Fundamentos de Ingeniería Eléctrica
Tema 3: Análisis de circuitos de corriente alterna

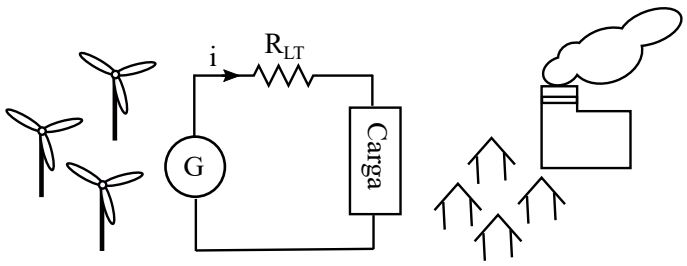
Belén García
Departamento de Ingeniería Eléctrica

En este tema se introducirán algunos conceptos relacionados con los circuitos de corriente alterna (CA). Se presentará el análisis de circuitos en el dominio de la frecuencia y se aplicarán distintos métodos a la resolución de circuitos de CA. La última parte del tema introduce algunos conceptos relacionados con el intercambio de energía en alterna.

1. Introducción a los sistemas de corriente alterna

La mayoría de los sistemas de energía que se emplean hoy en día se basan en circuitos de CA. En estos circuitos los generadores suministran tensiones y corrientes que varían en el tiempo como funciones sinusoidales.

El uso de los sistemas de CA está relacionado con el hecho de que el transporte de energía es más eficiente si se realiza a un nivel de tensión elevado. Para comprender este argumento vamos a analizar un caso en el que se desea transferir una cierta cantidad de potencia p desde un generador hacia una carga. La energía se transporta mediante una línea de transporte de resistencia R_{LT}:



Las pérdidas en la línea dependen de la corriente que fluye por ella. De este modo, si la potencia requerida por la carga es:

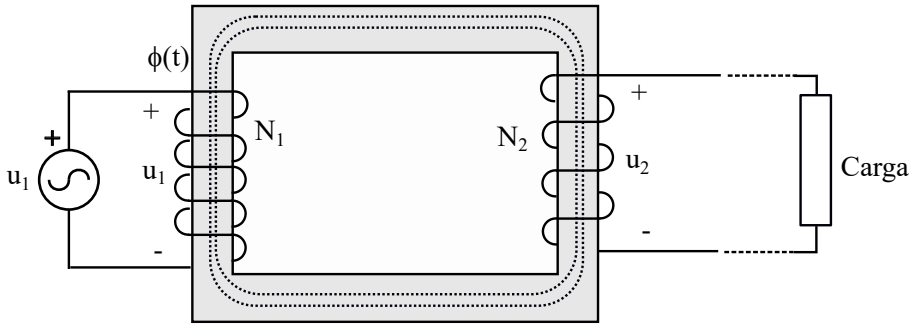
$$p_{acrga} = u \cdot i \tag{1}$$

las pérdidas en la línea serán:

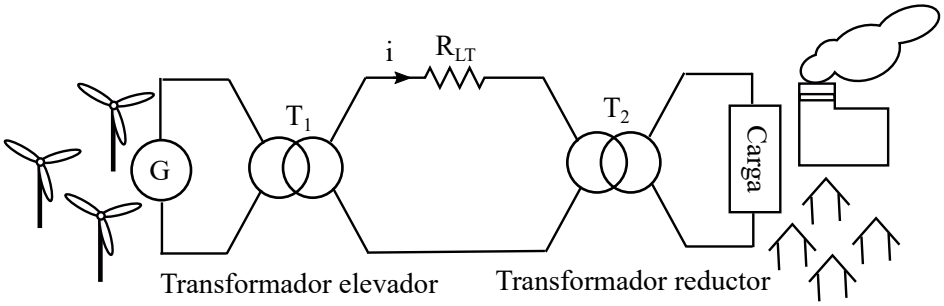
$$p_{perdidas} = R_{LT} \cdot i^2 \tag{2}$$

Si la tensión del sistema aumenta y la energía se transporta a un nivel de tensión más elevado, la corriente requerida para transportar la misma cantidad de potencia ($u \cdot i$) se reduce en la misma proporción, y las pérdidas de la línea se reducen en el cuadrado de la disminución del nivel de tensión (es decir: si la tensión se multiplica por 10, el flujo de corriente para transferir la potencia p se divide entre 10 y las pérdidas de potencia en la línea se dividen entre 100).

Para modificar el nivel de tensión de la energía transferida desde los generadores hasta los consumidores, se utilizan los **transformadores de distribución y los transformadores de potencia**. Estas máquinas están constituidas por dos bobinas acopladas (los devanados primario y secundario) con diferente número de vueltas. Como se estudió en el Tema 1, los efectos de la inductancia propia y la inductancia mutua se manifiestan cuando la corriente que fluye a través de las bobinas varía con el tiempo, por eso los transformadores solo pueden emplearse en sistemas de CA.



El siguiente esquema muestra la configuración típica de un sistema eléctrico. El nivel de tensión de la energía generada se eleva mediante un **transformador elevador** (T_1 en el diagrama). El transporte de la energía se realiza en alta tensión, por lo que la corriente requerida para transportar la potencia demandada por las cargas se reduce ($p = u \cdot i$) y las pérdidas y la caída de tensión en las líneas de transporte se limitan también. Posteriormente se reduce el nivel de tensión de la energía en los puntos de consumo por medio de un **transformador reductor** (T_2 en el diagrama). Finalmente, la energía se suministra a las cargas al nivel de tensión requerido.



2. Características de una función sinusoidal

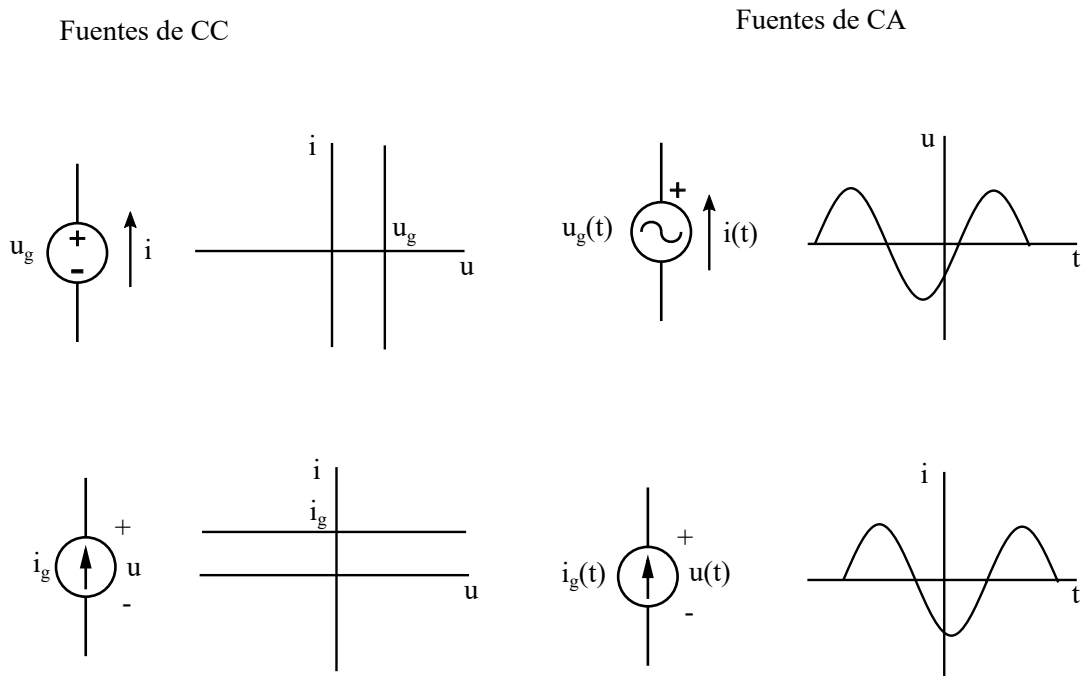
2.1. Fuentes en circuitos de CA

En los circuitos de CC, las tensiones y las corrientes que aparecen en los distintos elementos no cambian con el tiempo, es decir sus valores instantáneos son constantes:

$$u(t) = u_g \qquad i(t) = i_g \tag{3}$$

Por el contrario, en los circuitos de alterna, las tensiones y las corrientes suministradas por las fuentes de tensión y corriente cambian en el tiempo siguiendo una función sinusoidal.

El siguiente diagrama muestra la variación típica de las tensiones y corrientes en las fuentes de tensión y corriente de continua y alterna, así como los símbolos que se emplean para representar estos elementos :



En los circuitos de CA, las tensiones y las corrientes se pueden definir matemáticamente mediante funciones seno y coseno:

$$u(t) = U_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = I_{max} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i) \tag{4}$$

Aunque ambas representaciones son válidas, cuando analizamos un circuito de CA, es conveniente que todas las corrientes y tensiones se representen como funciones seno o como funciones coseno. Esto es especialmente importante cuando se queremos realizar operaciones con dos o más señales (por ejemplo sumar dos corrientes o determinar el desfase entre ellas). **En estas notas siempre usaremos la función coseno para definir las señales eléctricas**. Es interesante recordar que siempre es posible transformar una función seno en una función coseno (o viceversa) mediante la siguiente relación:

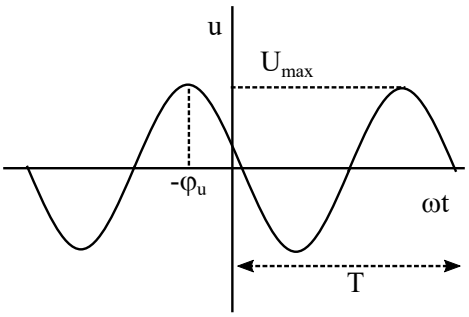
$$sen\alpha = \cos(\alpha - \pi/2) \tag{5}$$

2.2. Parámetros principales de las funciones sinusoidales

Para definir los parámetros principales de una función sinusoidal tomaremos como ejemplo la siguiente tensión instantánea en alterna:

$$u(t) = U_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{6}$$

Es interesante representar gráficamente la función sinusoidal y definir sus parámetros principales:



- **Amplitud** (Umax), también denominada "tensión pico.º "tensión máxima". Es el valor máximo que alcanza la tensión en todo instante de tiempo.
- **Período** (T): Tiempo que la función tarda en completar un ciclo completo. Se mide en segundos.
- **Frecuencia** (f): Número de ciclos descritos en un segundo. Se mide en Hercios, o ciclos por segundo.

$$f = \frac{1}{T} \quad [Hz] \tag{7}$$

- **Frecuencia angular** (ω): Frecuencia de la función en radianes por segundo.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad [rad] \cdot [s]^{-1} \tag{8}$$

- **Ángulo de fase** (φ): es la diferencia de fase entre el máximo de la función y el origen.

  Si tenemos en cuenta las unidades de ω (rad) y de t (s) se puede ver que el ángulo de fase se debe expresar en radianes. Sin embargo, por razones prácticas, es habitual expresar este ángulo en grados. Esto no sería del todo correcto pero simplifica el análisis en muchos casos. **En estas notas se expresará en ángulo de fase en grados en muchos casos**.

- **Valor medio**: El valor medio de una función sinusoidal es igual a cero:

$$U_{media} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} U_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)dt = 0 \tag{9}$$

- **Valor cuadrático medio** (rms) o valor eficaz. El valor cuadrático medio se define como:

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)dt} \tag{10}$$

Considerando que la tensión u(t) varía como una función coseno, podemos encontrar una relación entre la amplitud y el valor eficaz de la función:

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} U_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_u)dt} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

El valor eficaz de las señales sinusoidales es un parámetro importante. Para simplificar la notación , denotaremos el valor eficaz de las tensiones y corrientes con las letras u o i en mayúsculas y sin ningún subíndice:

$$U = U_{rms} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \qquad I = I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

En muchos casos expresaremos las corrientes y tensiones instantáneas en alterna en función de sus valores eficaces:

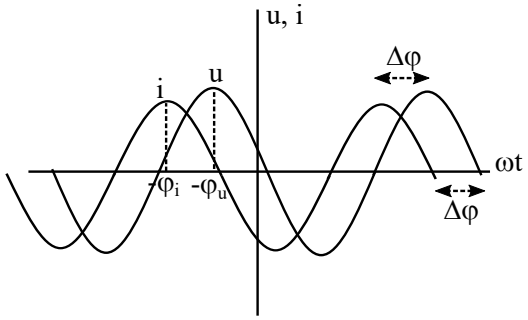
$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{13}$$

2.3. Desfase relativo entre señales eléctricas.

Otro parámetro importante para el análisis de circuitos de CA es el **desfase relativo entre funciones sinusoidales**. El desfase relativo entre dos funciones es la distancia entre sus cruces por cero o sus picos.

Si se representan gráficamente la tensión y la corriente definidas por la ecuación (14), el desfase relativo será la distancia que aparece entre los máximos y los cruces por cero de ambas variables:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \qquad \varphi_u < \varphi_i \tag{14}$$



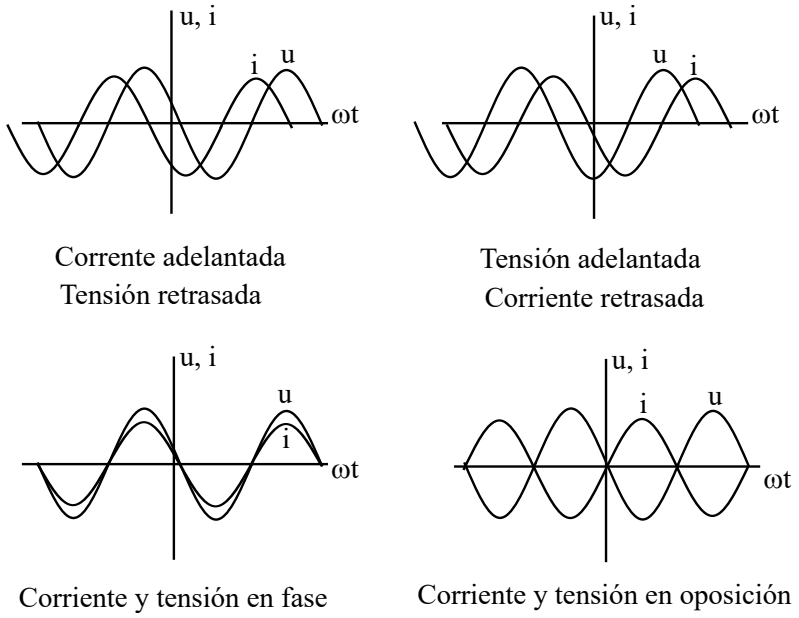
El desfase relativo entre dos variables se puede calcular como la diferencia entre sus ángulos de fase:

$$\Delta\varphi_{u,i} = \varphi_u - \varphi_i \tag{15}$$

En el ejemplo anterior $\varphi_u < \varphi_i$, por lo que el desfase relativo entre la tensión y la corriente es negativo $\Delta\varphi_{u,i} < 0$. En este caso decimos que **que la corriente está adelantada respecto a la tensión** y que **la tensión está retrasada respecto a la corriente**.

Si, por el contrario, $\Delta\varphi_{u,i}$ fuera positivo, la tensión estaría adelantada respecto a la corriente.

La siguiente figura resume las situaciones que encontraremos en relación al desfase relativo entre dos señales:

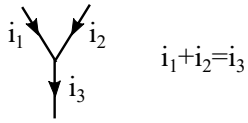


3. Análisis de circuitos en corriente alterna en el dominio del tiempo

En las siguientes secciones se explicarán distintos métodos que se pueden aplicar al análisis de los circuitos de alterna. Una primera idea podría ser aplicar los métodos estudiados para el análisis de circuitos de CC a los circuitos de CA. En este caso nos enfrentaríamos a dos dificultades:

1. Operar con funciones sinusoidales no es sencillo.

   Imaginemos que queremos sumar las corrientes i_1 y i_2 para encontrar la corriente i_3 aplicando la primera ley Kirchhoff (1LK):



$$i_1 + i_2 = i_3$$

$$i_1 = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i_1}) \qquad i_2 = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i_2}) \tag{16}$$

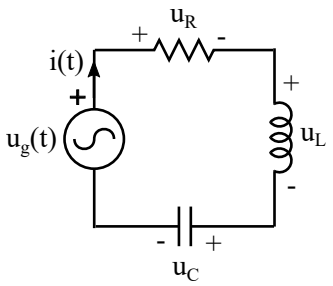
$$i_3 = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i_1}) + \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i_2}) = \sqrt{2} \cdot I_3 \cdot cos(\omega t + \varphi_{i_3}) \tag{17}$$

Encontrar los valores I_3 y φ_{i_3} a partir de los parámetros de i_1 y i_2 no es inmediato y requiere de un análisis matemático complicado.

2. Además el análisis de circuitos en CA involucra la resolución de ecuaciones,o sistemas de ecuaciones, diferenciales, lo que complica los cálculos.

   Imaginemos que queremos analizar el siguiente circuito para encontrar la corriente i(t) que fluye a través de tres elementos conectados en serie, siendo la tensión de la fuente:

$$u_g(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{18}$$



   Aplicando la segunda ley de Kirchhoff (2LK):

$$u_g(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \tag{19}$$

   Las relaciones entre tensión y corriente en resistencias, bobinas y condensadores se estudiaron en el Tema 1 y son las siguientes:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \qquad u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt \tag{20}$$

   Sustituyendo (20) en (19):

$$u_g(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt \tag{21}$$

   Aplicando derivadas a (21) obtenemos una ecuación diferencial que relaciona $i(t)$ con $u_g(t)$, R, L y C:

$$\frac{du_g(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t) \tag{22}$$

Para encontrar $i(t)$ habría que resolver la ecuación diferencial de una segundo orden. La solución de la ecuación diferencial (22) es la suma de la corriente transitoria (i_t), que representa el comportamiento del sistema después de un cambio (una conexión o desconexión de una fuente, un cambio en el nivel de tensión..), y la corriente en régimen permanente (i_{rp}) que representa el comportamiento del sistema en régimen permanente:

$$i(t) = i_t + i_{rp} \tag{23}$$

Recordado conceptos de análisis de ecuaciones diferenciales, podemos afirmar que **si la excitación al sistema es una función sinusoidal de frecuencia ω, la corriente de régimen permanente (i_{rp}) será una función sinusoidal de la misma frecuencia**:

$$u_g(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad => \quad i_{rp}(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{24}$$

Dado que este curso está enfocado al análisis del comportamiento de los circuitos eléctricos en régimen permanente, despreciaremos la corriente transitoria y consideraremos que la solución al problema es la corriente en régimen permanente:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{25}$$

Del análisis anterior se pueden extraer algunas conclusiones importantes:

- El análisis de circuitos de CA involucra la resolución de ecuaciones, o sistemas de ecuaciones, diferenciales. Para circuitos simples, las ecuaciones resultantes no son complejas, pero en circuitos con más elementos encontrar una solución puede ser bastante complicado.
- Si la excitación de un circuito es una tensión o una corriente sinusoidal de frecuencia ω, las respuestas del sistema (es decir, todas las corrientes y tensiones resultantes) serán funciones sinusoidales de la misma frecuencia ω.
- Nuestro objetivo es encontrar las amplitudes y los ángulos de fase de las corrientes y las tensiones del sistema. En cuanto a la frecuencia de las señales, sabemos que coincide con la de las fuentes, por lo que es una variable conocida.

En las siguientes secciones introduciremos el **análisis de circuitos de CA en el dominio de la frecuencia**. Esta herramienta se basa en la representación de las funciones sinusoidales mediante números complejos y simplificará enormemente el análisis de los circuitos en alterna. Antes de introducir esta metodología se revisarán algunos conceptos básicos del análisis complejo.

4. Operaciones básicas con números complejos

El número irracional "i"se define como la raíz cuadrada de -1. En el análisis de circuitos es común usar la letra "j"para referirse a la raíz cuadrada de -1 para evitar confusiones con la variable "corriente", que se suele representar con la letra i:

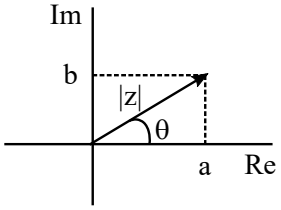
$$j = \sqrt{-1} \tag{26}$$

Un número complejo se puede expresar como la suma de una parte real, a, y una parte imaginaria, b:

$$z = a + bj \tag{27}$$

Esta representación de los números complejos es la llamada **forma binómica**.

A veces es útil representar los números complejos como **vectores en el plano complejo**, en el que el eje x corresponde a las partes reales y el eje y a las partes imaginarias:



Como se puede ver en el diagrama anterior, el número complejo z también se puede expresar en **forma polar**:

$$z = |z|\angle\theta \tag{28}$$

siendo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \arctan\frac{b}{a} \tag{29}$$

Un número complejo expresado en forma polar se puede pasar a forma binómica usando relaciones trigonométricas sencillas:

$$a = |z| \cdot \cos\theta \qquad b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta \tag{30}$$

Los números complejos también pueden expresarse en **forma exponencial**:

$$z = |z| \cdot e^{j\theta} \tag{31}$$

La **ecuación de Euler** establece una relación entre las funciones trigonométricas y la función exponencial compleja:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \operatorname{sen}\theta \tag{32}$$

5. Representación fasorial de una función sinusoidal

5.1. Definición de fasor

Anteriormente estudiamos que los valores instantáneos de las tensiones y las corrientes en CA se expresan mediante funciones sinusoidales (en estas notas mediante funciones coseno). La ecuación de Euler (32) nos permite expresar los valores instantáneos de las tensiones y corrientes en CA como la parte real de una función exponencial. De este modo una tensión de CA de frecuencia ω, valor rms U y ángulo de fase φ_u podría expresarse como:

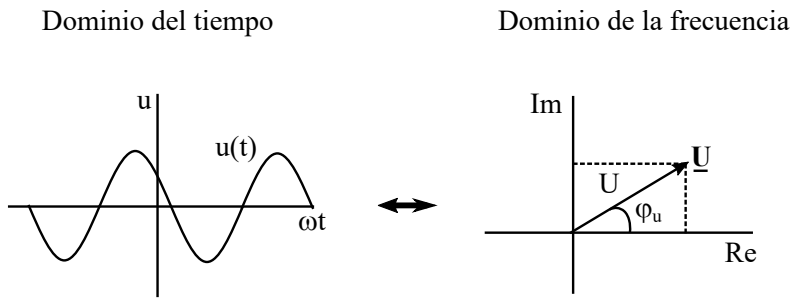
$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Re(e^{j(\omega t + \varphi_u)}) \tag{33}$$

Teniendo en cuenta que el valor rms siempre es un número real, la ecuación (33) se podría reorganizar como:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot Re(U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}) \tag{34}$$

En la sección 3 demostramos que todas las tensiones y corrientes de un circuito que se alimenta con fuentes de CA de frecuencia ω, son funciones sinusoidales de la misma frecuencia. Esto quiere decir, que para resolver un circuito en CA únicamente tendremos que encontrar los valores eficaces y los ángulos de fase de las señales [1]. A lo largo de esta sección estudiaremos que si representamos las corrientes y las tensiones de un circuito de CA mediante números complejos que contengan la información de su valor eficaz y su ángulo de fase, el análisis de circuito se podrá simplificar considerablemente.

Un **fasor** es un número complejo que contiene la información sobre el valor eficaz y el ángulo de fase de una función sinusoidal. Las funciones sinusoidales en el **dominio de frecuencia** se representarán mediante fasores:



Tensión instantánea:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot Re(U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t})$$

Fasor tensión:

$$\underline{\mathbf{U}} = U \cdot e^{j\varphi_u} = U\angle\varphi_u$$

En estas notas denotaremos los fasores con letras mayúsculas, subrayadas y en negrita ($\underline{\mathbf{U}}$ $\underline{\mathbf{I}}$). En otros textos se pueden encontrar otras notaciones como el uso de letras cursivas, la colocación de una línea u otras marcas sobre la letra de la variable o el texto en negrita ($\mathcal{U}$ $\mathcal{I}$, $\overline{U}$ $\overline{I}$, $\hat{U}$ $\hat{I}$, **U** **I**...).

[1] Hay una excepción a esta afirmación que es la respuesta de un circuito a varias fuentes de diferente frecuencia actuando simultáneamente. Estudiaremos ese caso más adelante

La relación matemática entre la función sinusoidal u(t) y su fasor asociado $\underline{\mathbf{U}}$ es:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{U}} \cdot e^{j\omega t}) \tag{35}$$

5.2. Leyes de Kirchhoff en forma fasorial

Una de las ventajas de la representación fasorial es que las leyes de Kirchoff, que son la base para el análisis de circuitos, siguen siendo válidas cuando se expresan en términos de los fasores asociados a las tensiones o corrientes sinusoidales.

5.2.1. Primera ley Kirchhoff

La primera ley de Kirchhoff (1LK) establece que la suma algebraica de las corrientes en cualquier nudo de un circuito es cero:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 \quad => \quad i_1(t) + i_2(t) + ... + i_n(t) = 0 \tag{36}$$

Si se aplica la 1LK a un circuito de CA, las corrientes de la ecuación (36) serán funciones sinusoidales que se podría expresar por medio de fasores:

$$i_k(t) = \sqrt{2} \cdot I_k \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i,k}) = \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{I}_k} \cdot e^{j\omega t}) \tag{37}$$

donde el fasor $\underline{\mathbf{I}_k}$ es:

$$\underline{\mathbf{I}_k} = I_k \angle \varphi_{i,k} \tag{38}$$

Sustituyendo (37) en (36):

$$\sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{I}_1} \cdot e^{j\omega t}) + \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{I}_2} \cdot e^{j\omega t}) + ... + \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{I}_n} \cdot e^{j\omega t}) = 0 \tag{39}$$

simplificando y reordenando:

$$Re(\underline{\mathbf{I}_1} \cdot e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{I}_2} \cdot e^{j\omega t} + ... + \underline{\mathbf{I}_n} \cdot e^{j\omega t}) = 0 \tag{40}$$

sacando factor común:

$$Re((\underline{\mathbf{I}_1} \cdot + \underline{\mathbf{I}_2} \cdot + ... + \underline{\mathbf{I}_n}) \cdot e^{j\omega t}) = 0 \tag{41}$$

Como sabemos que $e^{j\omega t} \neq 0$, podemos afirmar que **la suma algebraica de los fasores corriente en cualquier nudo de un circuito es igual a cero**. Esto implica que la 1LK también se cumple para los fasores corriente.

$$\underline{\mathbf{I}_1} + \underline{\mathbf{I}_2} + ... + \underline{\mathbf{I}_n} = 0 \quad => \quad \sum_k \underline{\mathbf{I}_k} = 0 \tag{42}$$

5.2.2. Segunda ley de Kirchhoff

La segunda ley Kirchhoff (2LK) establece que la suma algebraica de los tensiones a través de un camino cerrado de un circuito es igual a cero:

$$\sum_k u_k = 0 \tag{43}$$

Para los circuitos de CA, las tensiones están definidas por funciones sinusoidales que se pueden expresar mediante fasores:

$$u_k(t) = \sqrt{2} \cdot U_k \cdot \cos(\omega t + \varphi_{u,k}) = \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{U}_k} \cdot e^{j\omega t}) \tag{44}$$

donde:

$$\underline{\mathbf{U}_k} = U_k \angle \varphi_{u,k} \tag{45}$$

Si aplicamos la 2LK a un camino cerrado de un circuito que contiene n elementos con caídas de tensión sinusoidales, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0 \quad => \quad u_1(t) + u_2(t) + ... + u_n(t) = 0 \tag{46}$$

Reemplazando (44) en (46):

$$\sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{U}_1} \cdot e^{j\omega t}) + \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{U}_2} \cdot e^{j\omega t}) + ... + \sqrt{2} \cdot Re(\underline{\mathbf{U}_n} \cdot e^{j\omega t}) = 0 \tag{47}$$

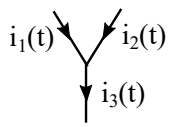
Siguiendo el mismo razonamiento que se usó para obtener la 1LK en forma fasorial, encontramos que **la suma algebraica de los fasores tensión a lo largo de un camino cerrado de un circuito es igual a cero**. Esto implica que la 2LK también puede expresarse en términos de los fasores tensión:

$$\underline{\mathbf{U}_1} + \underline{\mathbf{U}_2} + ... + \underline{\mathbf{U}_n} = 0 \qquad => \qquad \sum_k \underline{\mathbf{U}_k} = 0 \tag{48}$$

5.3. Ejemplo

Calcular $i_3(t)$ sabiendo que:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos(25t + 45^o)A \qquad i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \cos(25t + 90^o)A$$



Solución

Sería posible aplicar la 1LK al cálculo del cálculo de la corriente $i_3(t)$ en el dominio del tiempo, pero necesitaríamos calcular la suma de dos funciones sinusoidales para obtener la amplitud y el ángulo de fase de $i_3(t)$:

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos(25t + 45^o) + \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \cos(25t + 90^o)$$

Como alternativa, el cálculo podría hacerse en el dominio de la frecuencia:

1. Obtenemos los fasoresque representan a las corrientes $i_1(t)$ y $i_2(t)$:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = 10\angle 45^o A = 7{,}07 + 7{,}07jA$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = 20\angle 90^o A = 20jA$$

2. Aplicamos la 1LK en forma fasorial para encontrar el fasor $\underline{\mathbf{I}}_3$:

$$\underline{\mathbf{I}}_3 = \underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2$$

$$\underline{\mathbf{I}}_3 = 10\angle 45^o + 20\angle 90^o = 7{,}07 + 27{,}07j = 28\angle 75{,}36^o A$$

3. Finalmente, volvemos al dominio del tiempo y calculamos $i_3(t)$

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 28 \cdot \cos(25t + 75{,}36^o)A$$

6. Impedancia compleja

6.1. Definición

En el ejemplo anterior hemos podido comprobar que el uso de fasores permite realizar operaciones con funciones sinusoidales de manera sencilla.

Sin embargo, tal como se explicó en la sección 3, existe otra dificultad para el análisis de circuitos de CA que está relacionada con el hecho de que las relaciones entre las tensiones y las corrientes en las bobinas y en los condensadores son ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones son más difíciles de manejar que las ecuaciones lineales que relacionan las tensiones y las corrientes en las resistencias.

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \qquad u_R(t) = R \cdot i_R(t) \tag{49}$$

Para evitar las resolución de ecuaciones diferenciales en el análisis de circuitos de CA, se introduce una nueva variable que permitirá establecer relaciones lineales entre los fasores tensión y corriente de los elementos pasivos: la impedancia.

La **impedancia** (Z) de un elemento pasivo se define como la relación entre el fasor tensión y el fasor corriente en este elemento.

$$Z = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{I}}} \tag{50}$$

La unidad de medida de la impedancia en el SI es el Ohmio ($[V] \cdot [A]^{-1} = [\Omega]$). Es importante recalcar que las impedancias asociadas bobinas y condensadores también se expresan en Ohmios, a pesar de que L y C se miden en Henrios y Faradios respectivamente.

Adicionalmente definimos la **admitancia** (Y) como la inversa de la impedancia. La admitancia de un elemento pasivo de impedancia Z sería:

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{51}$$

La admitancia en el SI se mide en Siemens ($[S] = [\Omega]^{-1}$).

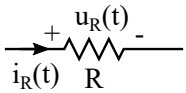
Al representar los tres tipos de elementos pasivos por medio de impedancias podremos establecer una relación lineal entre los fasores corriente y tensión en las resistencias, las bobinas y los condensadores. Esta relación es la llamada **ley de Ohm en el dominio de la frecuencia**:

$$\underline{\mathbf{U}} = Z \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{52}$$

En los próximos apartados obtendremos expresiones para calcular la impedancia en las resistencias, bobinas y condensadores.

6.2. Impedancia de una resistencia

Queremos encontrar una expresión general para calcular la impedancia de una resistencia. Para ello consideraremos una resistencia R por la que circula una corriente sinusoidal $i_R(t)$ que provoca una caída de tensión sinusoidal $u_R(t)$.



Si la corriente es:

$$i_R(t) = \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{53}$$

la caída de tensión en la resistencia calculada mediante la ley de Ohm sería:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \tag{54}$$

$$u_R(t) = \sqrt{2} \cdot R \cdot I_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{55}$$

Pasando al dominio de la frecuencia, encontramos que los fasores asociados a la corriente y a la tensión son:

$$\underline{\mathbf{I}}_R = I_R\angle\varphi_i \qquad \underline{\mathbf{U}}_R = R \cdot I_R\angle\varphi_i \tag{56}$$

Como la impedancia es el cociente entre el fasor tensión y el fasor corriente podríamos encontrar la impedancia de una resistencia:

$$Z_R = \frac{\underline{\mathbf{U}}_R}{\underline{\mathbf{I}}_R} = \frac{R \cdot I_R\angle\varphi_i}{I_R\angle\varphi_i} = R \tag{57}$$

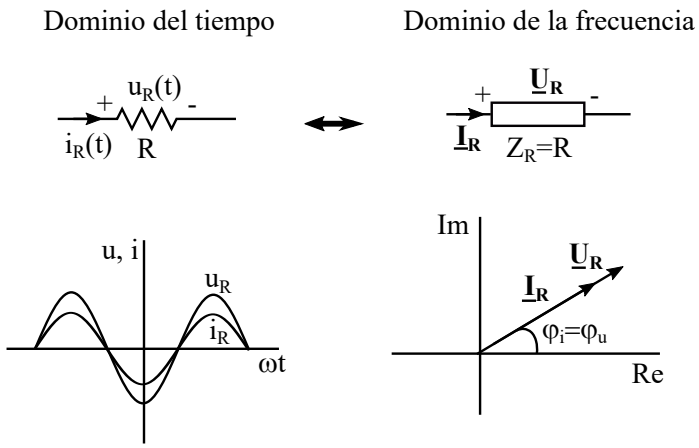
En el dominio de la frecuencia las resistencias se representan mediante una impedancia $Z_R = R$ de manera que se verifica la ley de Ohm en el dominio de la frecuencia:

$$\underline{\mathbf{U}}_R = Z_R \cdot \underline{\mathbf{I}}_R \tag{58}$$

Es interesante observar que es el desfase entre la corriente y la tensión en una resistencia es cero. Al ser Z_R un número real, ambas magnitudes están en fase.

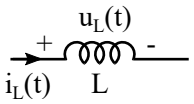
$$\varphi_i = \varphi_u \qquad \Delta\varphi_{u,i} = 0 \tag{59}$$

o



6.3. Impedancia de una bobina

Para obtener una expresión que nos permita calcular la impedancia de las bobinas, consideramos el caso de una bobina con inductancia L atravesada por una corriente sinusoidal $i_L(t)$.



Si la corriente es:

$$i_L(t) = \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{60}$$

la caída de tensión en la bobina se podrá calcular usando la relación entre la tensión y la corriente en estos elementos:

$$u(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \tag{61}$$

La tensión $u(t)$ sería:

$$u_L(t) = -\sqrt{2} \cdot \omega \cdot L \cdot I_L \cdot sen(\omega t + \varphi_i) = -\sqrt{2} \cdot \omega \cdot L \cdot I_L \cdot \cos(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \tag{62}$$

Pasando al dominio de la frecuencia, encontramos que los fasores corriente y la tensión son:

$$\underline{\mathbf{I}}_L = I_L \angle \varphi_i \tag{63}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_L = -\omega \cdot L \cdot I_L \angle \varphi_i - \frac{\pi}{2} \tag{64}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de un número complejo en forma polar siempre debe ser positivo, escribimos el factor -1 como $1\angle\pi$, y operamos en la expresión del fasor tensión:

$$\underline{\mathbf{U}}_L = (1\angle\pi) \cdot (\omega \cdot L \cdot I_L \angle \varphi_i - \frac{\pi}{2}) = \omega \cdot L \cdot I_L \angle \varphi_i + \frac{\pi}{2} \tag{65}$$

La impedancia de la bobina se puede calcular como el cociente entre los fasores tensión y corriente anteriores:

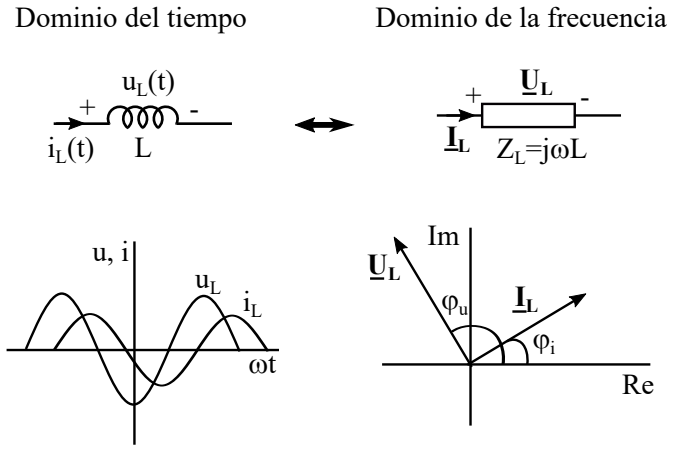
$$Z_L = \frac{\underline{\mathbf{U}}_L}{\underline{\mathbf{I}}_L} = \frac{\omega \cdot L \cdot I_L \angle \varphi_i + \frac{\pi}{2}}{I_L \angle \varphi_i} = \omega \cdot L \angle \frac{\pi}{2} = j\omega L \tag{66}$$

En el dominio de la frecuencia las bobinas se representan mediante una impedancia $Z_L = j\omega L$ y se verifica la ley de Ohm en el dominio de la frecuencia:

$$\underline{\mathbf{U}}_L = Z_L \cdot \underline{\mathbf{I}}_L \tag{67}$$

Si calculamos el desfase entre la corriente y la tensión en una bobina podemos ver que la tensión está adelantada 90° respecto a la corriente.

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \qquad \Delta\varphi_{u,i} = \frac{\pi}{2} = 90^o \tag{68}$$



6.4. Impedancia de una inductancia mutua

Si queremos analizar las tensiones y las corrientes en bobinas acopladas, también podemos representar la inductancia mutua como una impedancia. La expresión para la impedancia de una inductancia mutua M se puede obtener siguiendo un razonamiento análogo al empleado para obtener la impedancia de una bobina:

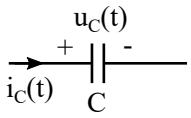
$$Z_M = j\omega M \tag{69}$$

6.5. Impedancia de un condensador

La relación entre tensión y corriente en un condensador es:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \tag{70}$$

Para obtener una expresión que permita calcular la impedancia de los condensadores, calcularemos la corriente que circularía por un condensador de capacidad C al aplicar una tensión $u_C(t)$ entre sus terminales:



Si la tensión es:

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{71}$$

La corriente sería:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = -\sqrt{2} \cdot \omega \cdot C \cdot U_C \cdot sen(\omega t + \varphi_u) \tag{72}$$

Expresando el signo negativo como un factor $1\angle\pi$ y transformando la función seno en una función coseno:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot C \cdot U_C \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2} + \pi) \tag{73}$$

Pasando al dominio de la frecuencia, encontramos que los fasores tensión y corriente son:

$$\underline{\mathbf{U}}_C = U_C \angle \varphi_u \tag{74}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_C = j\omega \cdot C \cdot U_C \angle \varphi_u \tag{75}$$

y por tanto la impedancia del condensador es:

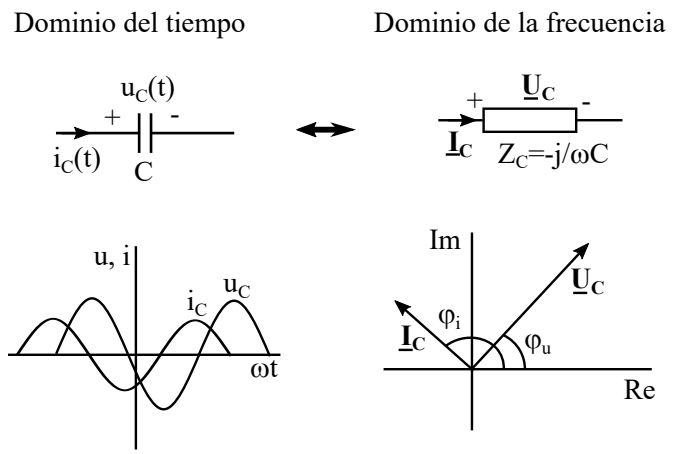
$$Z_C = \frac{\underline{\mathbf{U}}_C}{\underline{\mathbf{I}}_C} = \frac{U_C \angle \varphi_u}{j\omega \cdot C \cdot U_C \angle \varphi_u} = \frac{1}{j\omega \cdot C} = \frac{-j}{\omega \cdot C} \tag{76}$$

En el dominio de la frecuencia los condensadores se representan mediante una impedancia $Z_C = -j/\omega C$, y se verifica la ley de Ohm en el dominio de la frecuencia:

$$\underline{\mathbf{U}}_C = Z_C \cdot \underline{\mathbf{I}}_C \tag{77}$$

En este caso, el desfase entre la corriente y la tensión en el condensador también es de 90°, pero ahora es la corriente la que está adelantada 90° respecto a la tensión.

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2} \qquad \Delta\varphi_{u,i} = -\frac{\pi}{2} = -90^o \tag{78}$$



6.6. Asociación de impedancias

La representación de resistencias, bobinas y condensadores mediante impedancias permitirá asociar elementos pasivos de diferente naturaleza. La asociación es posible porque en el dominio de la frecuencia la relación entre $\underline{\mathbf{U}}$ y $\underline{\mathbf{I}}$ para los tres tipos de elementos pasivos es la misma:

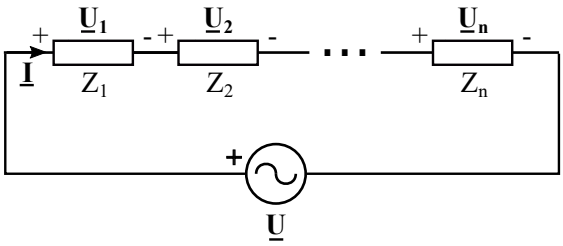
$$\underline{\mathbf{U}} = Z \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{79}$$

En el dominio del tiempo cada tipo de elemento verifica una relación diferente entre u(t) e i(t) por lo que será imposible asociar elementos de distinta naturaleza:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \tag{80}$$

6.6.1. Impedancia equivalente en serie

Dos o más impedancias están conectadas en serie si por ellas fluye la misma corriente. Las n impedancias de la figura están conectadas en serie, ya que la corriente $\underline{\mathbf{I}}$ a través de todas ellas es la misma.



cada impedancia tiene una fasor caída de tensión que se podría calcular mediante la ley de Ohm en forma fasorial:

$$\begin{gathered} \underline{\mathbf{U}}_1 = Z_1 \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 \\ \underline{\mathbf{U}}_2 = Z_2 \cdot \underline{\mathbf{I}}_2 \\ ... \\ \underline{\mathbf{U}}_n = Z_n \cdot \underline{\mathbf{I}}_n \end{gathered}$$

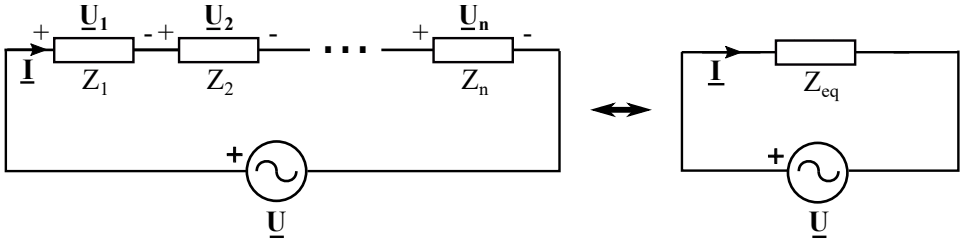
el fasor tensión total $\underline{\mathbf{U}}$ se puede calcular usando la 2LK en forma fasorial:

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_1 + \underline{\mathbf{U}}_2 + ... + \underline{\mathbf{U}}_n = Z_1 \cdot \underline{\mathbf{I}} + Z_2 \cdot \underline{\mathbf{I}} + ... + Z_n \cdot \underline{\mathbf{I}} = (Z_1 + Z_2 + ... + Z_n) \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{81}$$

El conjunto de las n impedancias se puede sustituir por una impedancia equivalente Z_{eq}:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \tag{82}$$

$$\underline{\mathbf{U}} = Z_{eq} \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{83}$$



Visto desde la fuente de tensión el efecto de las n impedancias conectadas en serie es idéntico al efecto de la impedancia equivalente. Decimos que ambas configuraciones son **equivalentes**.

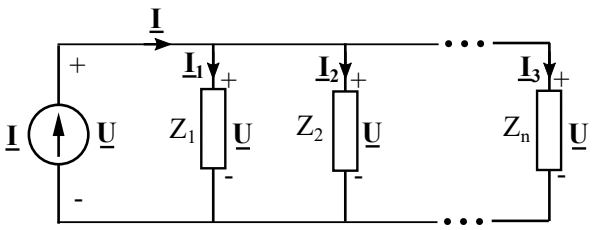
Ecuación del divisor de tensión en el dominio de la frecuencia.

La ecuación del divisor de tensión también es válida en el dominio de la frecuencia. Si tenemos n impedancias conectadas en serie, y el fasor tensión de todo el conjunto es $\underline{\mathbf{U}}$, el fasor tensión en la impedancia k se podría calcular mediante la siguiente ecuación:

$$\underline{\mathbf{U}}_k = \frac{Z_k}{Z_{eq}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \tag{84}$$

6.6.2. Impedancia equivalente en paralelo

Dos o más impedancias están conectadas en paralelo si tienen la misma caída de tensión entre sus terminales. Las n impedancias en la figura están en paralelo ya que el fasor tensión $\underline{\mathbf{U}}$ es igual en todas ellas:



La corriente en cada impedancia sería:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{Z_1} = \underline{\mathbf{U}} \cdot Y_1$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{Z_2} = \underline{\mathbf{U}} \cdot Y_2$$

$$\underline{\mathbf{I}}_n = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{Z_n} = \underline{\mathbf{U}} \cdot Y_n$$

El fasor corriente total $\underline{\mathbf{I}}$ se puede calcular mediante la 1LK en forma fasorial:

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 + ... + \underline{\mathbf{I}}_n = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{Z_1} + \frac{\underline{\mathbf{U}}}{Z_2} + ... + \frac{\underline{\mathbf{U}}}{Z_n} = \underline{\mathbf{U}} \cdot (\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_n}) \tag{85}$$

El conjunto de n impedancias se puede sustituir por una impedancia equivalente Z_{eq}

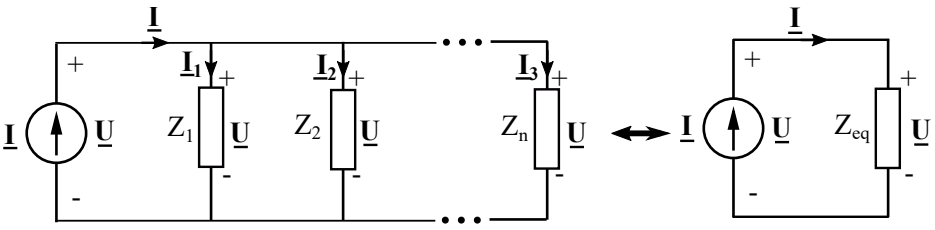
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k} \tag{86}$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{Z_{eq}} \tag{87}$$

Las ecuaciones también podrían expresarse en términos de las admitancias:

$$Y_{eq} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \tag{88}$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{U}} \cdot Y_{eq} \tag{89}$$



Visto desde la fuente de corriente, el efecto de las n impedancias en paralelo es idéntico al efecto de la impedancia equivalente. Decimos que ambas configuraciones son **equivalentes**.

Ecuación del divisor de corriente en el dominio de la frecuencia.

La ecuación del divisor de corriente también se puede emplear en el dominio de la frecuencia. En un conjunto de n impedancias conectadas en paralelo y alimentadas por una corriente total $\underline{\mathbf{I}}$ la corriente de la impedancia k sería:

$$\underline{\mathbf{I}}_k = \frac{Y_k}{Y_{eq}} \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{90}$$

En el caso particular de dos impedancias conectadas en paralelo las expresiones para las corrientes $\underline{\mathbf{I}}_1$ y $\underline{\mathbf{I}}_2$ son:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{91}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{92}$$

6.7. Componentes de una impedancia compleja

Hemos estudiado que las impedancias que representan los tres elementos pasivos son:

$$Z_R = R \ \in \mathbb{R} \qquad Z_L = j\omega \cdot L \ \in \mathbb{C} \qquad Z_C = \frac{-j}{\omega \cdot C} \ \in \mathbb{C} \tag{93}$$

Si sumamos dos o más elementos de diferente naturaleza para obtener la impedancia equivalente en serie o paralelo, en algunos casos encontraremos impedancias con parte real y parte imaginaria:

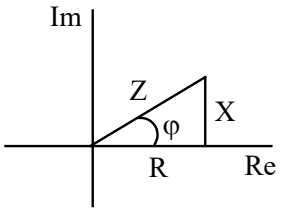
$$Z = R + jX \tag{94}$$

La parte real de la impedancia siempre proviene de elementos resistivos, y se llama **Resistencia** (R). La parte imaginaria siempre proviene de inductancias o capacidades (los llamados "elementos reactivos") y se llama **Reactancia** (X).

La siguiente tabla resume los valores de la impedancia, resistencia y reactancia para las resistencias, las bobinas y los condensadores:

	Resistencia	**Reactancia**	**Impedancia**
Resistencia	R	0	R
Bobina	0	$\omega \cdot L$	$j\omega \cdot L$
Condensador	0	$-1/\omega \cdot C$	$-j/\omega \cdot C$

A veces, la impedancia compleja se representa como un **triángulo de impedancias**, que es la representación de la impedancia en el plano complejo.



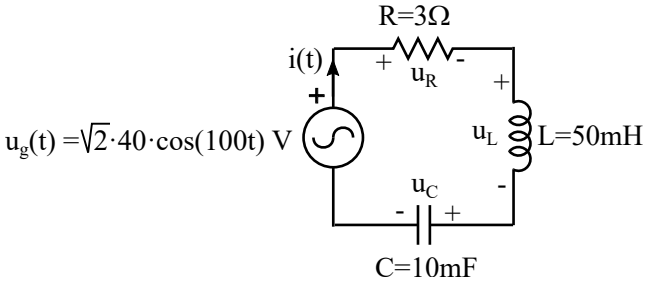
El ángulo de la impedancia compleja se puede calcular como:

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} \tag{95}$$

El coseno del ángulo φ es el llamado **factor de potencia** de la impedancia. El significado físico y la importancia práctica del factor de potencia se estudiará en profundidad más adelante.

6.8. Ejemplo

En el siguiente circuito, la resistencia, la bobina y el condensador están conectados en serie y alimentados con una fuente de tensión de CA.



Calcular la corriente i(t) que circula por el circuito y la caída de tensión en cada elemento $u_R(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$. Dibujar un diagrama fasorial con todos los tensión s y corrientes.

Solución

En primer lugar pasamos el circuito al dominio de la frecuencia, para lo que tenemos en cuenta que frecuencia de la fuente es ω=100 rad/s:

1. Cálculo de los fasores:

$$\underline{\mathbf{U}}_g = 40\angle 0^o V$$

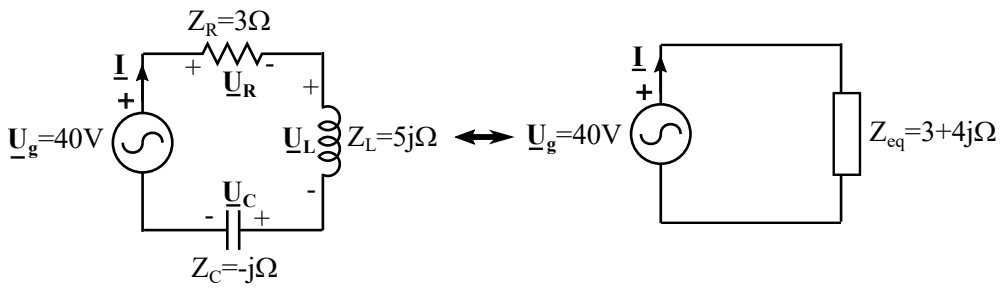
2. Cálculo de las impedancias:

$$Z_R = R = 3\Omega$$

$$Z_L = j\omega \cdot L = j0{,}05 \cdot 100 = 5j\Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega \cdot C} = \frac{-j}{100 \cdot 0{,}01} = -j\Omega$$

3. Resolvemos el circuito en el dominio de la frecuencia:



Como las tres impedancias están conectadas en serie, podemos calcular el fasor corriente como:

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_g}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{40}{3 + 5j - j} = 8\angle -53{,}13^o A$$

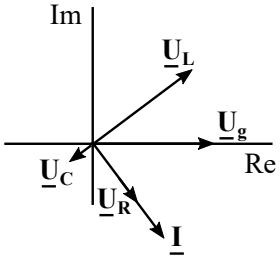
Los fasores tensión en los distintos elementos pasivos se calculan mediante la ley de Ohm en el dominio de la frecuencia:

$$\underline{\mathbf{U}}_R = \underline{\mathbf{I}} \cdot Z_R = 3 \cdot 8\angle -53{,}13^o = 24\angle -53{,}13^o V$$

$$\underline{\mathbf{U}}_L = \underline{\mathbf{I}} \cdot Z_L = 5j \cdot 8\angle -53{,}13^o = 40\angle 36{,}87^o V$$

$$\underline{\mathbf{U}}_C = \underline{\mathbf{I}} \cdot Z_C = -j \cdot 8\angle -53{,}13^o = 8\angle -143{,}13^o V$$

Diagrama fasorial:



4. Finalmente, obtenemos las variables en el dominio del tiempo usando los fasores obtenidos en el dominio de la frecuencia:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot \cos(100 \cdot t - 53{,}13^o) A$$

$$u_R(t) = \sqrt{2} \cdot 24 \cdot \cos(100 \cdot t - 53{,}13^o) V$$

$$u_L(t) = \sqrt{2} \cdot 40 \cdot \cos(100 \cdot t + 36{,}87^o) V$$

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot \cos(100 \cdot t - 143{,}13^o) V$$

7. Análisis de circuitos de corriente alterna

7.1. Observaciones generales

La representación de circuitos en el dominio de la frecuencia permite aplicar todos los métodos de resolución de circuitos que se estudiaron para el análisis de circuitos en CC al análisis de circuitos en CA. Se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Para resolver los circuitos de CA en el dominio de la frecuencia, representamos todas las corrientes y tensiones sinusoidales mediante fasores y las resistencias, bobinas y condensadores mediante impedancias:

$$\underline{\mathbf{U}} = U_{rms}\angle\varphi_u \qquad \underline{\mathbf{I}} = I_{rms}\angle\varphi_i \tag{96}$$

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega \cdot L \qquad Z_C = \frac{-j}{\omega \cdot C} \tag{97}$$

- Las leyes de Kirchhoff se aplican en forma fasorial:

$$\sum_{nudo} \underline{\mathbf{I}} = 0 \qquad \sum_{malla} \underline{\mathbf{U}} = 0 \tag{98}$$

- La ley de Ohm se verifica para todos los elementos pasivos:

$$\underline{\mathbf{U}} = Z \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{99}$$

- Los métodos de mallas y nudos se pueden aplicar al análisis de circuitos de CA en el dominio de la frecuencia. También se cumple el teorema de Thevenin.
- Después de resolver un circuito en el dominio de la frecuencia, siempre debemos retornar al dominio del tiempo y expresar los valores instantáneos de las corrientes y las tensiones calculadas mediante funciones sinusoidales.

7.2. Método de mallas

7.2.1. Aplicación del método de mallas en circuitos de CA

Para aplicar el método de mallas a un circuito de CA se deben seguir los siguientes pasos:

1. Asignar un **fasor corriente de malla** a cada malla del circuito
2. Aplicar la 2LK en forma fasorial a cada malla del circuito aplicando un criterio de signo consistente (en estas notas consideramos caídas de tensión como positivas y elevaciones de tensión como negativos). Encontrar un sistema de ecuaciones que tenga como incógnitas las corrientes de malla.
3. Resolver las ecuaciones para encontrar los fasores corriente de malla. En el caso de los circuitos de corriente alterna, es particularmente útil resolver los sistemas de ecuaciones en forma matricial.

   Las ecuaciones de malla en forma matricial son:

$$[Z] \cdot [\underline{\mathbf{I}}_{malla}] = [\underline{\mathbf{U}}_g] \tag{100}$$

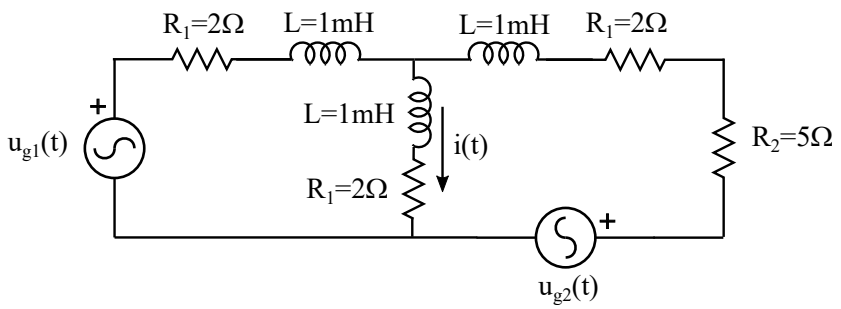
   Ahora $[Z]$ es la **matriz de impedancias** cuyos términos son:

   Zii=Suma de las impedancias en la malla i

   Zij= - Suma de las impedancias compartidas por la malla i y j

7.2.2. Ejemplo

Dado el siguiente circuito:



donde:

$$u_{g1}(t) = \sqrt{2} \cdot 50 \cdot \cos(1000 \cdot t)V$$

$$u_{g2}(t) = \sqrt{2} \cdot 30 \cdot \cos(1000 \cdot t + 90^o)V$$

Calcular i(t) utilizando el método de mallas.

Solución

Encontramos el circuito en el dominio de la frecuencia (ω=1000 rad/s)

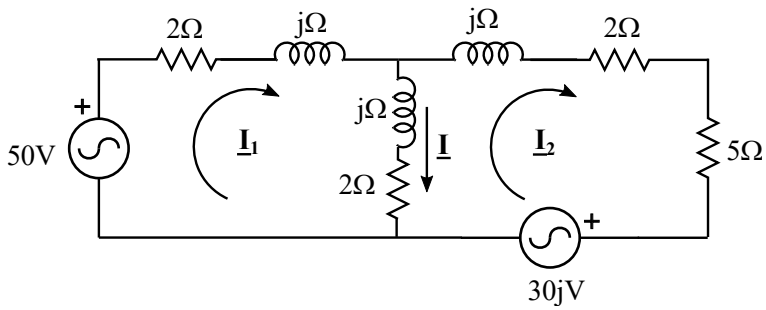
1. Impedancias:

$$Z_L = j\omega \cdot L = j \cdot 1000 \cdot 0{,}001 = j\Omega \qquad Z_{R1} = 2\Omega \qquad Z_{R2} = 5\Omega$$

2. Fasores:

$$\underline{\mathbf{U}}_{g1} = 50\angle 0^o V = 50V$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{g2} = 30\angle 90^o V = 30jV$$



Aplicamos la 2LK para encontrar las ecuaciones de malla del sistema:

Malla 1: $\quad -50 + (2+j) \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 + (2+j) \cdot (\underline{\mathbf{I}}_1 - \underline{\mathbf{I}}_2) = 0$

Malla 2: $\quad 30j + (j+2+5) \cdot \underline{\mathbf{I}}_2 + (2+j)(\underline{\mathbf{I}}_2 - \underline{\mathbf{I}}_1) = 0$

Escribimos las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2+j+j+2 & -j-2 \\ -j-2 & j+2+5+2+j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -30j \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+2j & -j-2 \\ -j-2 & 2j+9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -30j \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones encontramos que los fasores corrientes de malla son:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = 11{,}17 - 7{,}09j = 13{,}23\angle -32{,}42^o A$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = 2{,}34 - 4{,}19j = 4{,}8\angle -60{,}8^o A$$

Entonces el fasor $\underline{\mathbf{I}}$ es:

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_1 - \underline{\mathbf{I}}_2 = 8{,}83 - 2{,}9j = 9{,}3\angle -18{,}21^o A$$

Y la corriente instantánea i(t) es:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 9{,}3 \cdot \cos(1000 \cdot t - 18{,}21^o) A$$

7.3. Método de nudos

7.3.1. Aplicación del método en circuitos de CA

Para la aplicación del método de nudos a la resolución de circuitos de CA se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se asigna un **fasor tensión de nudo** a cada nudo del circuito. Se elige un **nudo de referencia** y se considera que está conectado a tierra ($\underline{\mathbf{U}}_{ref} = 0V$)
2. Se aplica la 1LK en forma fasorial a cada nudo del circuito manteniendo un criterio de signo consistente (en estas notas tomaremos las corrientes salientes como positivas y las corrientes entrantes como negativas). Se plantea un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los fasores tensión de nudo.
3. Se resuelven las ecuaciones para encontrar las tensiones de nudo. Las ecuaciones se pueden expresar en forma de matriz para facilitar los cálculos:

$$[Y] \cdot [\underline{\mathbf{U}}_{nudo}] = [\underline{\mathbf{I}}_g] \tag{101}$$

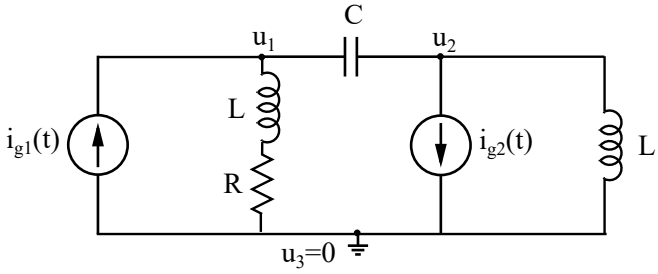
$[Y]$ es la **matriz de admitancias** cuyos términos son:

Yii=Suma de las admitancias conectadas al nudo i

Yij= - Suma de las admitancias compartidas por los nudos i y j

7.3.2. Ejemplo

Resolver el siguiente circuito usando el método de nudos y encontrar las tensiones instantáneas $u_1(t)$ y $u_2(t)$.



$$R = 2\Omega \qquad C = 1/5F \qquad L = 0{,}05H$$

$$i_{g1}(t) = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos(10 \cdot t)A$$

$$i_{g2}(t) = \sqrt{2} \cdot \cos(10 \cdot t + 90^o)A$$

Solución

En primer lugar pasamos el circuito en al dominio de la frecuencia ($\omega = 10$ rad/s):

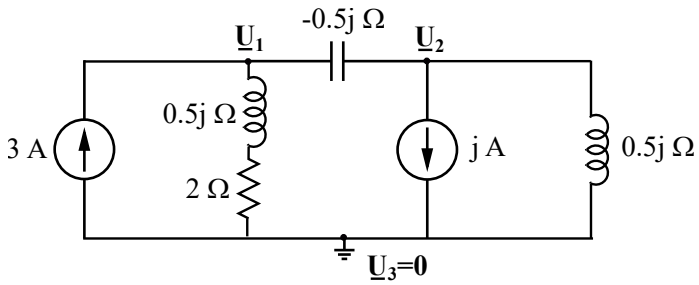
1. Impedancias:

$$Z_R = R = 2\Omega \quad Z_L = j \cdot \omega \cdot L = 0,5j\Omega \quad Z_C = -j/\omega \cdot C = -0,5j\Omega$$

2. Fasores:

$$\underline{\mathbf{I}}_{g1} = 3\angle 0^o A = 3A$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{g2} = 1\angle 90^o A = jA$$



Ecuaciones de nudos:

$$\text{Ecuación del nudo 1:} \qquad -3 + \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{2+0{,}5j} + \frac{\underline{\mathbf{U}}_1 - \underline{\mathbf{U}}_2}{-0{,}5j} = 0$$

$$\text{Ecuación del nudo 2:} \qquad j + \frac{\underline{\mathbf{U}}_2}{0{,}5j} + \frac{\underline{\mathbf{U}}_2 - \underline{\mathbf{U}}_1}{-0{,}5j} = 0$$

Las ecuaciones de nudos en forma matricial serían:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2+0{,}5j} - \frac{1}{0{,}5j} & -\frac{1}{-0{,}5j} \\ -\frac{1}{-0{,}5j} & \frac{1}{0{,}5j} - \frac{1}{0{,}5j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}_1 \\ \underline{\mathbf{U}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -j \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$\underline{\mathbf{U}}_1 = 0{,}5V$$

$$\underline{\mathbf{U}}_2 = 0{,}47 + 1{,}38j = 1{,}46\angle 71{,}2^o V$$

Los tensiones en el dominio del tiempo son:

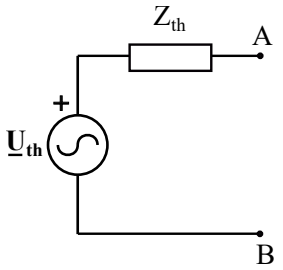
$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 0{,}50 \cdot \cos(10 \cdot t) V$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot 1{,}46 \cdot \cos(10 \cdot t + 71{,}2^o) V$$

7.4. Equivalente Thevenin

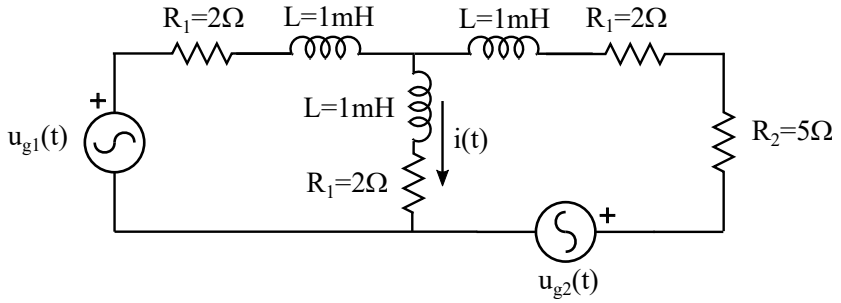
El teorema de Thenvenin también es válido en circuitos de CA y se puede plantear en el dominio de la frecuencia. El equivalente Thevenin de un circuito en el dominio de la frecuencia consta de una fuente de tensión de valor $\underline{\mathbf{U}}_{th}$ y una impedancia en serie Z_{th}.

Los métodos que se pueden seguir para obtener los parámetros del equivalente son análogos a los estudiados para los circuitos de CC.



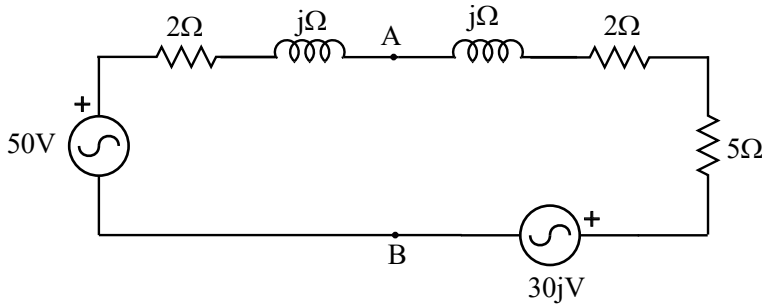
7.4.1. Ejemplo 1

En el circuito del ejemplo de la sección 7.2.2, a calcule la corriente i(t) usando el Teorema de Thevenin.

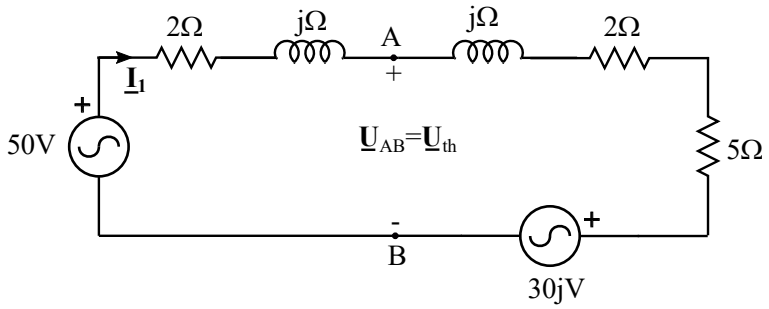


Solution

Como queremos encontrar la corriente i(t), debemos calcular el equivalente Thevenin del circuito entre A y B excluyendo la rama central del circuito:



1. Primero calculamos el fasor tensión Thevenin, que es el fasor caída de tensión entre los terminales A y B:



$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{50 - 30j}{2 + j + j + 2 + 5} = 4{,}59 - 4{,}35jA$$

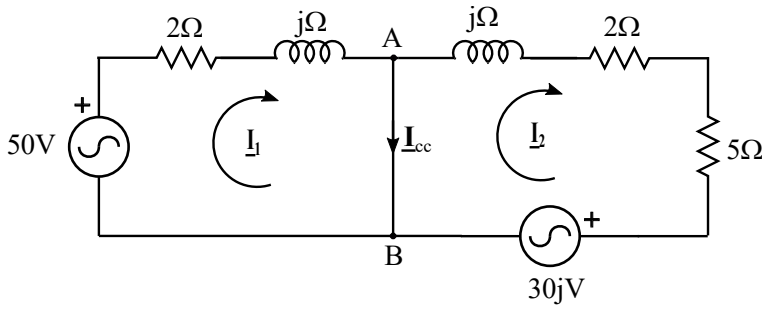
$$\underline{\mathbf{U}}_{th} = \underline{\mathbf{U}}_{AB} = (7 + j) \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 + 30j = 36{,}47 + 4{,}12jV$$

2. Cálculo de la impedancia Thevenin

Para calcular Z_{th} podemos usar el método de la corriente de cortocircuito o el cálculo de la resistencia equivalente del circuito pasivizado.

a) Método 1: Cálculo de $\underline{\mathbf{I}}_{cc}$

Colocamos un cortocircuito entre A y B y calculamos el fasor corriente ($\underline{\mathbf{I}}_{sc}$) que fluye desde A hasta B.



Las ecuaciones de malla del circuito se pueden escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2+j & 0 \\ 0 & 7+j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -30j \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = 20 - 10jA$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = -0{,}6 - 4{,}2jA$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{cc} = \underline{\mathbf{I}}_1 - \underline{\mathbf{I}}_2 = 20{,}6 - 5{,}8jA$$

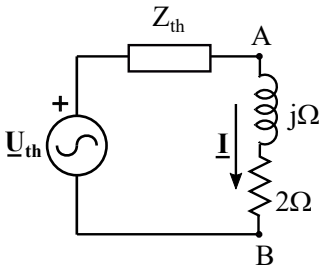
$$Z_{th} = \frac{\mathbf{U}_{th}}{\underline{\mathbf{I}}_{cc}} = 1{,}59 + 0{,}65j\Omega$$

b) Método 2: Cálculo de $Z_{eq_{AB}}$

Pasivizamos el sistema, apagando las fuentes, y obtenemos la siguiente red de impedancias:

$$Z_{th} = Z_{eq_{AB}} = (7+j)||(2+j) = 1{,}59 + 0{,}65j\Omega$$

Una vez que hemos calculado los parámetros del circuito equivalente, conectamos la rama central que queremos estudiar entre los terminales A y B, y calculamos el fasor corriente $\underline{\mathbf{I}}$.



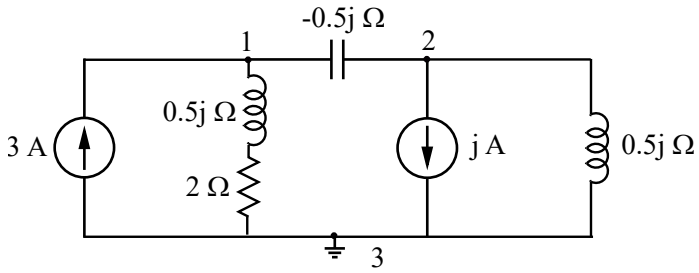
$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{th}}{Z_{th} + Z_{central}} = 8{,}83 - 2{,}91jA = 9{,}3\angle{-18{,}4^o}A$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 9{,}3 \cdot \cos(1000 \cdot t - 18{,}4^o)A$$

Este es el mismo resultado que obtuvimos cuando resolvimos el circuito por el método de mallas.

7.4.2. Ejemplo 2

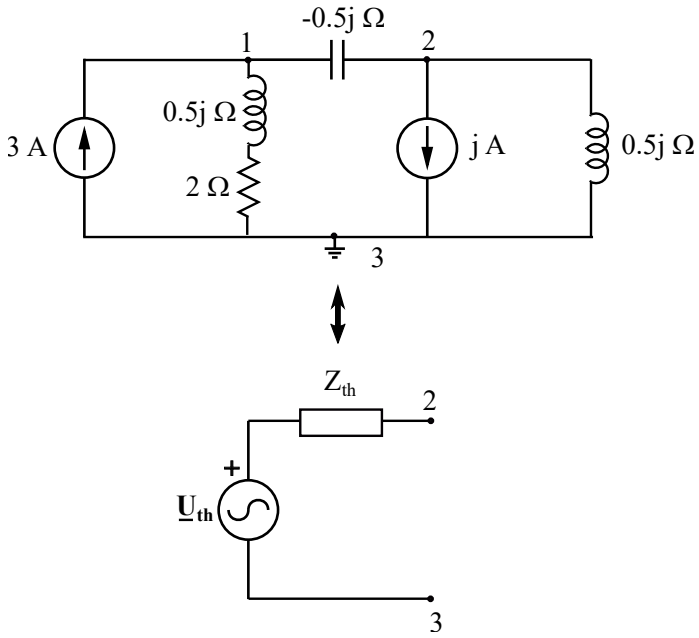
Encuentre el equivalente de Thevenin del circuito del ejemplo en la sección 7.3.2 entre las terminales 2 y 3.



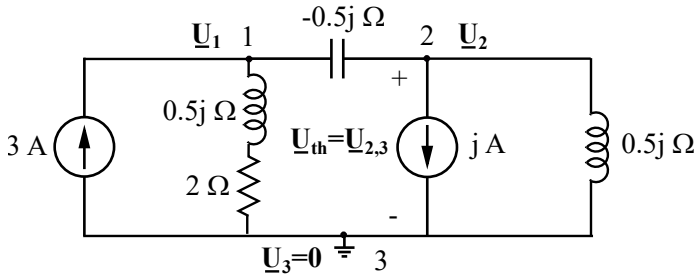
Solución

Como no nos piden analizar ningún elemento mediante el equivalente será necesario incluir todos los elementos del circuito en el equivalente.

El cicuito se había resuelto por nudos en un ejemplo anterior.



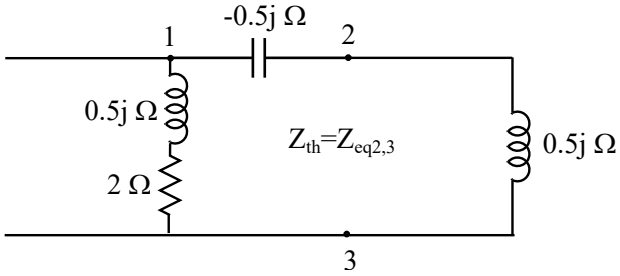
a) Cálculo de la tensión Thevenin



$$\underline{\mathbf{U}}_{th} = \underline{\mathbf{U}}_{2,3} = \underline{\mathbf{U}}_2 - \underline{\mathbf{U}}_3 = 0,47 + 1,38j = 1,46\angle 71,2^o V$$

b) Cálculo de Zth

Pasivizamos el circuito y calculamos la impedancia equivalente entre los terminales 2-3



$$Z_{th} = (2 + 0{,}5j - 0{,}5j)||0{,}5j = \frac{2 \cdot 0{,}5j}{2 + 0{,}5j} = 0{,}12 + 0{,}47j = 0{,}48\angle 75{,}96^o\Omega$$

Sería posible obtener el mismo valor de la impedancia mediante el método de la corriente de cortocircuito.

7.5. Análisis de circuitos con fuentes de varias frecuencias

7.5.1. Principio de superposición

Para analizar un circuito en el que actúan simultáneamente fuentes de distintas frecuencias, no sería posible pasar el circuito al dominio de la frecuencia porque: ¿Qué frecuencia se consideraría para el cálculo de las impedancias?

Este caso se podría resolver mediante el **principio de superposición**. El principio de superposición establece que "La respuesta de un circuito lineal sometido a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas de los circuitos cuando las fuentes actúan por separado".

De este modo sería posible obtener la respuesta del circuito cuando cada fuente actúa por separado y sumar las respuestas individuales para encontrar la respuesta total del circuito.

Por tanto, si queremos resolver un circuito que incorpora fuentes de dos frecuencias diferentes, ω_1 y ω_2, procederemos de la siguiente manera:

a) Apagaremos todas las fuentes de frecuencia ω_2 reemplazando las fuentes de tensión por cortocircuitos y las fuentes de corriente por circuitos abiertos.

b) Transformaremos el circuito al dominio de la frecuencia considerando la frecuencia ω_1 para calcular las impedancias de los elementos pasivos.

c) calcularemos la respuesta del circuito en el dominio de la frecuencia (es decir, calcularemos los fasores corriente y tensión buscados) para posteriormente encontrar las corrientes y tensiones instantáneas en el dominio del tiempo. Estas corrientes y tensiones son funciones sinusoidales de frecuencia ω_1 y serían la respuesta del circuito a las fuentes de frecuencia ω_1.

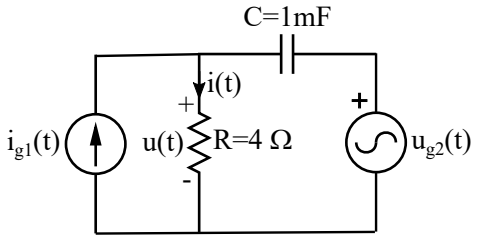
d) Después aparemos todas las fuentes de frecuencia ω_1 reemplazando las fuentes de tensión por cortocircuitos y las fuentes de corriente por circuitos abiertos.

e) Recalcularemos las impedancias de los elementos pasivos para la frecuencia ω_2 y obtendremos las corrientes y tensiones de los elementos en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. Estas corrientes y tensiones son la respuesta del circuito a las fuentes de frecuencia ω_2 y son funciones sinusoidales de frecuencia ω_2.

f) Finalmente obtendremos la respuesta del sistema cuando todas las fuentes actúan simultáneamente como la suma de las respuestas separadas en el dominio del tiempo. Las corrientes y tensiones resultantes serán la suma de dos funciones sinusoidales de frecuencias ω_1 y ω_2.

7.5.2. Ejemplo

Calcular la corriente i(t) y la tensión u(t) en el siguiente circuito:



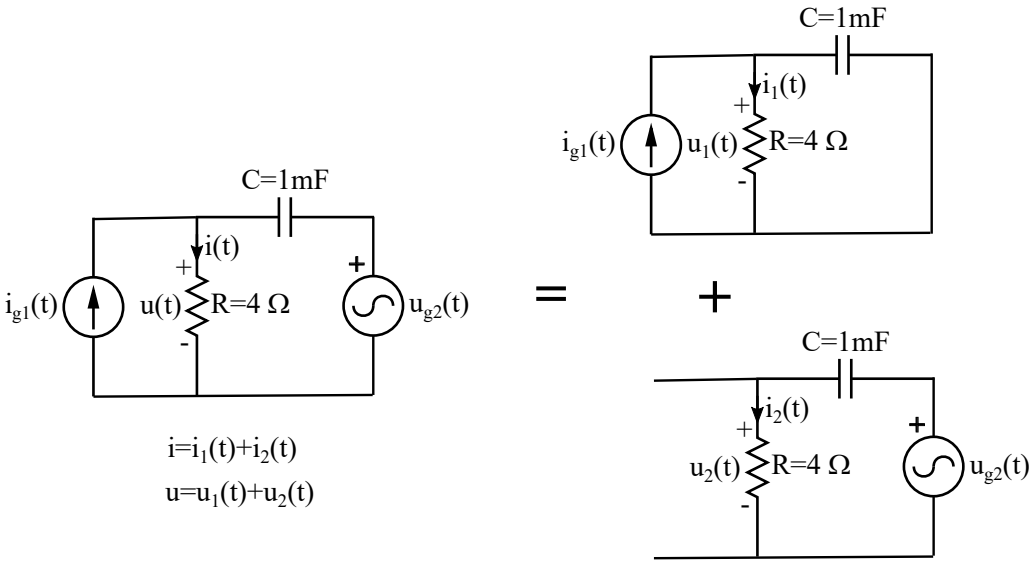
$$i_{g1}(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos(100 \cdot t + 90)V$$

$$u_{g2}(t) = \sqrt{2} \cdot 50 \cdot \cos(200 \cdot t - 90)V$$

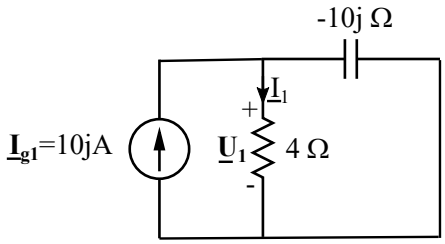
Solución

Como las dos fuentes tienen una frecuencia diferente, debemos aplicar el principio de superposición.

Primero cancelaremos la fuente de tensión $u_{g2}(t)$ y analizaremos la respuesta del circuito cuando solo se aplica la fuente de corriente $i_{g1}(t)$. Luego cancelaremos la fuente de corriente y obtendremos la respuesta del circuito a la fuente de tensión. La respuesta total se calcula como la suma de las respuestas individuales.



a) Respuesta a $i_{g1}(t)$.



La frecuencia de $i_{g1}(t)$ es 100 rad/s, entonces la impedancia del condensador es $-10j\Omega$.

Aplicamos la ecuación del divisor de corriente para calcular $\underline{\mathbf{I}}_1$

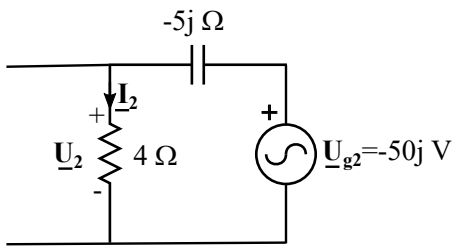
$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \underline{\mathbf{I}}_{g1} \cdot \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = 10j \cdot \frac{-10j}{4 - 10j} = 3{,}45 + 8{,}62jA = 9{,}28\angle 68{,}20^o A$$

$$\underline{\mathbf{U}}_1 = \underline{\mathbf{I}}_1 \cdot Z_R = 13{,}79 + 34{,}48jV = 37{,}14\angle 68{,}20^o V$$

Que en el dominio del tiempo son:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 9{,}28 \cdot \cos(100 \cdot t + 68{,}20^o)A$$
$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 37{,}14 \cdot \cos(200 \cdot t + 68{,}20^o)V$$

b) Respuesta a $u_{g2}(t)$



Como la frecuencia de $u_{g2}(t)$ es 200 rad/s, la impedancia del condensador es $-5j\Omega$.

Aplicamos la ley de Ohm en el dominio de la frecuencia para calcular $\underline{\mathbf{I}}_2$:

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{g2}}{Z_R + Z_C} = \frac{-50j}{4 - 10j} = 6{,}10 - 4{,}88jA = 7{,}81\angle -38{,}66A$$

$$\underline{\mathbf{U}}_2 = \underline{\mathbf{I}}_2 \cdot Z_R = 24{,}39 - 19{,}51jV = 31{,}23\angle -38{,}66^o V$$

Que en el dominio del tiempo son:

$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 7{,}81 \cdot \cos(100 \cdot t - 38{,}66^o)A$$
$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot 31{,}23 \cdot \cos(200 \cdot t - 38{,}66^o)V$$

c) Calculamos la respuesta a ambas fuentes actuando simultáneamente como la suma de las respuestas individuales en el dominio del tiempo:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 9{,}28 \cdot \cos(100 \cdot t + 68{,}20^o) + \sqrt{2} \cdot 7{,}81 \cdot \cos(100 \cdot t - 38{,}66^o)A$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \sqrt{2} \cdot 37{,}14 \cdot \cos(200 \cdot t + 68{,}20^o) + \sqrt{2} \cdot 31{,}23 \cdot \cos(200 \cdot t - 38{,}66^o)V$$

7.6. Análisis de circuitos con bobinas acopladas

7.6.1. Impedancia de bobinas acopladas

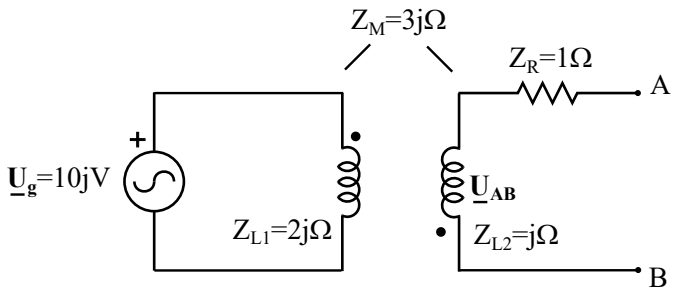
Los circuitos con bobinas acopladas también se pueden analizar en el dominio de la frecuencia aplicando los métodos estudiados en secciones anteriores. La impedancia para el coeficiente de inductancia mutua se calcula como:

$$Z_M = j\omega M \tag{102}$$

Para calcular la caída de tensión a través de los bobinas tendremos que considerar el efecto de la inductancia propia y el de la inductancia mutua. La polaridad de las tensiones se deriva del análisis de los terminales correspondientes.

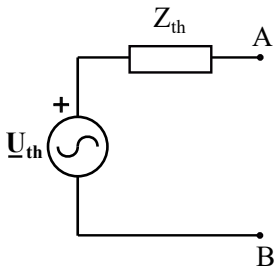
7.6.2. Ejemplo

Dado el siguiente circuito en el dominio de la frecuencia, obtenga el equivalente Thevenin entre los terminales AB:

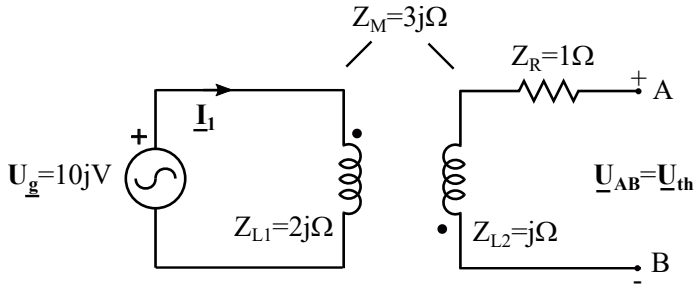


Solución

Queremos encontrar los parámetros $\underline{\mathbf{U}}_{th}$ y Z_{th} que hacen que el siguiente circuito sea equivalente al circuito inicial entre los terminales A B:



Primero calculamos la tensión de Thevenin, que es la caída de tensión entre A y B en circuito abierto:



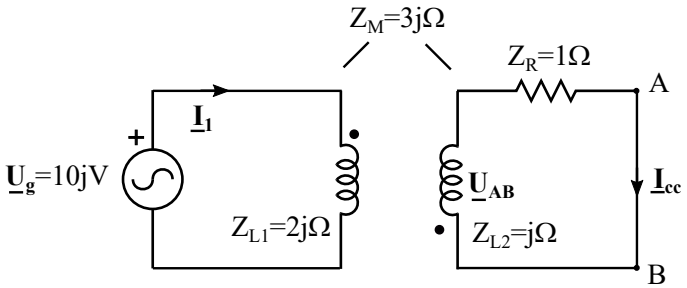
La ecuación de malla para el circuito de la izquierda es:

$$-\underline{\mathbf{U}}_g + \underline{\mathbf{I}}_1 \cdot Z_{L1} = 0$$

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{\underline{\mathbf{U}}_g}{Z_{L1}} = \frac{10j}{2j} = 5A$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{th} = \underline{\mathbf{U}}_{AB} = -Z_M \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 = -5 \cdot 3j = -15jV$$

Ahora calculamos la impedancia de Thevenin. Para ello dibujamos un cortocircuito entre A y B y calculamos la corriente que circula desde A hasta B:



Aplicando 2KL al circuito de la izquierda y al circuito de la derecha:

$$-\underline{\mathbf{U}}_g + \underline{\mathbf{I}}_1 \cdot Z_{L1} + Z_M \cdot \underline{\mathbf{I}}_{cc} = 0$$

$$Z_{L2} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{cc} + Z_R \cdot \underline{\mathbf{I}}_{cc} + Z_M \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 = 0$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$-10j + \underline{\mathbf{I}}_1 \cdot 2j + 3j \cdot \underline{\mathbf{I}}_{cc} = 0$$

$$(j+1) \cdot \underline{\mathbf{I}}_{sc} + 3j \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = -0{,}94 + 1{,}70jA \qquad \underline{\mathbf{I}}_{cc} = 3{,}96 - 1{,}13jA$$

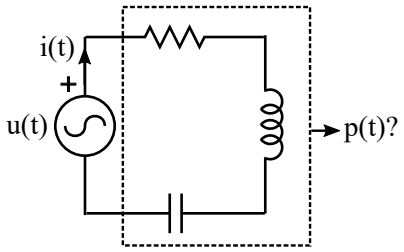
Entonces la impedancia Thevenin es:

$$Z_{th} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{th}}{\underline{\mathbf{I}}_{cc}} = \frac{-15j}{3{,}96 - 1{,}13j} = 1 - 3{,}5j\Omega$$

8. Potencia en circuitos de corriente alterna

8.1. Potencia instantánea

Imaginemos que queremos calcular la potencia instantánea absorbida por la red RLC del siguiente circuito:



El circuito está alimentado mediante una fuente de CA, por lo que la tensión u(t) y la corriente i(t) son sinusoidales y tienen la misma frecuencia:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{103}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{104}$$

el desfase relativo entre la corriente y la tensión es la diferencia entre el ángulo de fase de ambas magnitudes:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \tag{105}$$

Para simplificar el análisis de la potencia, es interesante tomar la corriente como origen de fases. En ese caso la corriente y la tensión serían:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{106}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \omega t \tag{107}$$

La potencia instantánea es, por definición, el producto de la tensión y la corriente:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \omega t \tag{108}$$

esta expresión se puede simplificar usando la relación trigonométrica:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \tag{109}$$

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi) \tag{110}$$

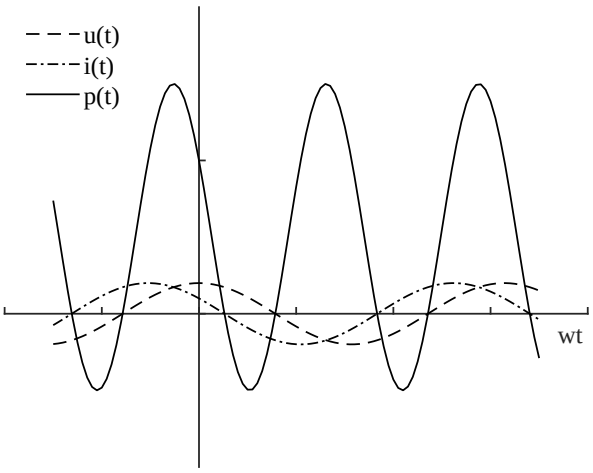
aplicando la expresión del coseno de la suma de dos ángulos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \tag{111}$$

la expresión de la potencia instantánea queda:

$$p(t) = U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen} 2\omega t \tag{112}$$

Representando gráficamente la potencia instantánea, la tensión y la corriente frente al tiempo, vemos que la potencia es una función sinusoidal cuya frecuencia duplica la de la tensión y la corriente. Como se puede ver, en algunas partes del ciclo la potencia es positiva y en otras es negativa. Esto significa que la red RLC a veces absorbe potencia (cuando la potencia es positiva) y en otros instantes entrega potencia (cuando la potencia es negativa).

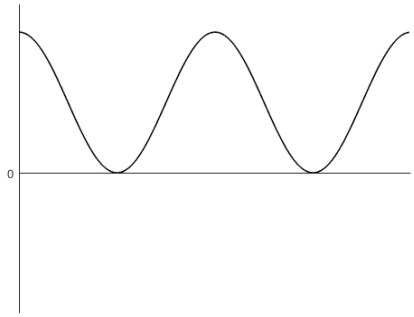


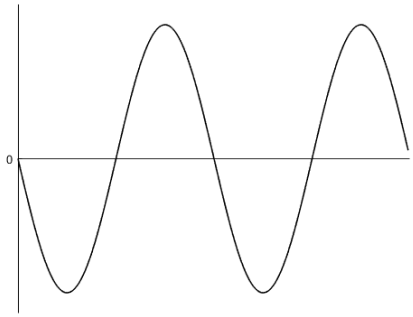
Es interesante analizar los dos términos de la potencia por separado para comprender el significado de ecuación (112):

$$p(t) = \underbrace{U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t)}_{1} - \underbrace{U \cdot I \cdot \sin\varphi \cdot \sin 2\omega t}_{2} \tag{113}$$

Si representamos gráficamente los términos 1 y 2 frente al tiempo, vemos que la primera parte de la potencia corresponde a un factor que siempre es positivo, es decir a una potencia absorbida. El segundo término, en cambio, corresponde a una potencia sinusoidal cuyo valor medio es cero.

$U \cdot I \cdot cos\varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t)$ $\qquad$ $-U \cdot I \cdot \sin\varphi \cdot \sin 2\omega t$





Como se justificará a continuación, la "potencia positiva" corresponde a la potencia disipada en la resistencia. El valor medio de esta potencia es $U \cdot I \cdot \cos\varphi$. Esta expresión es también el valor medio de la potencia instantánea. Por otro lado, la "potencia fluctuante" corresponde al intercambio de potencia que tiene lugar entre la fuente y el condensador y la bobina. El valor medio de la potencia fluctuante es cero y su amplitud es $U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi$.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores Vamos a introducir dos nuevos términos en relación con la potencia en los circuitos de CA:

- **Potencia activa**: Es el valor medio de la potencia instantánea.

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \tag{114}$$

  Más adelante se justificará que la potencia activa representa la potencia absorbida en las resistencias.

- **Potencia reactiva**: Es la amplitud de la potencia fluctuante :

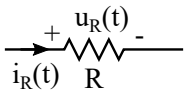
$$Q = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \tag{115}$$

  Como veremos en los próximos apartados, la potencia reactiva representa la potencia intercambiada entre las bobinas y condensadores y las fuentes.

Para profundizar en el significado físico de la variación de la potencia instantánea y de la potencia activa y reactiva analizaremos por separado la potencia instantánea de las resistencias, bobinas y condensadores.

8.2. Potencia de una resistencia

Vamos a calcular el valor de la potencia absorbida por una resistencia de valor R cuando es atravesada por una corriente i_R sinusoidal y con una caída de tensión entre sus terminales u_R.



Como se estudió anteriormente, el desfase entre la tensión y la corriente en una resistencia es cero:

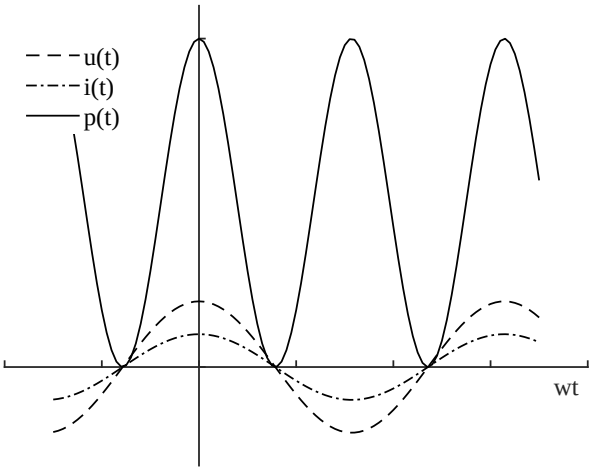
$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0 \tag{116}$$

Entonces, de acuerdo a la ecuación ecuación (112) la potencia instantánea sería:

$$p_R(t) = U \cdot I \cdot (1 + \cos(2\omega t)) \tag{117}$$

Si representamos la potencia instantánea de una resistencia frente al tiempo podemos observar los siguientes aspectos:

- La potencia instantánea de una resistencia siempre es positiva. Esto es consistente con lo que estudiamos anteriormente, ya que **las resistencias siempre disipan energía**.
- La potencia instantánea fluctúa con frecuencia 2ω.
- El valor medio de la potencia es $U \cdot I$



Las potencias activa y reactiva de una resistencia son:

$$P_R = U \cdot I \cdot \cos\varphi_R = U \cdot I \tag{118}$$

$$Q_R = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi_R = 0 \tag{119}$$

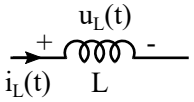
Como se puede ver, la potencia reactiva en la resistencia es cero, ya que en este elemento no se produce fluctuación de energía, ya que toda la potencia que se absorbe se disipa.

Además, considerando la relación entre los fasores tensión y corriente en una resistencia, y la relación verificada por sus módulos ($U = R \cdot I$), podremos encontrar dos expresiones adicionales para calcular la potencia activa en una resistencia:

$$P_R = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \tag{120}$$

8.3. Potencia de una bobina

Al igual que hicimos con la resistencia, vamos a calcular la potencia de una bobina atravesada por una corriente alterna i_L y con caída de tensión u_L:



El desfase entre la tensión y la corriente en una bobina es 90°:

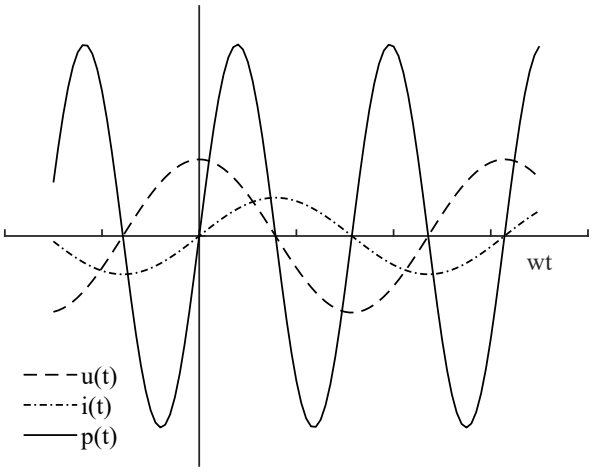
$$\varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = 90^o$$

Sustituyendo este ángulo en la ecuación (113) se obtiene la potencia instantánea disipada por la bobina:

$$p_L(t) = -U \cdot I \cdot \sin(2\omega t)$$

Si representamos la potencia vemos que:

- La potencia fluctúa con frecuencia 2ω siendo a veces positiva y a veces negativa. Esto significa que la bobina en algunos momentos absorbe energía y en otros entrega energía.
- El valor medio de la potencia instantánea es cero.



Estas observaciones son consistentes con lo estudiado en el Tema 1: las bobinas no disipan potencia, sino que almacenan energía en un campo magnético. Como puede verse en el gráfico, en una mitad del ciclo se almacena la energía y en la otra parte del ciclo la energía se devuelve a la fuente.

La potencia activa de una bobina es 0, ya que esta representa una disipación de energía, que no se da en las bobinas ideales:

$$P_L = U \cdot I \cdot \cos\varphi_L = 0 \tag{121}$$

En cuanto a la potencia reactiva:

$$Q_L = U \cdot I \cdot \sin\varphi_L = U \cdot I \tag{122}$$

Además, teniendo en cuenta la relación que existe entre el fasor tensión y el fasor corriente en una bobina, y la relación verificada por sus módulos:

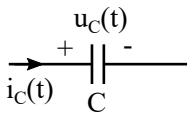
$$\underline{\mathbf{U}} = j\omega L \cdot \underline{\mathbf{I}} \qquad\qquad U = \omega \cdot L \cdot I = X_L \cdot I$$

podremos encontrar dos expresiones adicionales que pueden ser útiles para calcular la potencia reactiva de una bobina en función de la tensión o la corriente y de la reactancia de la bobina:

$$Q_L = X_L \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_L} \tag{123}$$

Se puede observar que la potencia reactiva de un bobina es siempre positiva, por eso decimos que **las bobinas siempre absorben potencia reactiva**. Por otra parte la potencia activa siempre es cero, lo que quiere decir que en estos elementos no existe un consumo neto de energía.

8.4. Potencia de un condensador



Como se estudió anteriormente, el desfase entre la tensión y la corriente de un condensador es -90°:

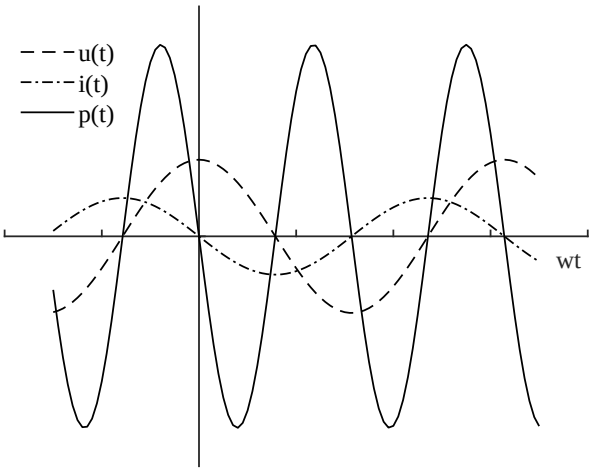
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^o$$

De acuerdo a (113) la potencia instantánea será:

$$p_C(t) = U \cdot I \cdot \text{sen}(2\omega t)$$

Si representamos la potencia vemos que el condensador presenta un comportamiento similar al de la bobina:

- La potencia fluctúa con frecuencia 2ω siendo a veces positiva y a veces negativa, lo que significa que el condensador absorbe y entrega energía alternativamente.
- El valor medio de la potencia instantánea es cero.



Las observaciones son consistentes con el hecho de que los condensadores no disipan energía, sino que almacenan energía en un campo eléctrico. Lo que vemos en el gráfico es que en una parte del ciclo se almacena energía que luego se libera y se devuelve a la fuente.

Las potencias activa y reactiva de un condensador son:

$$P_C = U \cdot I \cdot \cos\varphi_C = 0 \tag{124}$$

$$Q_C = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi_C = -U \cdot I \tag{125}$$

Considerando la relación entre los fasores tensión y corriente en un condensado:

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{-j}{\omega \cdot C} \cdot \underline{\mathbf{I}} \qquad\qquad U = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I = -X_C \cdot I$$

se obtienen expresiones que permiten calcular la potencia reactiva de un condensador en función de la tensión o la corriente y la reactancia ($X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$):

$$Q_C = X_C \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_C} \tag{126}$$

La potencia reactiva de un condensador siempre es negativa; por eso decimos que **un condensador siempre cede potencia reactiva**. Por otra parte la potencia activa de este elemento es cero, ya que en él no existe un consumo neto de energía.

8.5. Definiciones

Teniendo en cuenta lo que se ha estudiado en la sección anterior concluimos que es posible distinguir entre dos comportamientos distintos en relación con la energía en los circuitos de CA:

1. Las resistencias absorben energía de las fuentes y la transforman en calor.

2. Los bobinas y los condensadores absorben energía de las fuentes, la almacenan y la devuelven más tarde.

Tanto la potencia absorbida como la potencia fluctuante son importantes y se deben tener en cuenta en el análisis de los circuitos de CA. Sin embargo, tienen un impacto diferente en los circuitos: mientras las resistencias contribuyen con un consumo real de energía las bobinas y condensadores provocan un intercambio continuo de energía con la fuente.

Hemos definido dos tipos de potencia en los sistemas de corriente alterna:

- **Potencia activa (P)**: es la potencia absorbida en las resistencias. Desde el punto de vista matemático, la potencia activa de un sistema se puede calcular como:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \tag{127}$$

  la potencia activa se mide en vatios [W]

- **Potencia reactiva (Q)**: es la potencia que fluctúa entre las bobinas y condensadores y las fuentes.

$$Q = U \cdot I \cdot \varphi \tag{128}$$

  La potencia reactiva se mide en voltio-amperios reactivos [var]

La potencia instantánea se puede expresar también en función de la potencia activa y reactiva como:

$$p(t) = P \cdot (1 + cos2\omega t) - Q \cdot \operatorname{sen} 2\omega t \tag{129}$$

Además, hay otros conceptos importantes para el análisis de la potencia en los circuitos de ca:

- **Factor de potencia**: es el coseno del ángulo de desfase entre la tensión y la corriente.

$$p.f. = \cos\varphi = \cos(\varphi_u - \varphi_i) \tag{130}$$

- **Potencia compleja (S)** Es la suma compleja de la potencia activa y reactiva.

$$S = P + Q = U \cdot I \cdot \cos\varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{I}}^* \tag{131}$$

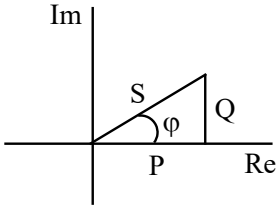
  La potencia compleja se mide en voltios-amperios [VA]

- **Potencia aparente (S)**: Es el módulo de la potencia compleja

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I \tag{132}$$

  La potencia aparente se mide en voltios-amperios [VA].

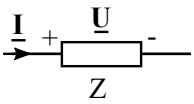
- **Triángulo de potencia**: Es la representación de la potencia compleja en el plano complejo. Como se puede ver, el ángulo φ del triángulo de potencias coincide con el desfase relativo entre la tensión y la corriente.



8.6. Potencia de una impedancia compleja

Si consideramos una impedancia compleja:

$$Z = R + j \cdot X \tag{133}$$



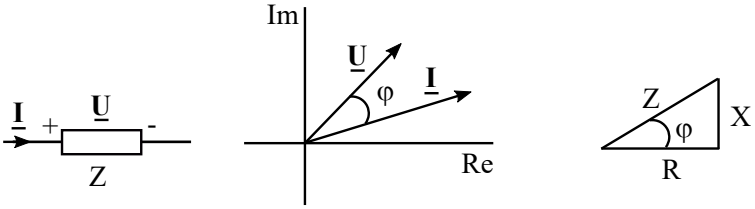
La relación entre sus fasores tensión y corriente viene dada por la ley de Ohm:

$$\underline{\mathbf{U}} = Z \cdot \underline{\mathbf{I}} \tag{134}$$

El ángulo φ es el desfase entre la tensión y la corriente, pero también es el ángulo de la impedancia compleja.

$$Z = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{I}}} = \frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i} = \frac{U}{I}\angle\varphi_u - \varphi_i = \frac{U}{I}\angle\varphi \tag{135}$$

Si la impedancia se representa como un triángulo de impedancia vemos que entre la tensión y la corriente, y entre las componentes de la impedancia compleja aparece el mismo ángulo φ:



La potencia activa, reactiva y compleja consumidas por la impedancia serían:

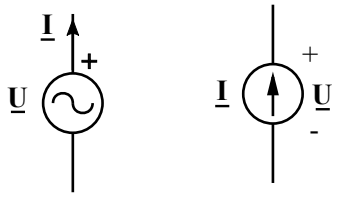
$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = R \cdot I^2 \tag{136}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = X \cdot I^2 \tag{137}$$

$$S = P + Q = Z \cdot I^2 \tag{138}$$

8.7. Potencia de una fuente de CA

Para calcular la potencia entregada por una fuente de CA adoptamos el criterio de signos definido para los circuitos de CC: Una fuente entrega potencia cuando la corriente fluye desde el terminal de menor tensión hacia el terminal de mayor tensión, y la potencia entregada por una fuente se considerará positiva.



La potencia compleja entregada por una fuente de CA se calcula como:

$$S_g = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = P_g + Q_g j \tag{139}$$

La parte real de la potencia compleja es la potencia activa entregada por la fuente y la parte imaginaria es su potencia reactiva. En algunos casos P_g o Q_g pueden ser negativos, lo que significa que la fuente absorbe potencia activa o reactiva.

*** Demostración de la ecuación (139)**:

$$\underline{\mathbf{U}} = U\angle\varphi_u \qquad \underline{\mathbf{I}} = I\angle\varphi_i \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$S_g = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = U\angle\varphi_u \cdot I\angle{-\varphi_i} = U \cdot I\angle\varphi = U \cdot I\cos\varphi + j \cdot U \cdot I\sin\varphi = P_g + j \cdot Q_g$$

8.8. Teorema de Boucherot

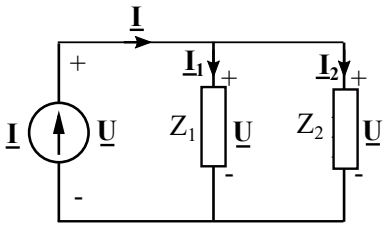
El Teorema de Boucherot establece que la cantidad total de potencia activa y reactiva absorbida en un circuito eléctrico es igual a la suma de la potencia activa y reactiva absorbida por sus elementos pasivos.

$$P_T = \sum_k P_k \tag{140}$$

$$Q_T = \sum_k Q_k \tag{141}$$

Este principio nos permite deducir que en los circuitos CA existe un balance de potencia en el que la potencia compleja suministrada por las fuentes es igual a la potencia compleja absorbida por los elementos pasivos.

Por ejemplo, en el circuito de la figura:

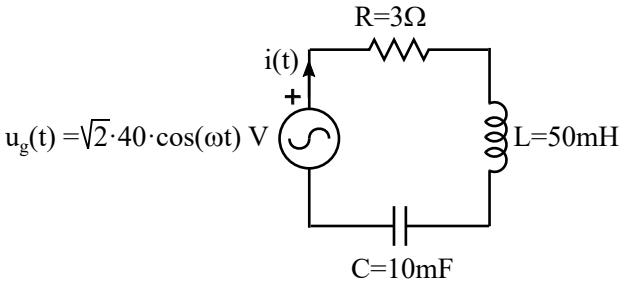


La potencia suministrada por la fuente es igual a la suma de la potencia compleja absorbida por las impedancias Z_1 y Z_2.

$$S_g = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{U}} \cdot (\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2)^* = S_{Z_1} + S_{Z_2} = (P_1 + P_2) + j(Q_1 + Q_2)$$

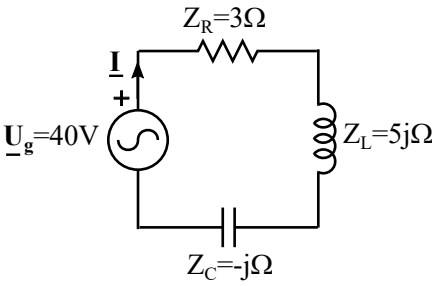
8.9. Ejemplo

Realizar un balance de potencia del siguiente circuito:



Solución

El circuito en el dominio de la frecuencia es:



y el fasor corriente $\underline{\mathbf{I}}$:

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_g}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{40}{3 + 5j - j} = 8\angle -53{,}13^o A$$

1. Potencia absorbida por los elementos pasivos:
   - Resistencia:

La resistencia solo absorbe potencia activa.

$$P_R = R \cdot I^2 = 3 \cdot 8^2 = 192W$$

$$Q_R = 0var$$

- Bobina:

  La bobina solo absorbe potencia reactiva.

$$P_L = 0W$$

$$Q_L = X_L \cdot I^2 = 5 \cdot 8^2 = 320var$$

- Condensador:

  El condensador solo entrega potencia reactiva.

$$P_C = 0W$$

$$Q_C = X_C \cdot I^2 = -1 \cdot 8^2 = -64var$$

La potencia compleja total absorbida por las cargas es:

$$S_{cargas} = P_R + j \cdot (Q_L + Q_C) = 192 + j(320 - 64) = 192 + 256jVA$$

2. Potencia entregada por la fuente:

$$S_g = \underline{\mathbf{U}}_g \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = 40 \cdot 8\angle 53{,}13^o = 320\angle 53{,}13^o = 192 + 256jVA$$

Como puede verse, la potencia absorbida por las cargas es igual a la potencia entregada por la fuente: $S_g = S_{loads}$