Fundamentos de Ingeniería Eléctrica
Tema 2: Análisis de circuitos en corriente continua

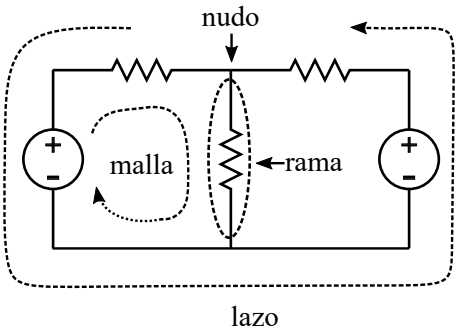
Belén García
Departamento de Ingeniería Eléctrica

En este tema se introducirán distintos métodos que permiten analizar los circuitos eléctricos de manera sistemática y se aprenderá cómo aplicarlos al análisis de circuitos alimentados en Corriente Continua (CC). En el Tema 3 se volverán a usar para el análisis de circuitos de corriente alterna (CA).

1. Definiciones

Antes introducir los métodos sistemáticos de análisis de circuitos, es necesario definir algunos términos relativos a la topología de los circuitos:

- **Rama**: Parte de un circuito con dos terminales.
- **Nudo**: Unión de dos o más ramas de un circuito.
- **Lazo**: Camino cerrado en un circuito.
- **Malla**: Camino cerrado en un circuito que no tiene ningún otro camino cerrado en su interior.



2. Método de las corrientes de malla

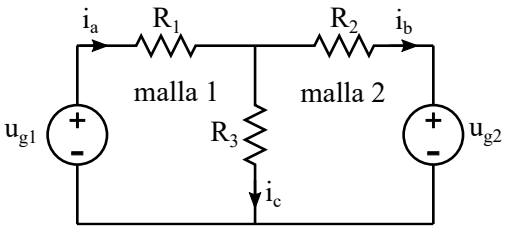
El método de las corrientes de mallas, también denominado **análisis por mallas**, es un método sistemático basado en la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff (2LK) a cada

malla de un circuito.

El método se puede aplicar al análisis de cualquier circuito plano [1].

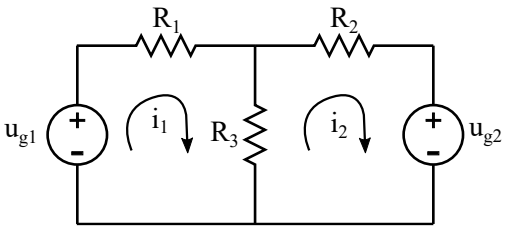
2.1. Aplicación del método mallas

Vamos a aplicar el método de mallas a la resolución del siguiente circuito. Nuestro objetivo es calcular las corrientes de rama ia, ib e ic.



Para aplicar el método de las corriente de malla, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se asigna una **corriente de malla** a cada malla del circuito considerando el mismo sentido de circulación para todas las corrientes de malla. [2]



2. Se aplica la 2LK a cada malla del circuito considerando que la corriente que fluye a través de cada malla es la corriente de malla correspondiente.

$$\sum_k u_k = 0$$

Para la aplicación de la 2LK:

- Se debe adoptar un criterio de signos para las tensiones. Cualquier criterio es válido pero el criterio de signo establecido se debe mantener a lo largo de todo el análisis. En estas notas consideramos:

  Caídas de tensión +

  Elevaciones de tensión -

- Como las resistencias son elementos pasivos, consideraremos que en ellas siempre se produce una caída de tensión. El valor de la caída de tensión se puede calcular según la ley de Ohm:

[1] Los circuitos planos son los que se pueden dibujar en un plano sin ramas que se crucen

[2] Es posible definir las corrientes de malla con diferentes sentidos, pero por simplicidad en estas notas se se considerará que las corrientes de malla siempre circulan en el sentido de las agujas del reloj.

3. Mediante la aplicación de la 2LK se obtiene un sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como mallas haya en el circuito:

   Ecuación malla 1: $-u_{g1} + R_1 \cdot i_1 + R_3 \cdot (i_1 - i_2) = 0$

   Ecuación malla 2: $R_2 \cdot i_2 + R_3 \cdot (i_2 - i_1) + u_{g2} = 0$

4. Se resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo los valores de las corrientes de malla i_1 y i_2.

   Para resolver el sistema más fácilmente es útil escribir las ecuaciones de malla en forma matricial . Esto es especialmente interesante para circuitos con tres o más mallas.

   Las ecuaciones de malla en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{g1} \\ -u_{g2} \end{pmatrix}$$

   Las ecuaciones se pueden generalizar como:

$$\left[\mathfrak{R}\right] \cdot \left[I_{malla}\right] = \left[U_g\right]$$

   donde $\left[\mathfrak{R}\right]$ es la **matriz de resistencias** cuyos términos son:

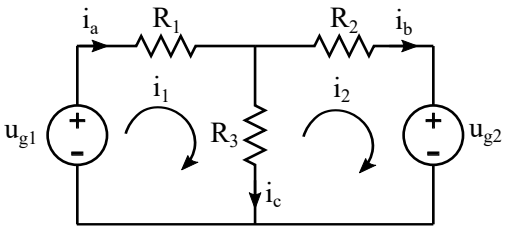
   $R_{jj} =$ Resistencia total en la malla j.

   $R_{jk} = -$ Resistencia total compartida entre la malla j y la malla k.

   El vector $\left[I_{malla}\right]$ contiene las corrientes de malla, y los términos del vector $\left[Ug\right]$ son las elevaciones de tensión producidos por las fuentes en cada una de las mallas:

   $U_{gi} = \sum$ elevaciones de tensión en fuentes de tensión en la malla i

5. Finalmente, se calculan las corrientes de rama y otras variables solicitadas (potencias, tensiones...) utilizando los valores de las corrientes de malla obtenidos.



$$i_a = i_1$$

$$i_b = i_2$$

$$i_c = i_1 - i_2$$

2.2. Aplicación del método de mallas en circuitos con fuentes de corriente

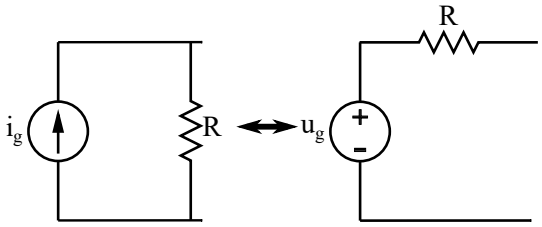
La aplicación del método de mallas al análisis de circuitos que contienen únicamente resistencias y fuentes de tensión es bastante sencillo, ya que la caída de tensión en las resistencias viene definida por la ley de Ohm y la caída de tensión en las fuentes de tensión es la tensión de salida de cada fuente.

El caso de los circuitos que incorporan fuentes de corriente es algo más complejo, ya que aunque las fuentes de corriente proporcionan un valor de corriente conocido, su caída de tensión depende de la configuración del circuito. Por este motivo no resulta tan sencillo incluir estos elementos en las ecuaciones de malla.

En esta sección se proponen distintos métodos que se podrían emplear para aplicar el método de mallas a circuitos con fuentes de corriente.

2.2.1. Fuentes de corriente reales

Como se estudió en el Tema 1, las fuentes de corriente reales se pueden transformar en fuentes de tensión reales equivalentes de acuerdo a la siguiente regla de transformación:



$$u_g = i_g \cdot R$$

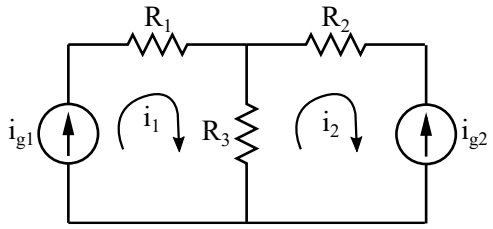
En circuitos con fuentes de corriente reales se pueden seguir los siguientes pasos para facilitar la aplicación del método de mallas:

1. Se transforman las fuentes de corriente reales en fuentes de tensión reales.
2. Se resuelve el circuito aplicando el método de mallas.
3. Se vuelve al circuito original y se usan las corrientes de malla obtenidas para encontrar las variables solicitadas (tensiones, corrientes, potencias...).

2.2.2. Fuentes de corriente ideales que pertenecen a una sola malla

Si queremos resolver un circuito que contiene una fuente de corriente ideal en una rama que pertenece exclusivamente a una malla, podemos suponer que la corriente de la malla es igual a la corriente de la fuente de corriente.

En el siguiente circuito:



Las ecuaciones de malla se pueden esciribir como:

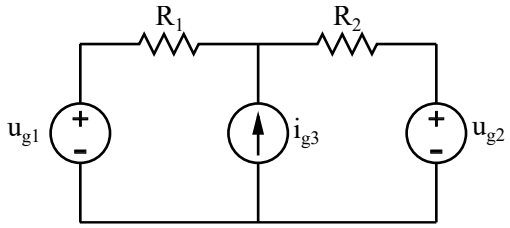
Malla 1: $i_1 = i_{g1}$

Malla 2: $i_2 = -i_{g2}$

Se debe tener en cuenta que las resistencias R_1 y R_2, que están en serie con las fuentes de corriente ideales, no tienen efecto sobre la corriente que fluye por las ramas.

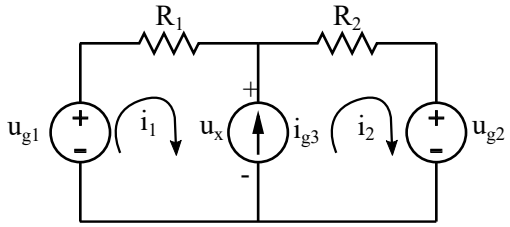
2.2.3. Fuentes de corriente ideales que pertenecen a más de una malla

Hay otros casos en los que el circuito contiene una fuente de corriente ideal que pertenece a más de una malla:



En este caso no es posible transformar la fuente de corriente en una fuente de tensión, y tampoco es posible identificar la corriente de la fuente con ninguna de las corrientes de malla. Sin embargo, se pueden aplicar dos estrategias diferentes para encontrar las ecuaciones de malla:

1. Definir una nueva incógnita u_x, que es la caída de tensión en la fuente de corriente ideal.



   Esta nueva incógnita se incluirá en las ecuaciones de malla. El sistema debe completarse con una ecuación adicional que relacione la corriente de la fuente de corriente ideal con las corrientes de malla:

   Malla 1: $-u_{g1} + R_1 \cdot i_1 + u_x = 0$

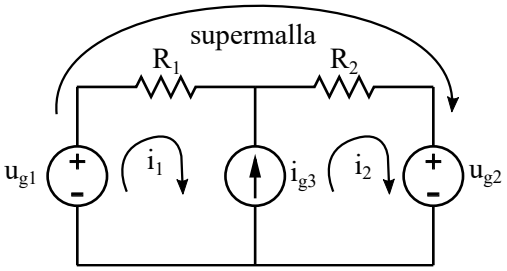
   Malla 2: $R_2 \cdot i_2 - u_x + u_{g2} = 0$

Ecuación adicional: $i_{g3} = i_2 - i_1$

Estas ecuaciones también se podrían expresar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & 1 \\ 0 & R_2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{g1} \\ -u_{g2} \\ i_{g3} \end{pmatrix}$$

2. Una alternativa a la solución anterior es aplicar el método de la **supermalla**. Una supermalla es un camino cerrado que contiene la rama donde se conecta la fuente de corriente ideal. En el ejemplo anterior se podría tomar la parte externa del circuito como supermalla.



Aplicando la 1LK a la supermalla:

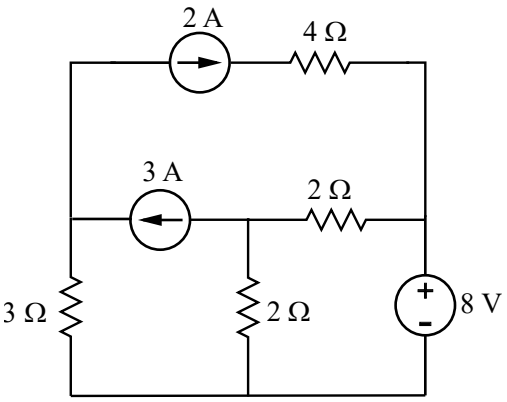
Ecuación del la supermalla: $-u_{g1} + R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 + u_{g2} = 0$

El sistema de ecuaciones debe completarse con una ecuación adicional que relacione las corrientes de malla con la corriente de la fuente de corriente ideal.

Ecuación adicional: $i_{g3} = i_2 - i_1$

2.3. Ejemplo

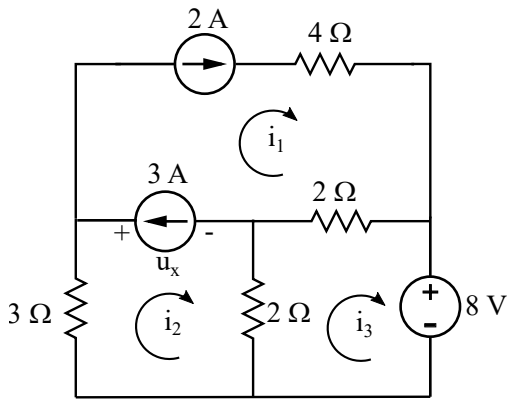
Resolver el siguiente circuito usando el método de mallas y hacer un balance de potencias.



Solución

En este ejemplo se resuelve el circuito mediante el método de mallas, aunque existen otros métodos y simplificaciones que podrían conducir a la misma solución de manera más rápida.

En primer lugar se asigna una corriente de malla a cada malla del circuito y se define la tensión u_x:



Las ecuaciones de mallas son:

Malla 1: $i_1 = 2$

Malla 2: $3 \cdot i_2 + u_x + 2 \cdot (i_2 - i_3) = 0$

Malla 3: $2 \cdot (i_3 - i_2) + 2 \cdot (i_3 - i_1) + 8 = 0$

Ecuación adicional: $i_1 - i_2 = 3$

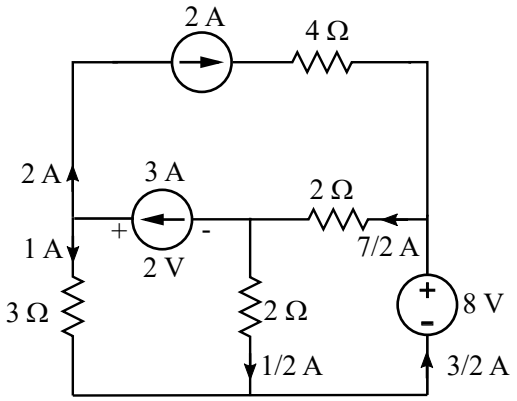
Podríamos escribir estas ecuaciones en forma matricial o resolver el sistema de ecuaciones usando cualquier otro método:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones:

$i_1 = 2A \quad i_2 = -1A \quad i_3 = -3/2A \quad u_x = 2V$

A partir de las corrientes de malla se pueden calcular las corrientes que circulan por todas las ramas del circuito:



A continuación se calcula el balance de potencias:

Potencia **absorbida** en resistencias:

$p_R = \sum_k R_k \cdot i_k = 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot (7/2)^2 + 2 \cdot (1/2)^2 = 44W$

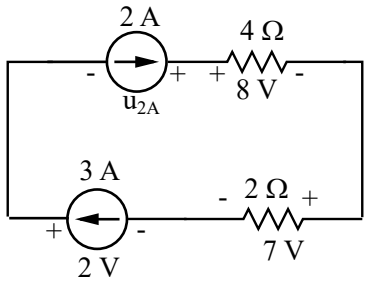
Potencia **entregada** por fuentes:

$pg = \sum_k u_k \cdot i_k$

$p_{3A} = 2 \cdot 3 = 6W$

$p_{8V} = 8 \cdot 3/2 = 12W$

La caída de tensión en la fuente de corriente de 2A se calcula aplicando la 2LK a un camino cerrado que contenga la fuente:



$-u_{2A} + 8 + 7 - 2 = 0 \qquad u_{2A} = 13V$

$p_{2A} = 2 \cdot 13 = 26W$

$p_{sources} = 26 + 6 + 12 = 44W$

Finalmente se verifica el balance de potencias:

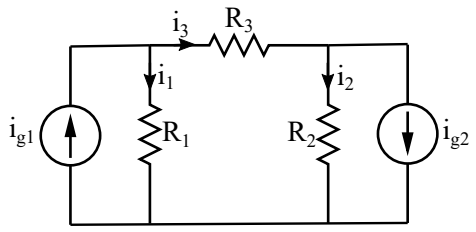
Potencia generada por las fuentes = Potencia absorbida por las resistencias

3. Método de las tensiones de nudo

El método de las tensiones de nudos, también denominado **análisis por nudos**, es un método sistemático basado en la aplicación de la primera ley de Kirchoff (1LK) a todos los nudos de un circuito.

3.1. Aplicación del método nudos

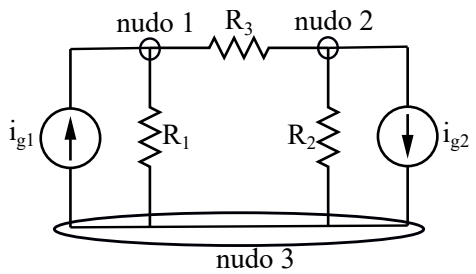
Imaginemos que queremos resolver el siguiente circuito y encontrar las corrientes de rama i_1, i_2 y i_3:



La aplicación del método de tensión de nudos consta de los siguientes pasos:

1. Primero identificamos los nudos independientes del circuito, es decir, los nudos que están a distinto nivel de tensión.

   El circuito de la figura tiene tres nudos independientes. Todas las ramas en la parte inferior del circuito tienen el mismo nivel de tensión, por lo que esa parte del circuito se toma como un único nudo. Etiquetamos los nudos con los números 1, 2 y 3.

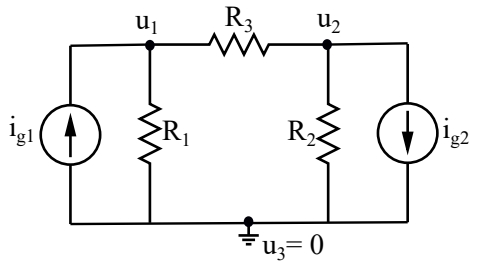


   El método de nudos consiste en encontrar la tensión de cada nudo con respecto a un nudo de referencia, cuyo nivel de tensión es cero.

   En el ejemplo anterior asignamos una tensión de nudo a cada uno de los tres nudos independientes (u_1, u_2 y u_3) y tomamos el nudo 3 como referencia, asignándole un nivel de tensión cero ($u_3 = 0$).

   El objetivo del método de nudos es encontrar la tensión de cada nudo de no referencia con respecto al nudo de referencia. [3]

[3] En algunos problemas se especifica el nudo de referencia mientras que en otros casos necesitaremos asignarlo. Cualquier nudo puede tomarse como referencia. La solución final del problema es la misma para cualquier elección.



2. Aplicamos la 1LK a cada nudo del circuito considerando que el nivel de tensión de cada nudo es su tensión de nudo:

$$\sum_k i_k = 0$$

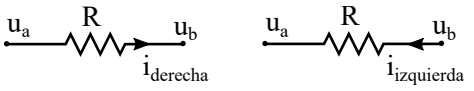
Para la aplicación del método de nudos se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Se debe adoptar un criterio de signo para aplicar la 1KL. Cualquier criterio es válido si se aplica de manera consistente. En estas notas consideraremos que las corrientes que salen de los nudos son positivas y que las corrientes que entran en los nudos son negativas.

Corrientes salientes +

Corrientes entrantes -

- Las corrientes que fluyen a través de las resistencias se pueden calcular usando la ley de Ohm. Calcularemos la corriente que fluye a través de cada resistencia del circuito como la diferencia entre las tensiones de nudo de sus dos terminales dividida por le valor de la resistencia. Se puede considerar que la corriente fluye hacia la derecha o hacia la izquierda cambiando su signo.



$$i_{derecha} = \frac{u_a - u_b}{R} \qquad i_{izquierda} = \frac{u_b - u_a}{R}$$

3. Al aplicar la 1LK a todos los nudos de no referencia, obtendremos un sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como nudos de no referencia haya en el circuito:

Ecuación nudo 1: $-i_{g1} + \dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_1 - u_2}{R_3} = 0$

Ecuación nudo 2: $i_{g1} + \dfrac{u_2}{R_2} + \dfrac{u_2 - u_1}{R_3} = 0$

4. Resolvemos el sistema y encontramos los valores para las tensiones de nudo. A veces es útil expresar las ecuaciones de nudos en forma matricial. Esto es especialmente interesante para circuitos con tres o más nudos de no referencia.

   Las ecuaciones en notación matricial para el ejemplo anterior se muestran a continuación:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{g1} \\ -i_{g2} \end{pmatrix}$$

   Resolviendo estas ecuaciones podremos encontrar los valores de u_1 y u_2.

   Las ecuaciones de los nudos en forma matricial se pueden generalizar como:

$$\left[\mathfrak{G}\right] \cdot \left[U_{nudo}\right] = \left[I_g\right]$$

   donde $\mathfrak{G}$ es la llamada **matriz de conductancia**:

$$\left[\mathfrak{G}\right] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

   Los términos de la diagonal principal de la matriz de conductancia son las conductancias propias de cada nudo (es decir, la conductancia total conectada al nudo analizado) y los términos no diagonales son las conductancias compartidas por dos nudos con signo negativo.

   $G_{11} =$ Conductancia total conectada al nudo 1.

   $G_{22} =$ Conductancia total conectada al nudo 2.

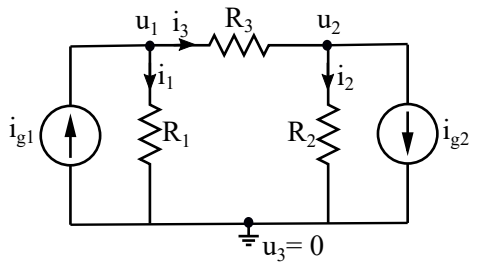
   $G_{12} = G_{21} = -$ Conductancia total conectada entre los nudos 1 y 2.

   Los vectores $\left[U_{nudo}\right]$ y $\left[Ig\right]$ son:

$$\left[U_{nudo}\right] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[Ig\right] = \begin{bmatrix} \sum \text{Corriente introducida por fuentes de corriente ideales en el nudo 1} \\ \sum \text{Corriente introducida por fuentes de corriente ideales en el nudo 2} \end{bmatrix}$$

5. Finalmente, las corrientes de rama i_1, i_2 y i_3 se calculan usando las tensiones de nudo obtenidas:



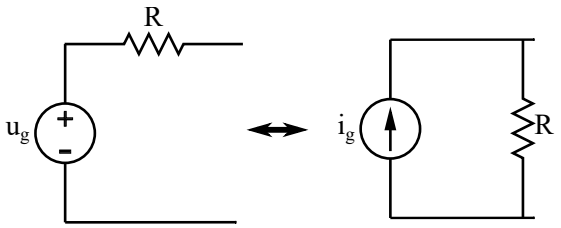
$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} \qquad i_2 = \frac{u_2}{R_2} \qquad i_3 = \frac{u_1 - u_2}{R_3}$$

3.2. Aplicación del método de nudos a circuitos con fuentes de tensión

La presencia de fuentes de tensión complica la aplicación del método de nudos al análisis de un circuito. Las fuentes de tensión tienen una caída de tensión bien definida, pero la corriente que fluye a través de ellas depende de la configuración del circuito. En esta sección se explican varios procedimientos que es posible usar para aplicar el análisis por nudos a circuitos que incorporen fuentes de tensión.

3.2.1. Fuentes de tensión reales

Como se estudió en el Tema 1, una fuente de tensión real se puede transformar en una fuente de corriente real equivalente de acuerdo con la siguiente regla de transformación:



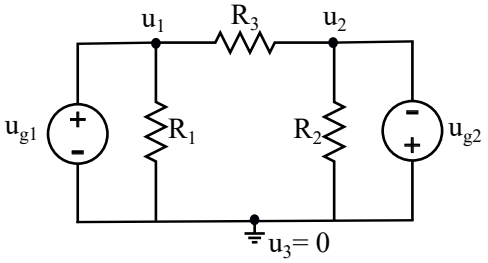
$$i_g = \frac{u_g}{R}$$

Para resolver circuitos que incluyan fuentes de tensión reales usando análisis por nudos, se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Transformar las fuentes de tensión reales en fuentes de corriente reales.
2. Resolver el circuito aplicando el método de nudos como se explicó anteriormente.
3. Regresar al circuito original y usar la información obtenida mediante el análisis por nudos para encontrar las variables deseadas (voltajes, corrientes, potencias...).

3.2.2. Fuentes de tensión ideales conectadas al nudo de referencia

Si en un circuito encontramos una fuente de tensión ideal conectada entre un nudo de no referencia y el nudo de referencia, como ocurre en el siguiente diagrama, podremos suponer que la tensión del nudo es igual a la tensión de salida de la fuente.



En ese caso, las ecuaciones de nudos se pueden escribir como:

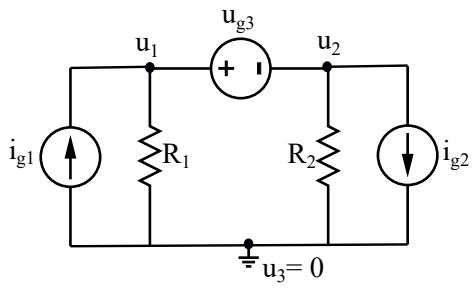
Nudo 1: $u_1 = u_{g1}$

Nudo 2: $u_2 = -u_{g2}$

Se debe tener en cuenta que las resistencias R_1 y R_2, que están en paralelo con las fuentes de tensión ideales no tienen ningún efecto sobre la caída de tensión entre los nudos.

3.2.3. Fuentes de tensión ideales conectadas entre dos nudos de no referencia

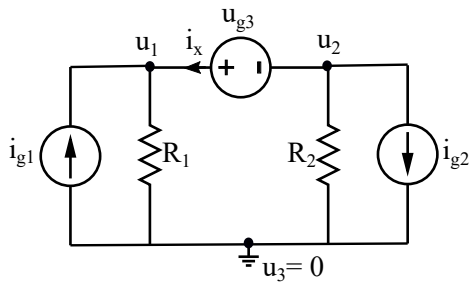
Hay otros casos en los que una fuente de tensión ideal se encuentra conectada entre dos nudos que no son de referencia, como en el siguiente circuito:



En este caso, no podremos transformar la fuente de tensión en una fuente de corriente ni podremos identificar la tensión de salida de la fuente con una de las tensiones de nudo.

Se pueden aplicar dos estrategias diferentes para resolver el circuito por el método de nudos:

1. Definir una nueva corriente desconocida i_x, que es la corriente que fluye a través de la fuente de tensión ideal.



   Esta nueva incógnita se incluirá en las ecuaciones pero será necesario plantear una ecuación adicional que relacione la tensión de salida de la fuente de tensión ideal con las tensiones de los nudos para completar el sistema.

   Las ecuaciones de nudos en este caso son:

$$\text{Nudo 1: } -i_{g1} + \frac{u_1}{R_1} - i_x = 0$$

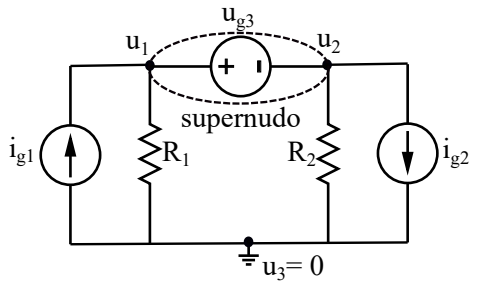
$$\text{Nudo 2: } i_{g2} + \frac{u_2}{R_2} + i_x = 0$$

$$\text{Ecuación adicional: } u_1 - u_2 = u_{g3}$$

Estas ecuaciones también se pueden expresar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{g1} \\ -i_{g2} \\ u_{g3} \end{pmatrix}$$

2. Como alternativa al método anterior es posible escribir una **ecuación del supernudo**. El supernudo es un nudo ficticio que contiene la fuente de tensión ideal:



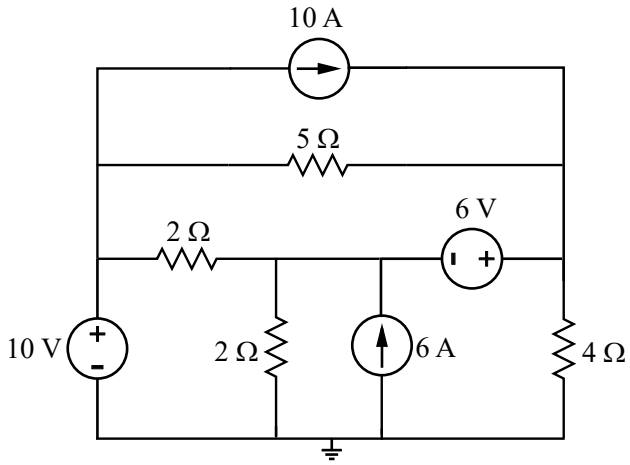
El sistema se debe completar con una ecuación adicional que relacione las tensiones de nudo con la tensión de salida la fuente de tensión ideal:

$$\text{Ecuación del supernudo: } -u_{g1} + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + u_{g2} = 0$$

$$\text{Ecuación adicional: } u_{g3} = u_1 - u_2$$

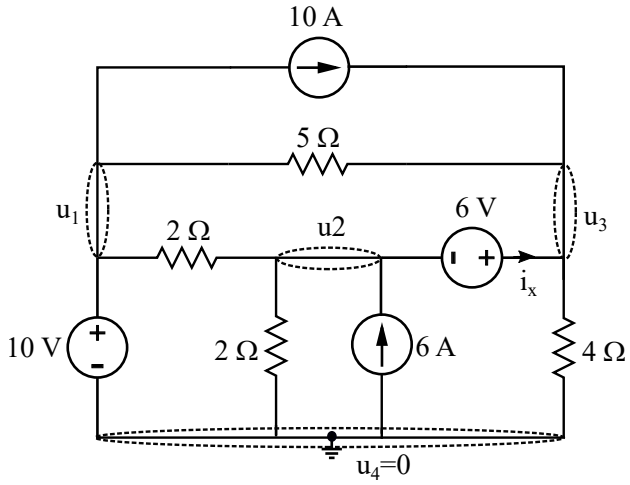
3.3. Ejemplo

Resorver el siguiente circuito usando el método de nudos:



Solución

Primero tenemos que identificar los nudos independientes y asignarles una tensión de nudo. Establecemos la referencia en el nudo 4.



Aplicamos la 1LK a los nudos 1, 2 y 3 y escribimos las ecuaciones de nudo:

$$\text{Nudo 1: } u_1 = 10$$

$$\text{Nudo 2: } \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{u_2}{2} - 6 + i_x = 0$$

$$\text{Nudo 3: } -10 + \frac{u_3 - u_1}{5} + \frac{u_3}{4} - i_x = 0$$

$$\text{Ecuación adicional: } u_3 - u_2 = 6$$

Podemos resolver el sistema usando matrices o con cualquier otro método de resolución. El sistema en forma matricial sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}+\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones encontramos:

$$u_1 = 10V \quad u_2 = 14V \quad u_3 = 20V \quad i_x = -3A$$

También podríamos haber escrito las ecuaciones de nudo usando el método del supernudo. Considerando un supernudo que contiene los nudos 2 y 3 encontramos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Nudo 1: } u_1 = 10$$

$$\text{Supernudo: } \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{u_2}{2} - 6 - 10 + \frac{u_3 - u_1}{5} + \frac{u_3}{4} = 0$$

Ecuación adicional: $u_3 - u_2 = 6$

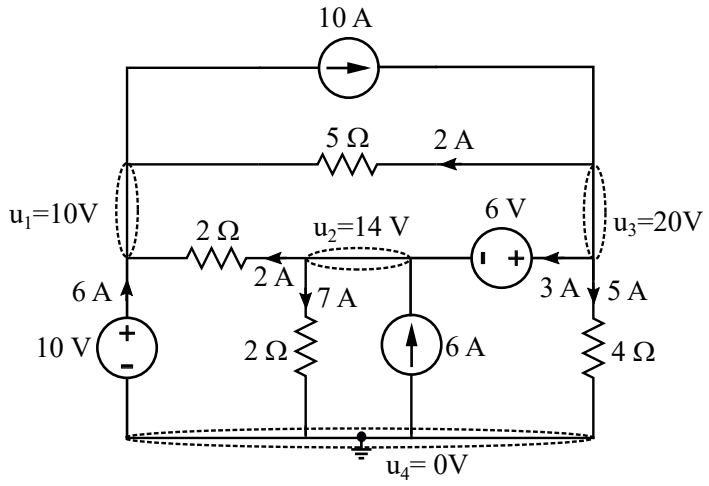
La resolución del sistema conduce a la misma solución obtenida anteriormente:

$$u_1 = 10V \quad u_2 = 14V \quad u_3 = 20V$$

Ahora podemos obtener la corriente en cada rama del circuito considerando que la corriente fluye entre el nudo de mayor tensión y el nudo de menor tensión, y que el valor de la corriente se calcula como:

$$i = \frac{u_{mayor} - u_{menor}}{R}$$

Adicionalmente, se pueden calcular las corrientes que fluyen a través de las fuentes de tensión aplicando la 1LK a los nudos donde están conectadas:



Finalmente calculamos el balance de potencia:

- Potencia **absorbida** por las resistencias:

$$p_R = \sum_k R_k \cdot i_k = 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 5^2 = 226W$$

- Potencia **entregada** por fuentes:

$$p_{fuentes} = \sum_k u_k \cdot i_k$$

Las fuentes absorben energía si la polaridad relativa entre la tensión y la corriente es tal que la corriente fluye de + a -. Esto ocurre en la fuente de tensión de 6V de este ejemplo. En ese caso, la potencia de la fuente se tomará como negativa.

$p_{10A} = 10 \cdot 10 = 100W$

$p_{6V} = -6 \cdot 3 = -18W$

$p_{6A} = 14 \cdot 6 = 84W$

$p_{10V} = -10 \cdot 6 = -60W$

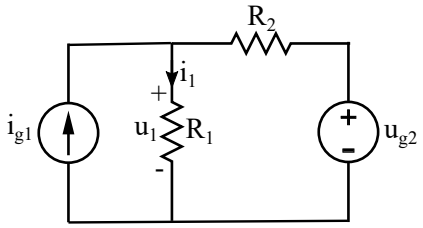
$p_{fuentes} = 100 - 18 + 84 + 60 = 226W$

4. Principio de superposición

El principio de superposición establece que *la respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación que actúan simultáneamente es igual a la suma de las respuestas del circuito a las fuentes actuando por separado.*

Un circuito es lineal si la relación entre las tensiones y corrientes en todos sus elementos verifica una relación lineal. Este es el caso de todos los circuitos que se estudiarán en este curso.

El principio de superposición se puede aplicar al cálculo de la corriente i_1 y la tensión u_1 en el siguiente circuito:



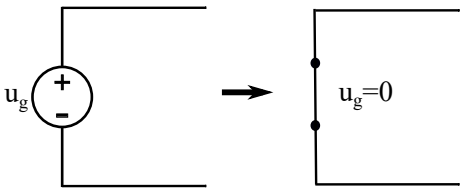
La corriente i_1 es la suma de la corriente que fluye a través de la resistencia si solo funciona la fuente de corriente más la corriente que fluye a través de ella si solo funciona la fuente de tensión.

La misma afirmación es válida para el cálculo de la tensión u_1.

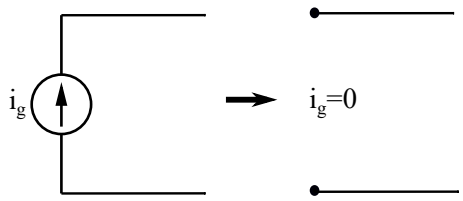
Para aplicar el principio de superposición *apagamos* las fuentes una a una y calculamos la respuesta del circuito cuando cada fuente actúa por separado. De esta manera obtenemos la respuesta completa del circuito como la suma de ambas respuestas.

Se debe tener en cuenta que:

- Cancelar una fuente de tensión consiste en considerar que su caída de tensión es cero. Esto es equivalente a transformarla en un cortocircuito.

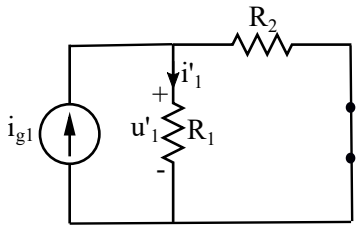


- Cancelar una fuente de corriente consiste en considerar que la corriente que circula por ella es nula. Esto es equivalente a transformar la fuente en un circuito abierto.



Para resolver el circuito de la figura usando el principio de superposición:

1. Se apaga la fuente de tensión y se analiza la respuesta del circuito cuando solo la fuente de corriente actúa como excitación:



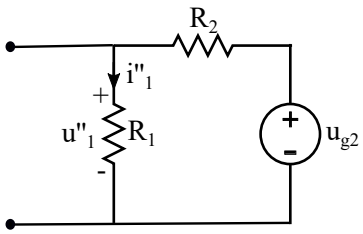
La corriente i_1' se podría calcular usando la fórmula del divisor de corriente, ya que las dos resistencias quedan conectadas en paralelo:

$$i_1' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i_{g1}$$

La tensión u_1' es:

$$u_1' = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot i_{g1}$$

2. Se apaga la fuente de corriente y se analiza la respuesta del circuito cuando solo la fuente de tensión actúa como excitación:



En este caso, las dos resistencias quedan conectadas en serie y la corriente i_1'' es:

$$i_1'' = \frac{u_{g2}}{R_1 + R_2}$$

y la tensión u_1'':

$$u_1'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot u_{g2}$$

3. Finalmente, se calcula la corriente i_1 y la tensión u_1 como la suma de las respuestas separadas:

$$i_1 = i_1' + i_1''$$

$$u_1 = u_1' + u_1''$$

Se deben tener en cuenta dos aspectos relativos al principio de superposición:

- El principio de superposición no se puede utilizar para calcular la potencia absorbida por un elemento del circuito. Si queremos calcular la potencia absorbida por una resistencia (es decir, p_{R_1}) debemos recordar que:

  $$p_{R_1} \neq p'_{R_1} + p''_{R_1}.$$

  Sin embargo, se podría usar el principio de superposición para calcular el valor de la corriente i_1 y luego usar el valor obtenido para obtener la potencia:

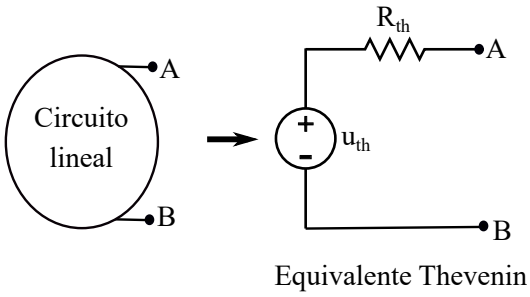
  $$p_{R_1} = R_1 \cdot i_1^2$$

- Como se verá más adelante, el principio de superposición resulta muy útil para resolver circuitos de CA con fuentes de diferentes frecuencias.

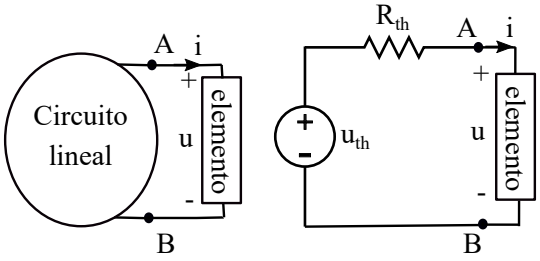
5. Aplicación del teorema de Thevenin al análisis de circuitos

5.1. Teorema de Thevenin

Cualquier circuito lineal visto desde dos terminales se puede reemplazar por un circuito simplificado que consta de una fuente de tensión ideal en serie con una resistencia. Este circuito simplificado es el **equivalente de Thevenin** del circuito.



El teorema de Thevenin implica que cualquier elemento (una resistencia, una fuente de voltaje, una fuente de corriente...) conectado entre A y B tendría un comportamiento idéntico (es decir, el mismo flujo de corriente y la misma caída de voltaje) si se considera el circuito inicial o si se considera el circuito equivalente. No sería posible distinguir entre la configuración del lado izquierdo y la configuración del lado derecho de la siguiente figura :

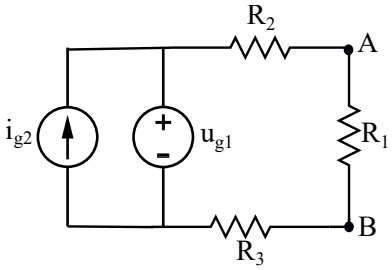


El teorema de Thevenin tiene muchas aplicaciones prácticas, como el diseño de circuitos electrónicos o el análisis de sistemas eléctricos.

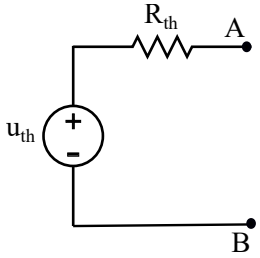
Para aplicar el teorema de Thevenin necesitamos aprender a calcular los dos parámetros del circuito equivalente: u_{th} y R_{th}.

5.2. Determinación del equivalente de Thevenin de un circuito

Queremos encontrar el equivalente de Thevenin del siguiente circuito:



Calcular el equivalente de Thevenin del circuito significa determinar qué par de valores u_{th} y R_{th} hacen que el comportamiento del circuito simplificado sea idéntico al del circuito inicial visto desde los terminales A y B.



El circuito original y el equivalente de Thevenin son equivalentes si cualquier elemento conectado entre A y B se comporta de la misma manera en el circuito original y en el circuito equivalente.

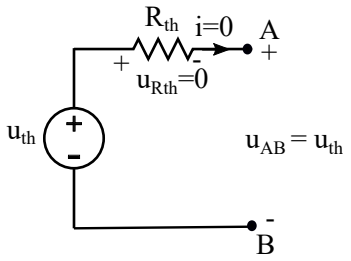
Para calcular u_{th} y R_{th} evaluamos cómo se comportan ambos circuitos bajo dos situaciones particulares:

1. El comportamiento de los dos circuitos cuando dejamos los terminales A y B en circuito abierto (esto es lo mismo que conectar una resistencia de valor infinito entre A y B).

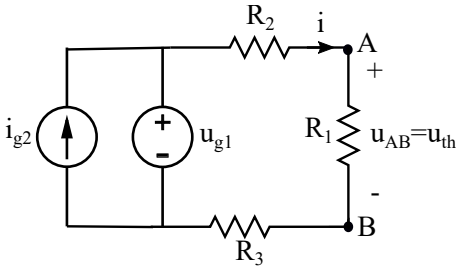
2. El comportamiento de los dos circuitos cuando consideramos un cortocircuito conectado entre A y B (esto es lo mismo que conectar una resistencia de valor cero).

5.2.1. Cálculo de la tensión Thevenin (u_{th}): análisis de circuito abierto

En primer lugar, analizamos el comportamiento del circuito equivalente cuando el circuito está abierto. En ese caso, la corriente que fluye entre A y B es nula y la caída de tensión en R_{th} también es cero. Como puede verse, bajo esta condición $u_{AB} = u_{th}$



El análisis del circuito original sin conectar nada entre A y B proporciona el valor de u_{th}:



La corriente i es:

$$i = \frac{u_{g1}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

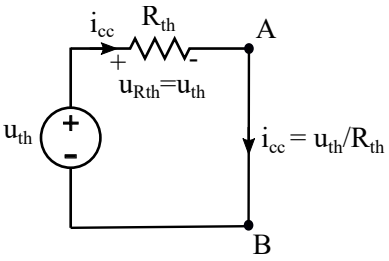
y la tensión entre A y B:

$$u_{AB} = R_1 \cdot i = \frac{R_1 \cdot u_{g1}}{R_1 + R_2 + R_3} = u_{th}$$

5.2.2. Cálculo de la resistencia Thevenin (R_{th}): análisis de cortocircuito

Para obtener el valor de R_{th} analizamos el comportamiento del circuito equivalente y del circuito original cuando se coloca un cortocircuito (es decir, un elemento de resistencia 0) entre A y B.

En ese caso, una corriente de cortocircuito (i_{cc}) fluiría a través del circuito equivalente:



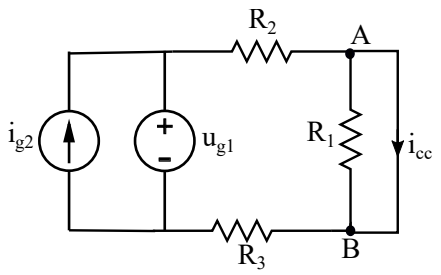
Se puede ver que la caída de tensión en la resistencia R_{th} es igual a u_{th} (solo tenemos que aplicar la 2LK al circuito). De este modo, aplicando la ley de Ohm se pueden encontrar una relación entre i_cc, u_{th} y R_{th}:

$$u_{th} = R_{th} \cdot i_{cc}$$

y R_{th} se puede calcular como:

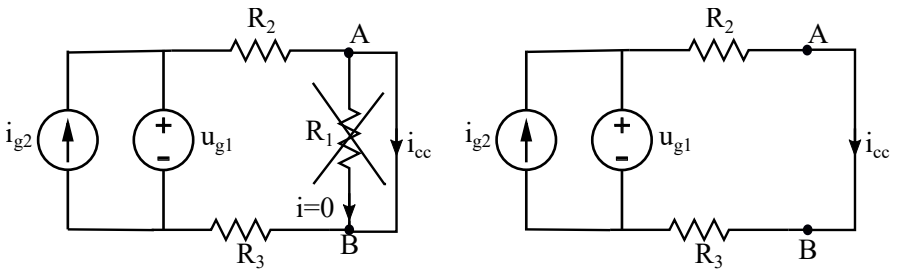
$$R_{th} = \frac{u_{th}}{i_{cc}}$$

Para calcular el valor de i_{cc} necesitamos volver al circuito original. Como ambos circuitos son equivalentes podemos encontrar i_{cc} como la corriente que circula por un cortocircuito situado entre A y B:



Nuestro objetivo es calcular la corriente i_{cc} que fluye de A a B. Podríamos usar cualquier método de análisis para este fin.

Es fácil encontrar el valor de i_{cc} si consideramos que, como R_1 ahora está en paralelo con un cortocircuito, puede cancelarse [4]



La corriente i_{cc} es:

$$i_{cc} = \frac{u_{g1}}{R_2 + R_3}$$

y entonces:

$$R_{th} = \frac{u_{th}}{i_{cc}} = \frac{R_1 \cdot u_{g1}}{R_1 + R_2 + R_3} : \frac{u_{g1}}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

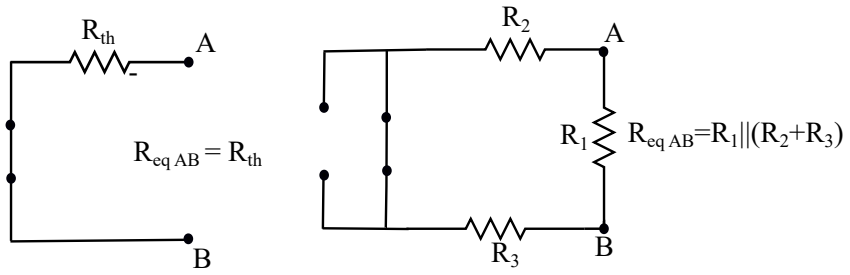
[4] Una resistencia conectada en paralelo con un cortocircuito tendrá corriente 0, ya que toda la corriente que ingresa al nudo A *elegiría* fluir a través del camino de menor resistencia, que es el cortocircuito. Otra forma de verlo es considerar que ahora tenemos una resistencia nula en paralelo con la resistencia R_1, por lo que la asociación de las dos resistencias daría una resistencia equivalente igual a cero.

5.2.3. Método alternativo para calcular R_{th}: circuito pasivo

Un método alternativo para calcular R_{th} consiste en pasivizar el circuito y calcular la resistencia equivalente entre los terminales A y B.

Para pasivizar el circuito debemos apagar las fuentes. Como se explicó antes, las fuentes de tensión se convierten en cortocircuitos y las fuentes de corriente en circuitos abiertos.

En el ejemplo anterior el circuito equivalente y el circuito original se convertirían en:

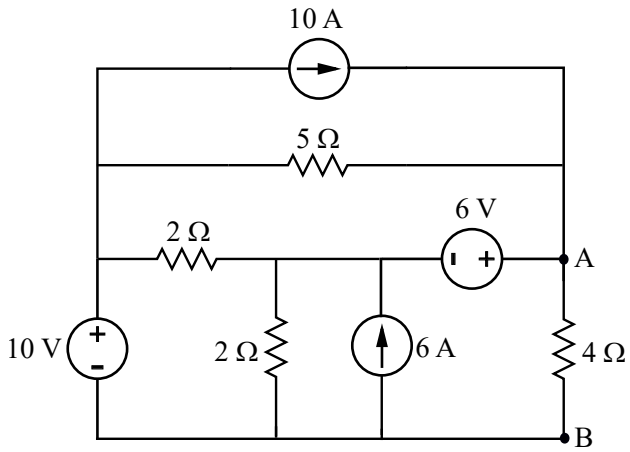


La resistencia equivalente entre A y B es R_{th}:

$$R_{th} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

5.3. Ejemplo 1

Obtener el equivalente de Thevenin entre A y B del siguiente circuito:



En este ejemplo, se nos pide que obtengamos el equivalente de Thevenin de todo el circuito (es decir, incluyendo todos sus elementos en el equivalente).

Necesitamos calcular los parámetros u_{th} y R_{th}.

1. Cálculo de la tensión Thevenin

   Para obtener el valor de de la tensión Thevenin calculamos la caída de tensión entre los terminales A y B en el circuito original (u_{AB}). Podríamos aplicar análisis de mallas o nudos para encontrar esa tensión.

En la sección 3.3, se resolvió el mismo circuito mediante análisis por nudos y se encontró que $u_{AB} = 20V$. Entonces:

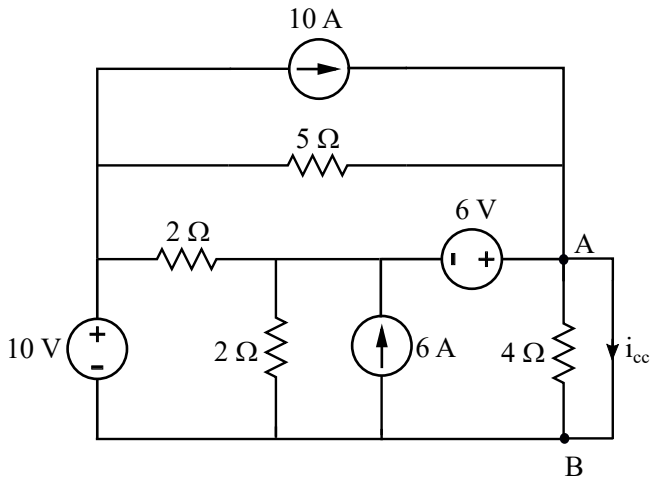
$$u_{th} = u_{AB} = 20V$$

2. Cálculo de la resistencia Thevenin

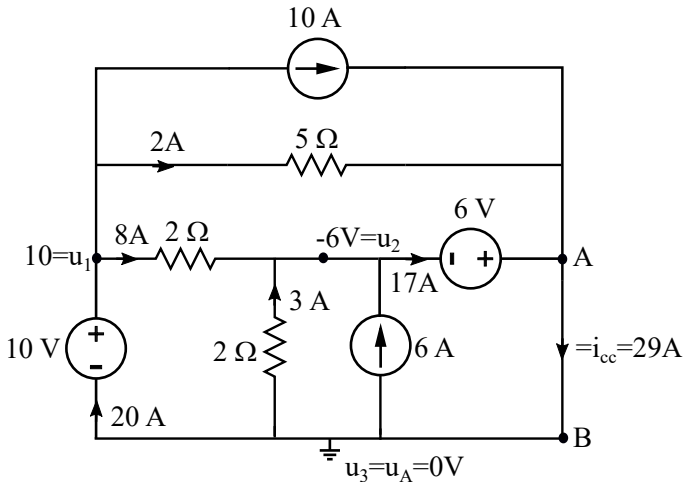
   Para calcular R_{th} se pueden usar dos métodos: El cálculo de la corriente de cortocircuito y el cálculo de la resistencia equivalente entre A y B tras pasivizar el circuito.

   a) Método 1: Cálculo de i_{cc}

   Conectamos un cortocircuito entre A y B y calculamos la corriente que fluye de A a B (i_{cc}).



   Aplicamos análisis por nudos para resolver el circuito. La resistencia de 4 Ω está en paralelo con un cortocircuito por lo que puede eliminarse del circuito. Tomando B como nudo de referencia, y considerando que ahora $u_A = u_B$, es fácil obtener la tensión de los nudos y las corrientes de rama.



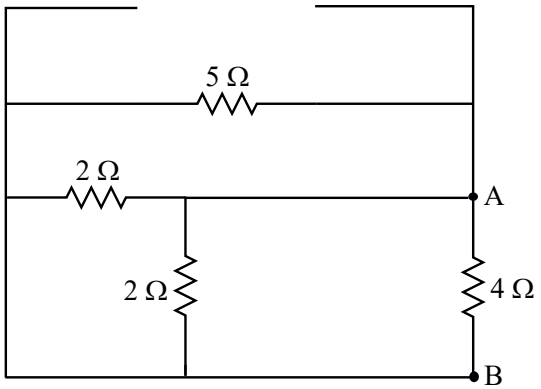
   Como se puede ver $i_{cc} = 29A$

Finalmente calculamos R_{th} como:

$$R_{th} = \frac{u_{th}}{i_{cc}} = \frac{20}{29} = 0{,}69\Omega$$

b) Método 2: Cálculo de $R_{eq_{AB}}$

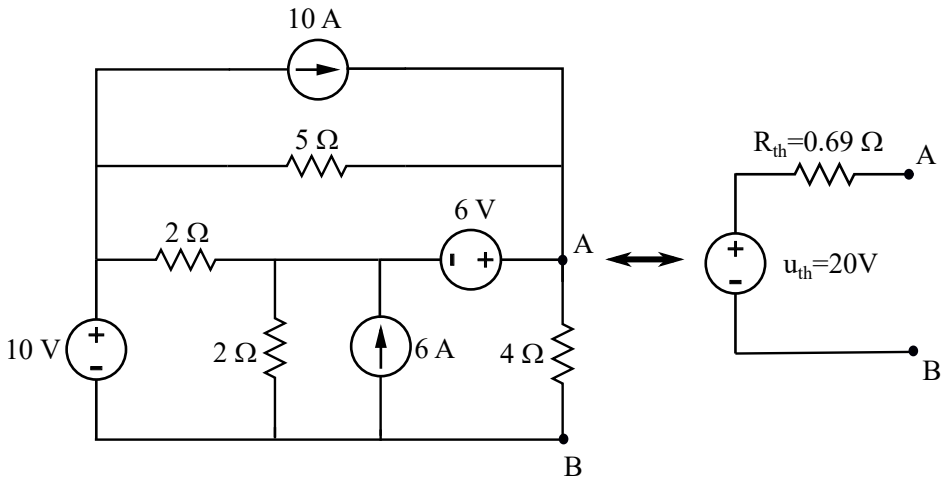
El circuito se pasiviza apagando las fuentes de tensión y corriente:



Visto desde los terminales A B, las cuatro resistencias están en paralelo. En consecuencia, calculamos la resistencia de Thevenin como:

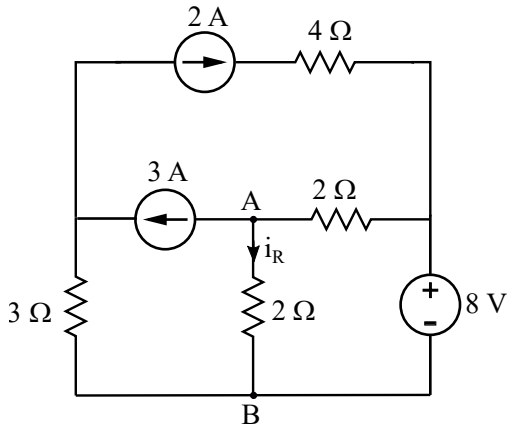
$$R_{th} = R_{eq_{AB}} = 2\Omega||2\Omega||5\Omega||4\Omega = 0{,}69\Omega$$

El circuito original es equivalente al circuito de Thevenin simplificado cuyos parámetros se han obtenido en este ejemplo:



5.4. Ejemplo 2

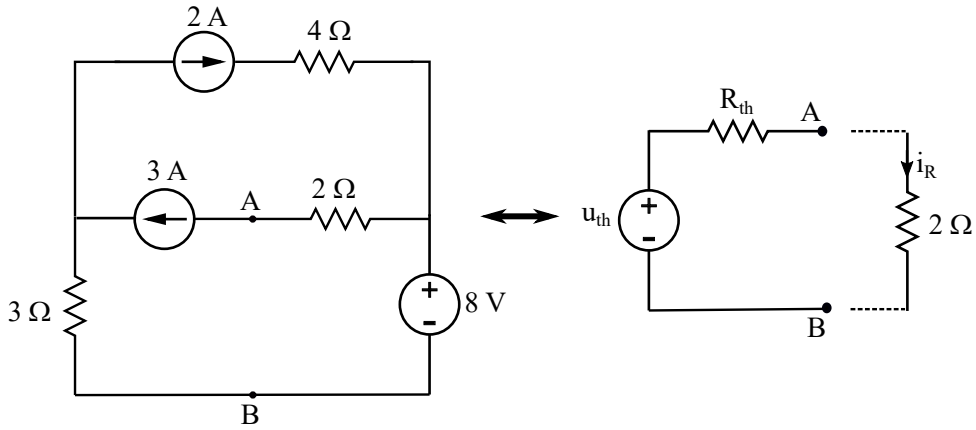
Calcular la corriente i_R que fluye a través de la resistencia de 2 Ω conectada entre A y B mediante el teorema de Thevenin.



Solución

Este segundo ejemplo muestra cómo aplicar el equivalente de Thevenin al análisis de un elemento particular de un circuito.

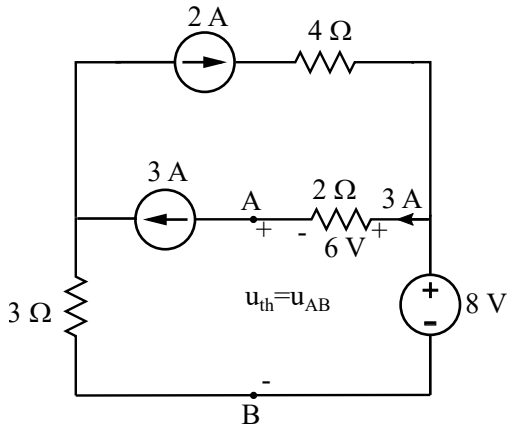
En este caso no debemos incluir la resistencia que queremos estudiar (la de 2Ω) en el equivalente. Calcularemos el equivalente del circuito que resulta cuando se quita la resistencia, y una vez obtenido el equivalente de Thevenin del circuito restante conectaremos la resistencia de 2 Ω al circuito equivalente y calcularemos la corriente solicitada (i_R):



1. Calculo de u_{th}

   La tensión Thevenin es la caída de tensión entre los terminales A B del circuito original después de quitar la resistencia de 2 Ω:

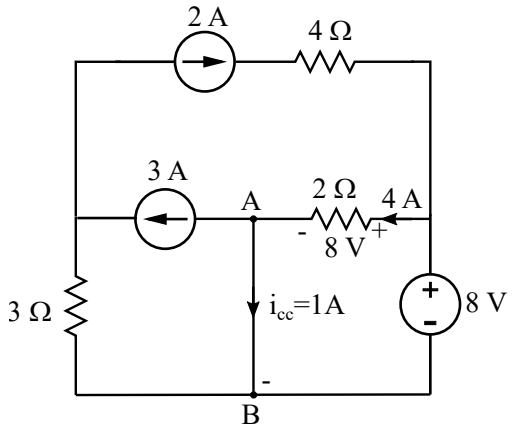
$$u_{th} = u_{AB} = -6 + 8 = 2V$$



2. Cálculo de R_{th}

   a) Método 1: corriente de cortocircuito

   Conectamos un cortocircuito entre A y B y obtenemos la corriente que circula por él:

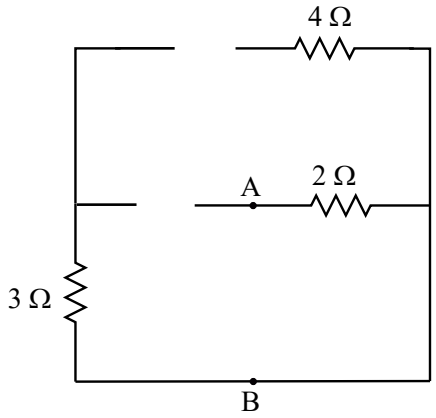


   Como se puede ver $i_{cc} = 1A$. Entonces:

$$R_{th} = \frac{u_{th}}{i_{cc}} = \frac{2}{1} = 2\Omega$$

   b) Método 2: Resistencia equivalente

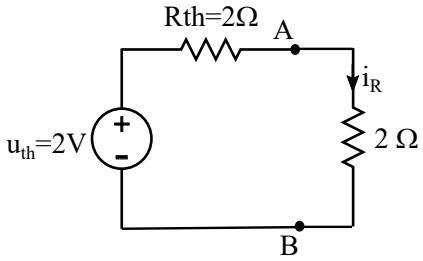
   Como alternativa, podemos pasivizar el circuito, y calcular la resistencia equivalente entre los terminales A B.



Como las resistencias de 3 y 4 Ω están en serie con circuitos abiertos, la única resistencia que contribuye a la resistencia equivalente es la de 2 Ω. Por lo tanto:

$$R_{th} = R_{eq_{AB}} = 2\Omega$$

Finalmente usamos el equivalente Thevenin obtenido para calcular i_R:

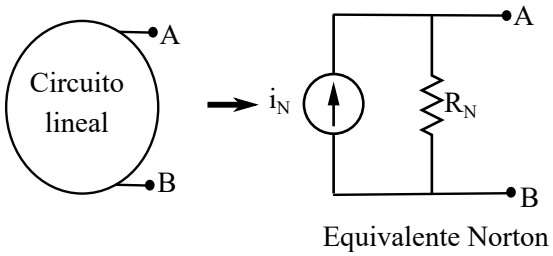


$$i_R = \frac{u_{th}}{R_{th} + 2} = \frac{2}{2+2} = 0{,}5A$$

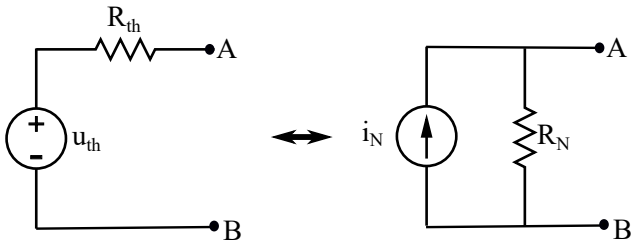
Se puede notar que el valor obtenido de i_R concuerda con el cálculo realizado en un ejemplo anterior usando análisis de mallas (sección 2.3).

5.5. Teorema de Norton

El teorema de Norton establece que *cualquier circuito lineal puede ser reemplazado por una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia.*



Para el cálculo del equivalente de Norton de un circuito se pueden aplicar las reglas de transformación de fuentes que se estudiaron en el Tema 1 de este curso.



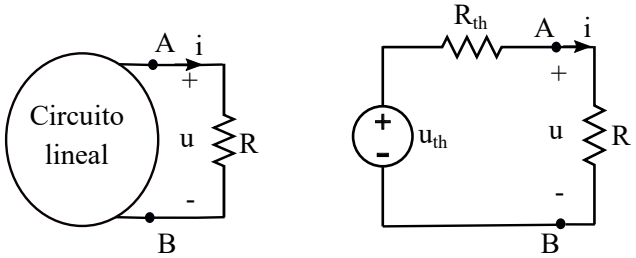
$$R_N = R_{th} \qquad i_N = \frac{u_{th}}{R_{th}}$$

Nótese que i_N coincide con la corriente de cortocircuito del circuito que se definió en el apartado 5.2.2

5.6. Teorema de transferencia de máxima potencia

Para algunas aplicaciones es útil determinar el valor de la resistencia que extrae la máxima cantidad de energía de un circuito. Este es el caso del diseño de antenas o sistemas de audio.

Para encontrar el valor de esa resistencia, podríamos representar el circuito mediante su equivalente Thevenin y calcular la R que absorbe la potencia máxima del circuito equivalente.



La potencia suministrada a la resistencia R es:

$$p = R \cdot i^2 = R \cdot \frac{u_{th}^2}{(R_{th} + R)^2}$$

Maximizando la potencia obtenemos que la resistencia que absorbe la máxima cantidad de potencia del circuito coincide con la resistencia Thevenin del circuito.

$$\frac{dp}{dR} = 0 \qquad R = R_{th}$$