magnético (S_{fe}), la longitud promedio del camino magnético (l_{fe}) y la permeabilidad del material magnético (μ_{fe}). La inductancia se mide en Henrios [H] en el SI.

$$L = \frac{N^2 \cdot S_{fe} \cdot \mu_{fe}}{l_{fe}} \tag{46}$$

Las bobinas se representan mediante el siguiente símbolo en los circuitos eléctricos:



Para obtener la relación u/i en una bobina se debe considerar que la relación entre la caída de tensión entre sus terminales y el flujo viene dada por la ley de Faraday [4]:

$$u = N \cdot \frac{d\phi}{dt} \tag{47}$$

y dado que:

$$N \cdot \phi = L \cdot i \quad => \quad N \cdot \frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{48}$$

la relación entre la tensión y la corriente resulta:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \tag{49}$$

También podemos calcular la corriente que fluye a través de una bobina para una cierta tensión aplicada entre sus terminales:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} u(t)dt \tag{50}$$

Como se puede observar, la corriente a través de una bobina en el instante t depende de la corriente en un instante anterior t_0. Esto implica que la corriente a través de una bobina siempre varía suavemente. Decimos que la corriente de una bobinas es una variable de estado.

6.2.2 Bobinas en circuitos de CC

Si una bobina se alimenta con una fuente de corriente continua de valor constante i_g, la caída de tensión en la bobina será cero:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{di_g}{dt} = 0 \tag{51}$$

Esto significa que **en CC** y en régimen permanente **una bobina se comporta como un cortocircuito**.

En condiciones transitorias, por ejemplo después de la conexión o desconexión de la fuente, la corriente que fluye a través de la bobina cambia, y su caída de tensión es distinta de cero durante el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el régimen estacionario.

[4] tensión= - fuerza electromotriz

6.2.3 Potencia y energía

La potencia absorbida por una bobina es:

$$p = u \cdot i = i \cdot L\frac{di}{dt} \tag{52}$$

Y la energía almacenada:

$$p = \frac{dw}{dt} = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \tag{53}$$

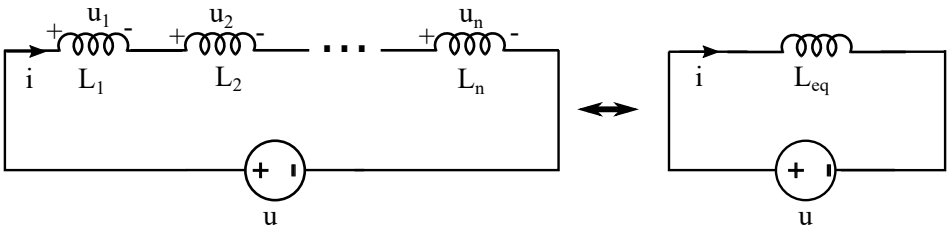
$$\int dw = L \int i \cdot di \tag{54}$$

$$w = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \tag{55}$$

6.2.4 Asociación de bobinas

Como ocurre con otros elementos, es posible sustituir un conjunto de bobinas conectadas en serie y en paralelo mediante una inductancia equivalente.

Si tenemos n bobinas en serie (es decir, con la misma corriente fluyendo a través de ellas):

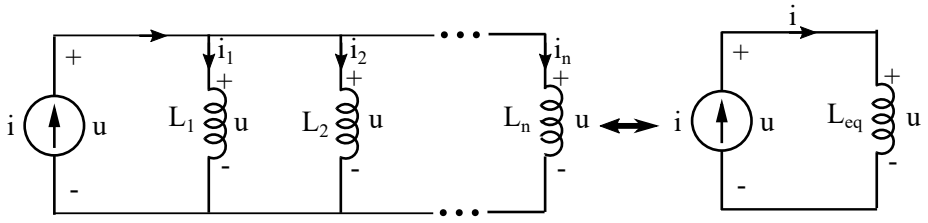


$$u = u_1 + u_2 + ... + u_n = (L_1 + L_2 + ... + L_n) \cdot \frac{di}{dt} = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt} \tag{56}$$

La inductancia equivalente sería:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + ... + L_n = \sum_i L_i \tag{57}$$

Un conjunto de n bobinas conectadas en paralelo también se puede reemplazar por una inductancia equivalente:



$$i = i_1 + i_2 + ... + i_n \tag{58}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + ... + \frac{di_n}{dt} = (\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_n}) \cdot u = \frac{1}{L_{eq}} \cdot u \tag{59}$$

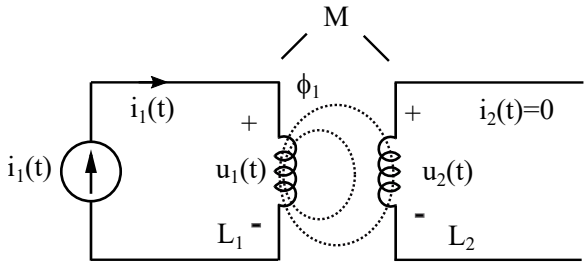
La inductancia equivalente en paralelo es:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_n} = \sum_i \frac{1}{L_i} \tag{60}$$

6.3 Bobinas acopladas

6.3.1 Principio de funcionamiento

Consideremos dos bobinas que están cerca una de la otra, como las representadas en la siguiente figura:



La bobina 1 se alimenta con una corriente $i_1(t)$ y a través de la bobina 2 no fluye corriente. La circulación de $i_1(t)$ induce un flujo ϕ_1. De acuerdo con la ley de Faraday, si alguna de las líneas de flujo atraviesa la bobina 2 se induce una fuerza electromotriz que da lugar a una caída de tensión u_2 entre los terminales de la bobina 2.

El grado de acoplamiento entre ambas bobinas se cuantifica mediante el **coeficiente de inductancia mutua** (M), que se mide en Henrios [H]. M depende de las inductancias propias de las dos bobinas L_1 y L_2 y del coeficiente de acoplamiento k:

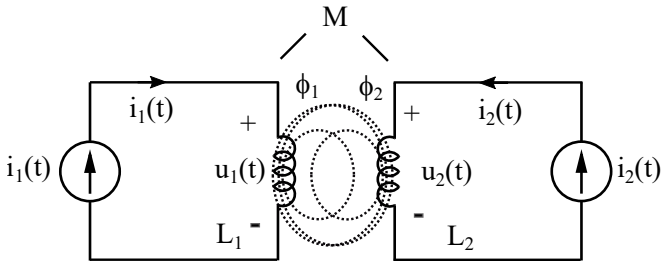
$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \qquad 0 \leq k \leq 1 \tag{61}$$

En el caso del diagrama anterior, las tensiones u_1 y u_2 serían:

$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \tag{62}$$

$$u_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \tag{63}$$

Si además de alimentar la bobina 1 con la corriente i_1 se alimenta la bobina 2 con una corriente i_2, al flujo ϕ_1 del caso anterior se sumará un segundo flujo ϕ_2:



En este caso, la caída de tensión en cada bobina depende de la corriente que circula por ella, pero también de la corriente que circula por la otra bobina:

$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \tag{64}$$

$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \tag{65}$$

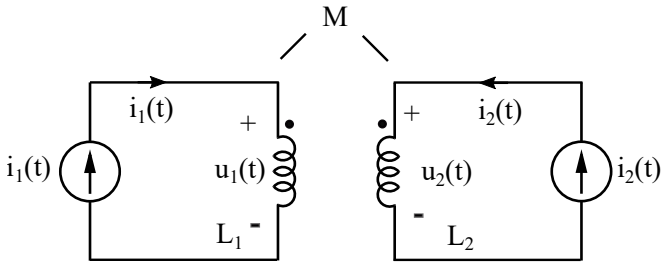
6.3.2 Polaridad del acoplamiento: terminales correspondientes

En los ejemplos anteriores los términos de inductancia mutua que aparecen en las expresiones las tensiones u_1 y u_2 se tomaron como positivos en todos los casos para simplificar el análisis. Sin embargo, la definición de la polaridad del acoplamiento requeriría un análisis más profundo, que en el análisis de circuitos normalmente se realiza mediante la definición de los **terminales correspondientes**.

Un terminal de cada bobina se etiqueta con un punto. El punto indica que si una corriente "entra" por el terminal con punto de una bobina, la polaridad de la tensión inducida en la otra bobina es positiva en su terminal con punto. Si una corriente "sale" del terminal con punto, la polaridad de la tensión inducida en la otra bobina es negativa en su terminal con punto.

Como puede verse en los siguientes tres ejemplos, el signo del término de la inductancia mutua que aparece en la expresión de la tensión depende de la posición de los terminales correspondientes.

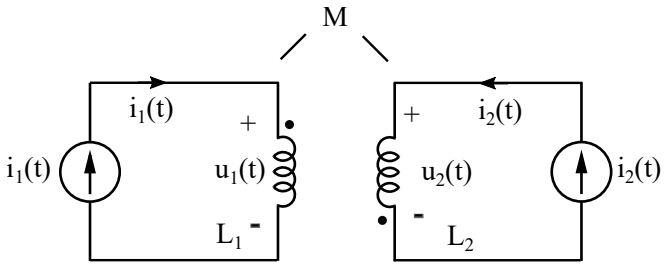
Ejemplo 1



$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

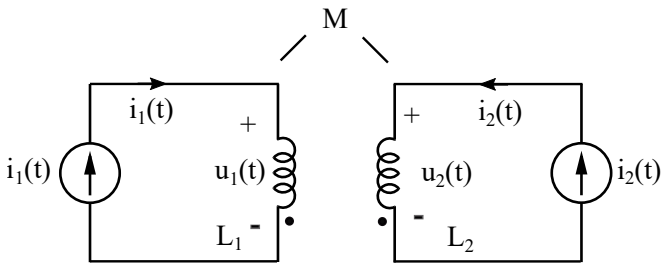
Ejemplo 2



$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

Ejemplo 3



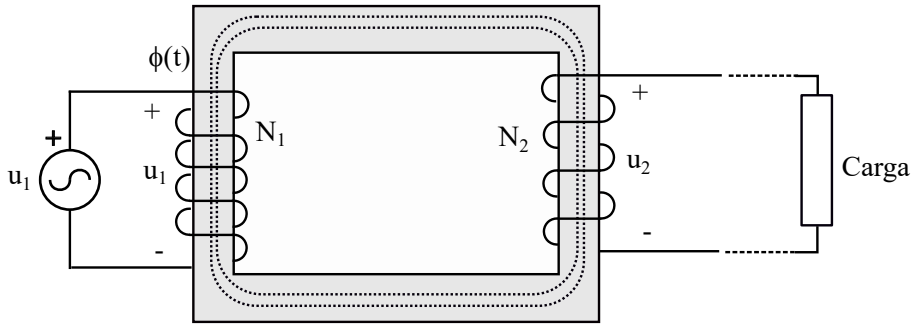
$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

6.3.3 Aplicaciones de las bobinas acopladas: Transformadores

Las bobinas acopladas se emplean en muchos elementos de la vida real como los motores eléctricos, relés de protección, actuadores etc. Una de las principales aplicaciones de las bobinas acopladas son los transformadores, que se utilizan para transformar el nivel de tensión de la energía eléctrica.

Los transformadores están constituidos por dos bobinas acopladas y un núcleo magnético:



Una de las bobinas se alimenta a la tensión primaria u_1; la circulación de la corriente i_1 induce un flujo en el núcleo magnético. El flujo concatena la bobina 2 e induce una caída de tensión u_2 entre sus terminales. Si el número de espiras de las bobinas 1 y 2 es diferente, la tensión inducida u_2 diferirá de u_1.

La relación de transformación del transformador se define como:

$$r_t = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2} \tag{66}$$

El uso de transformadores requiere que la tensión u_1 sea variable. Esta es una de las principales razones para utilizar corriente alterna en los sistemas de potencia, como se explicará más adelante.