

OpenCourseWare
Grado Ingeniería Informática
Estructura de Datos y Algoritmos

Tema 4 Recursión

Objetivos

- 1) Describir el concepto de recursión y dar ejemplos de su uso.
- 2) Identificar el/los caso(s) base(s) y el/los caso(s) general(es) de una función recursiva.
- 3) Escribir funciones recursivas para resolver problemas.
- 4) Comparar soluciones recursivas e iterativas para soluciones de problemas sencillos.

Índice

- 1) **Qué es recursión?**
- 2) Algunos ejemplos de recursión.
- 3) Tipos de recursión.
- 4) Iteración y Recursión

Qué es recursión?

- Una forma para conseguir repetición.
- Una función que se llama a sí misma.
- Algunas estructuras de datos son recursivas (por ejemplo, nodos y árboles).
- Muy relacionado con el concepto de inducción matemática.

Las tres leyes de la recursión

1. Un algoritmo recursivo debe llamarse a sí mismo.
2. Un algoritmo recursivo debe tener al menos un **caso base**. Un caso base es aquel que puede ser resuelto directamente.
3. También deben tener al menos un caso recursivo (un caso más complejo donde el problema se divide en subproblemas más pequeños). Las llamadas recursivas deben converger al caso base y sus soluciones deben combinarse para obtener la solución global.

Índice

- 1) Qué es recursión?
- 2) **Algunos ejemplos de recursión.**
- 3) Tipos de recursión.
- 4) Iteración y Recursión

Ejemplo 1: Función Factorial

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq 1 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$4! = 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 4 \cdot 3!$$

Definición Recursiva

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

Ejemplo 1: Implementación de factorial

```
def factorial(n: int) -> int:
    """ $n! = n * (n-1) * \dots * 2 * 1$ """
    if n < 0 or not isinstance(n, int):
        return None
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * factorial(n - 1)
```

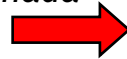
Caso Base

Caso Recursivo

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada

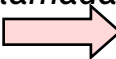


4 * factorial(3)

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada


4 * factorial(3)

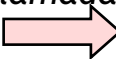


3 * factorial(2)

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada


4 * factorial(3)



3 * factorial(2)

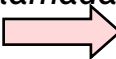


2 * factorial(1)

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada


4 * factorial(3)



3 * factorial(2)



2 * factorial(1)

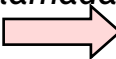


1 * factorial(0)

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada


4 * factorial(3)



3 * factorial(2)



2 * factorial(1)



1 * factorial(0)



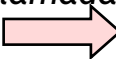
1

Caso Base

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada


4 * factorial(3)



3 * factorial(2)



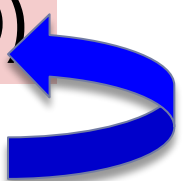
2 * factorial(1)



1 * factorial(0)



1

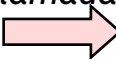


1

```
def factorial(n):  
    if n==0:#base case  
        return 1  
    else:#recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada


4 * factorial(3)



3 * factorial(2)



2 * factorial(1)

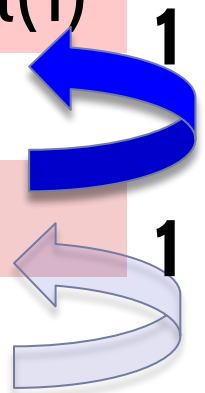


1 * 1



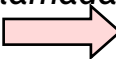
1

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```



Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada


```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```

4 * factorial(3)



3 * factorial(2)



2 * 1



1 * 1



1

2

1

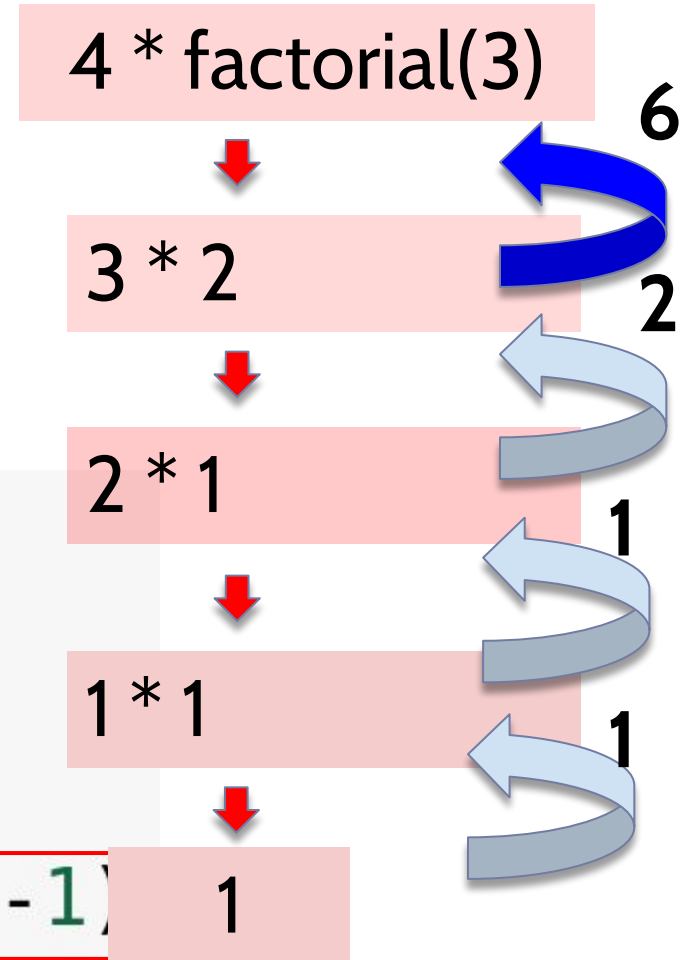
1

Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera
llamada
→

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```



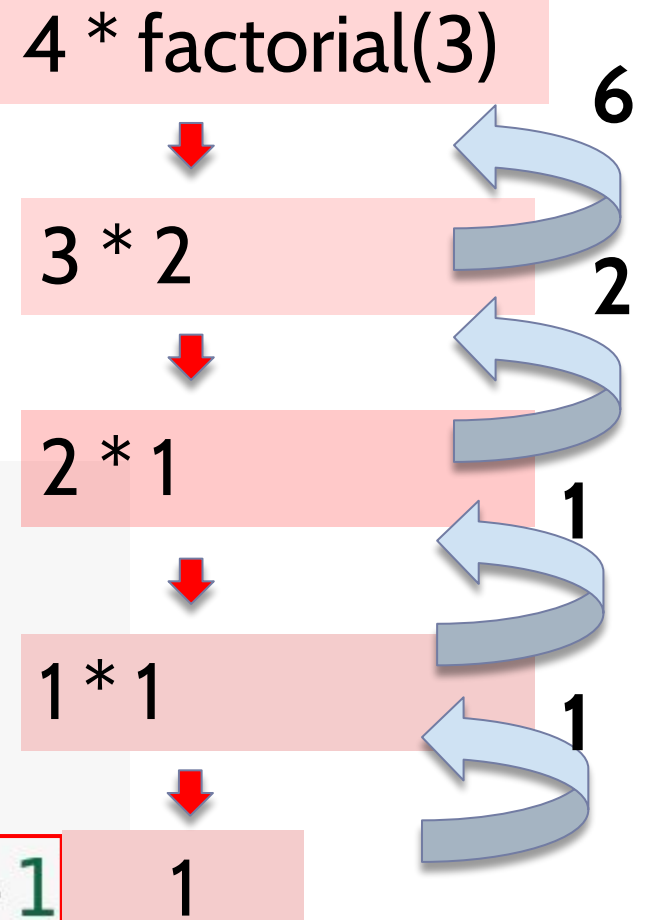
Trazabilidad de factorial

factorial(4)

Primera llamada

→
←
24

```
def factorial(n):  
    if n==0: #base case  
        return 1  
    else: #recursive case  
        return n*factorial(n-1)
```



Ejemplo 2: Multiplicación por suma

$$5 \times 3 = 15 = 5 + 5 + 5$$

Ejemplo 2: Multiplicación por suma

$$5 \times 3 = 15 = 5 + 5 + 5$$

```
def multiply_by_sum(x: int, y: int) -> int :
```

Primero, piensa sobre el caso base

Ejemplo 2: Multiplicación por suma

$$5 \times 3 = 15 = 5 + 5 + 5$$

```
def multiply_by_sum(x: int, y: int) -> int :  
    if y==0:  
        return 0
```

Correcto!!!. Ahora piensa sobre el caso recursivo.

Ejemplo 2: Multiplicación por suma

$$5 \times 3 = 15 = 5 + 5 + 5$$

```
def multiply_by_sum(x, y) :  
    if y==0:  
        return 0  
    else:  
        return x+multiply_by_sum(x,y-1)
```

Sí!!!, lo tienes!!!

Ejemplo 3: Búsqueda binaria

Entrada: un array ordenado de enteros y un número x (por ejemplo, $x=23$)

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	5	8	10	13	20	23	50	90
	start	mid = (start + end) / 2						end	

- 1) $x=a[mid]$, Encontrado!!!
- $a[mid]>x?$ 2) $x<a[mid]$, buscar desde start hasta mid-1
- 3) $x>a[mid]$, buscar desde mid+1 hasta end

Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 23$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90

start

mid

end

$a[\text{mid}] < 23 \rightarrow \text{start} = \text{mid} + 1 = 5, \text{ end} = 8$

Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 23$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90
					start		end	

$$\text{mid} = (\text{start} + \text{end}) // 2 = (5 + 8) // 2 = 13 // 2 = 6$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90
					start		mid	end

$a[\text{mid}] = x$, Encontrado!!!

Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 10$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90
start			mid = 4			end		

$a[mid] > 10 \rightarrow \text{start}=0, \text{end}=mid-1=3$

Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 10$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90

start end

$$\text{mid} = (\text{start} + \text{end}) // 2 = (0 + 3) // 2 = 3 // 2 = 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90

start mid end

$$a[\text{mid}] < 10 \rightarrow \text{start} = \text{mid} + 1 = 2, \text{ end} = 3$$

Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 10$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90

start end

$$\text{mid} = (\text{start} + \text{end}) // 2 = (2 + 3) // 2 = 4 // 2 = 2$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90

$$a[\text{mid}] < 10 \rightarrow \text{start} = \text{mid} + 1 = 3, \text{ end} = 3$$

Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 10$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90

start end

$$\text{mid} = (\text{start} + \text{end}) // 2 = (3 + 3) // 2 = 6 // 2 = 3$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90

$10 == a[\text{mid}] \rightarrow$ Encontrado!!!

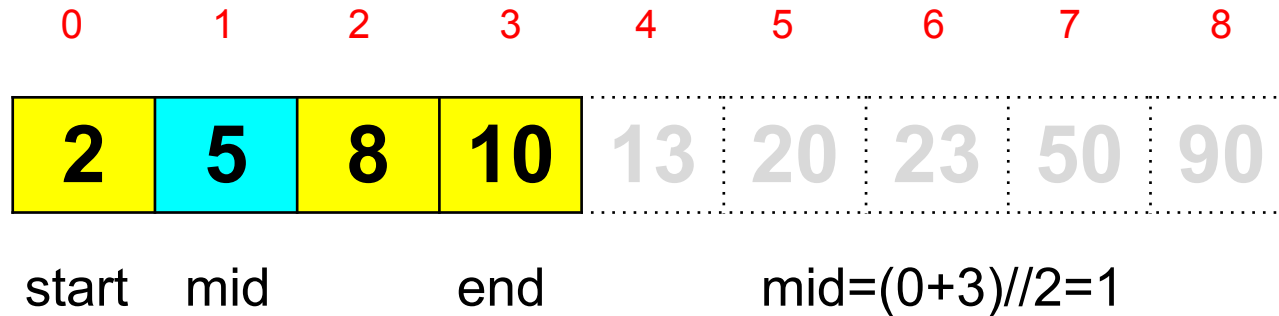
Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 7$ (no existe)

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90
start				mid	end			

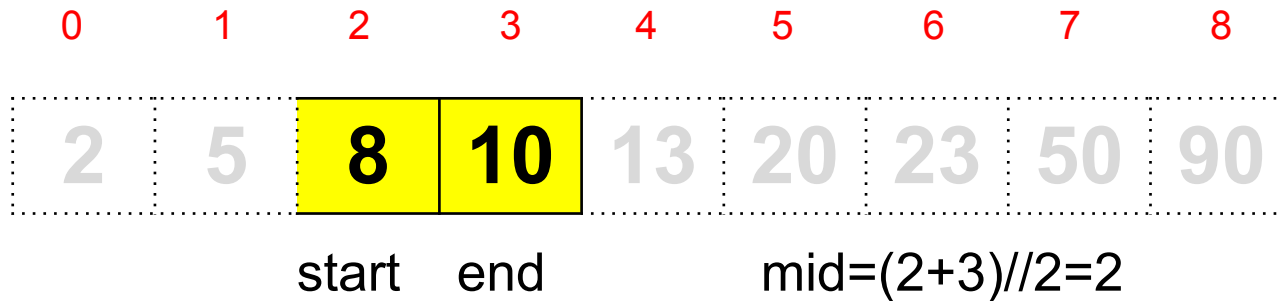
$x < a[mid] \rightarrow \text{end} = \text{mid} - 1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	8	10	13	20	23	50	90
start			end	$\text{mid} = (0 + 3) // 2 = 1$				

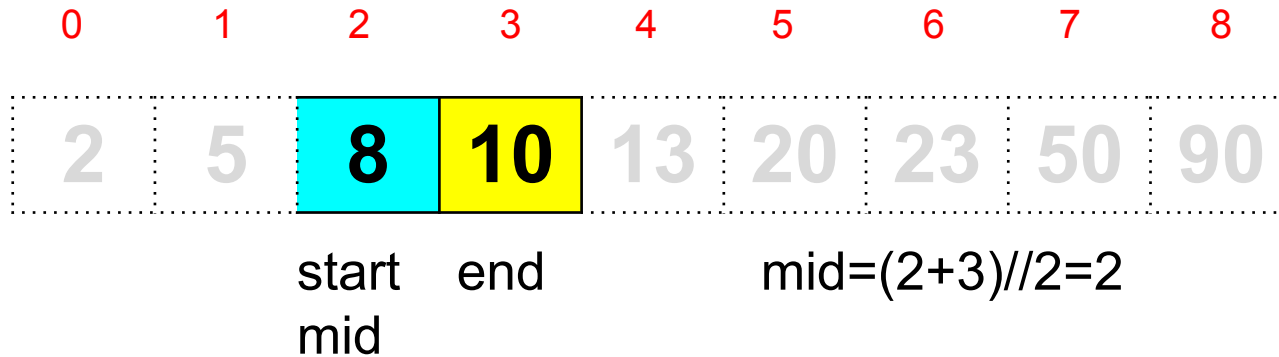
Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 7$ (no existe)



$x > A[\text{mid}] \rightarrow \text{start} = \text{mid} + 1$



Ejemplo 3: Búsqueda binaria, $x = 7$ (no existe)



$x < A[\text{mid}] \rightarrow \text{end} = \text{mid} - 1 = 1, \text{start} = 2$

end < start!!!, significa que hemos revisado todas las particiones posibles sin encontrar el elemento. Debemos devolver False.

Índice

- 1) Qué es recursión?
- 2) Algunos ejemplos de recursión.
- 3) **Tipos de recursión.**
- 4) Iteración y Recursión

Tipos de recursión

1. **Recursión Lineal:** una llamada recursiva podría producir como máximo una nueva llamada recursiva.
2. **Recursión Binaria:** una llamada recursiva debe generar dos nuevas llamadas recursivas.
3. **Multiple recursión:** una llamada recursiva puede generar tres o más llamadas recursivas.

Recursión Lineal

- Ya hemos visto algunos ejemplos: factorial, multiplicación por suma.
- Ahora, estudiaremos algunos ejemplos más:
 - Calcular la potencia de un número
 - Calcular la suma de un array de enteros.
 - Invertir una lista de Python (array)

Ejemplo Recursión Lineal: Potencia

Función potencia: $\text{power}(x,n)=x^n$

$$\text{power}(x,n)= \begin{cases} 1 & \text{if } n=0 \\ x * \text{power}(x,n-1) & \text{if } n>0 \end{cases}$$

Ejemplo Recursión Lineal: Potencia

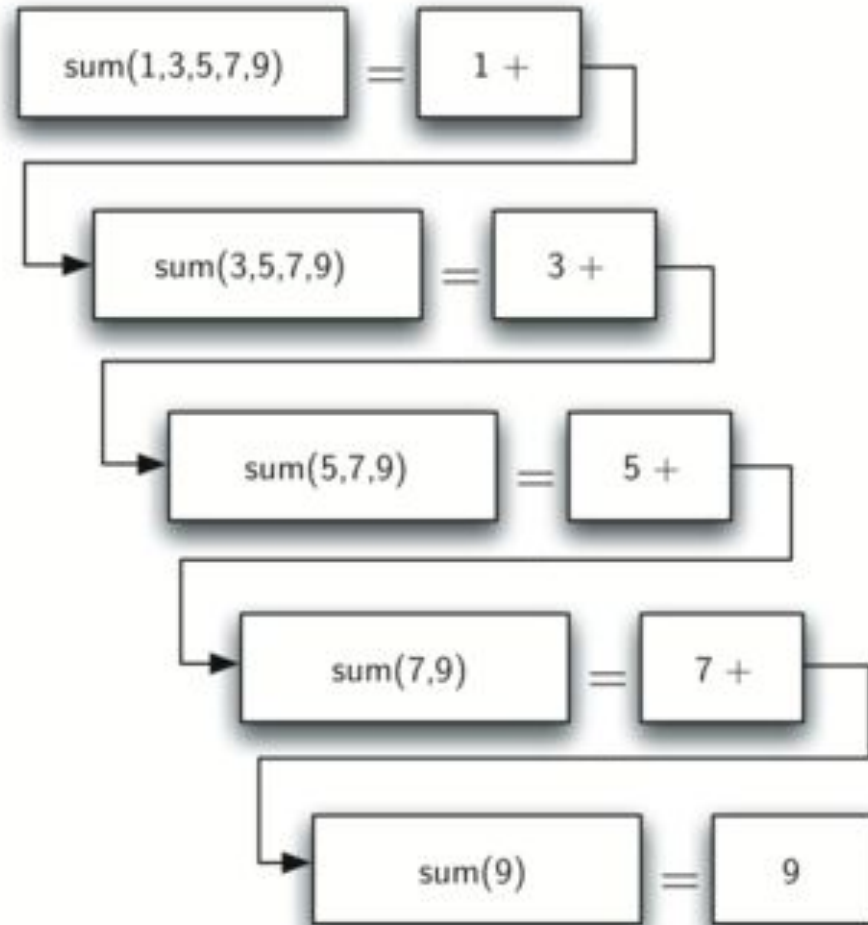
```
def power(a: int, n: int) -> int:
    """ $a^n$ ,  $n \geq 0$ """
    if not isinstance(a, int) or n < 0 or not isinstance(n, int):
        return None

    if n == 0:
        return 1
    else:
        return a * power(a, n - 1)
```

Suma una lista de números

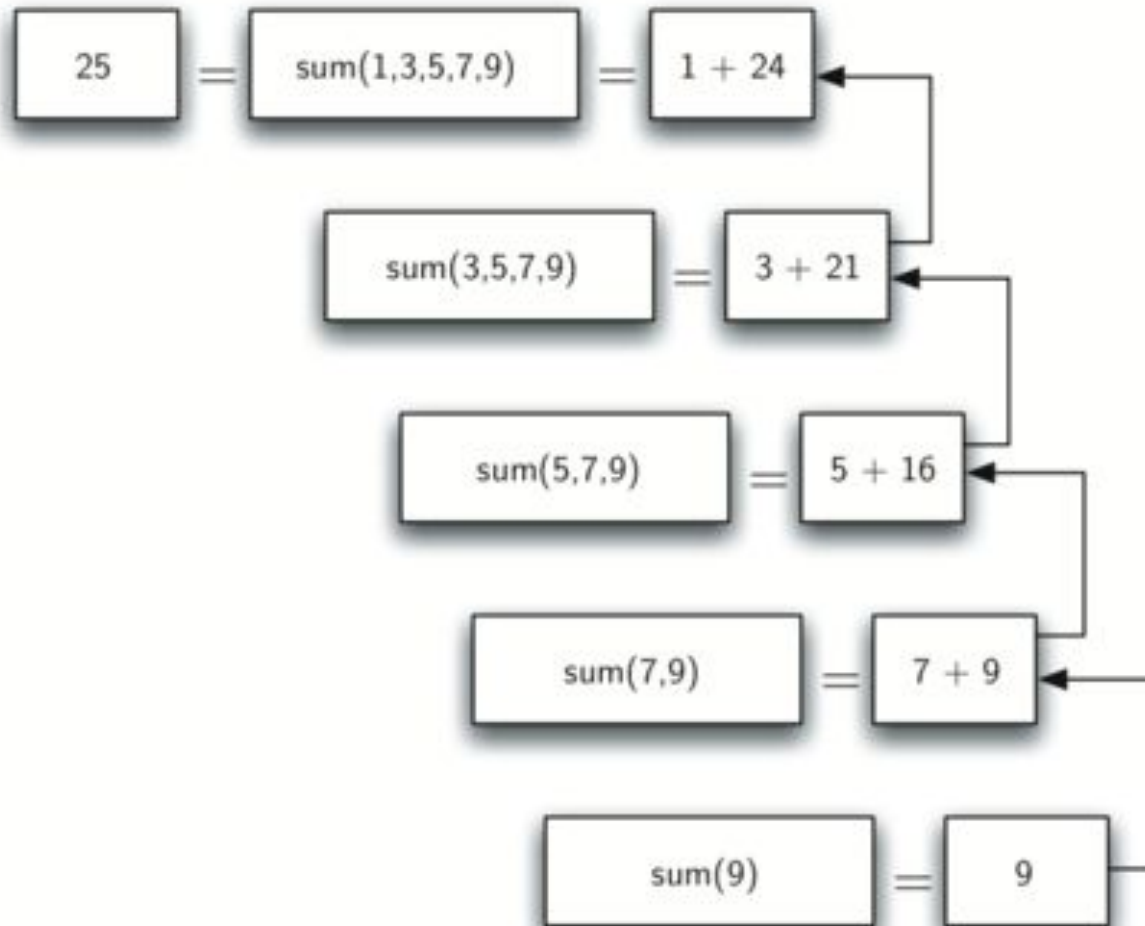
- Dada una lista de enteros [1,3,5,7,9], ¿cómo podemos obtener su suma usando recursión?

Suma una lista de números



Caso base

Suma una lista de números



Suma una lista de números

```
def sum_list(a: list) -> list:
    """Returns the sum of the elements in the list.
    In this solution, it is not allowed to update the input list,
    but you can use slice"""
    if a is None or not isinstance(a, list):
        return None

    if len(a) == 0:
        return 0
    else:
        return a[0] + sum_list(a[1:])
```

Suma una lista de números

- Ya hemos visto una solución basada en slicing que resuelve el problema usando recursión.
- Sin embargo, desde el punto de vista de complejidad espacial no es eficiente porque con cada llamada recursiva se está creando una nueva lista: `a[1:]`.
- Piensa en otras soluciones:
 - por ejemplo, modificando la lista.
 - sin modificar la lista y sin usar slicing.
- Solución

Invertir una lista

[8,5,3,4,1] -> [1,4,3,5,8]

Puede ser resuelto usando recursión lineal:

- guardando el primer elemento en una variable x.
- invirtiendo recursivamente la sublista data[1:]
- Por último, debes añadir x al final de la sublista invertida

Ejemplo 5: Invertir una lista

$[8,5,3,4,1] \rightarrow [1,4,3,5,8]$

Caso Base: Cuando el array está vacío o sólo tiene un elemento, su inversa es el mismo array.



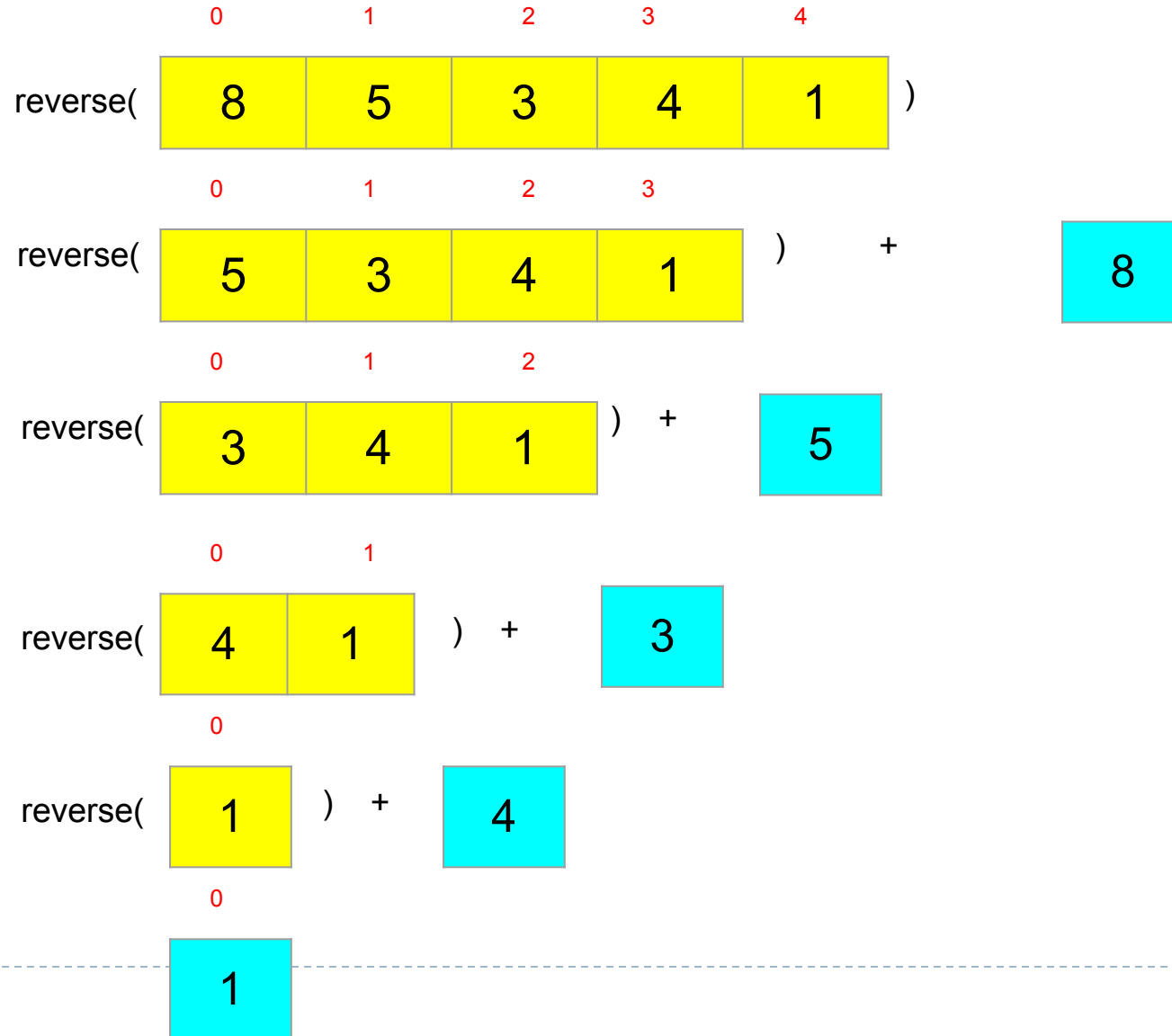
Invertir una lista

$[8,5,3,4,1] \rightarrow [1,4,3,5,8]$

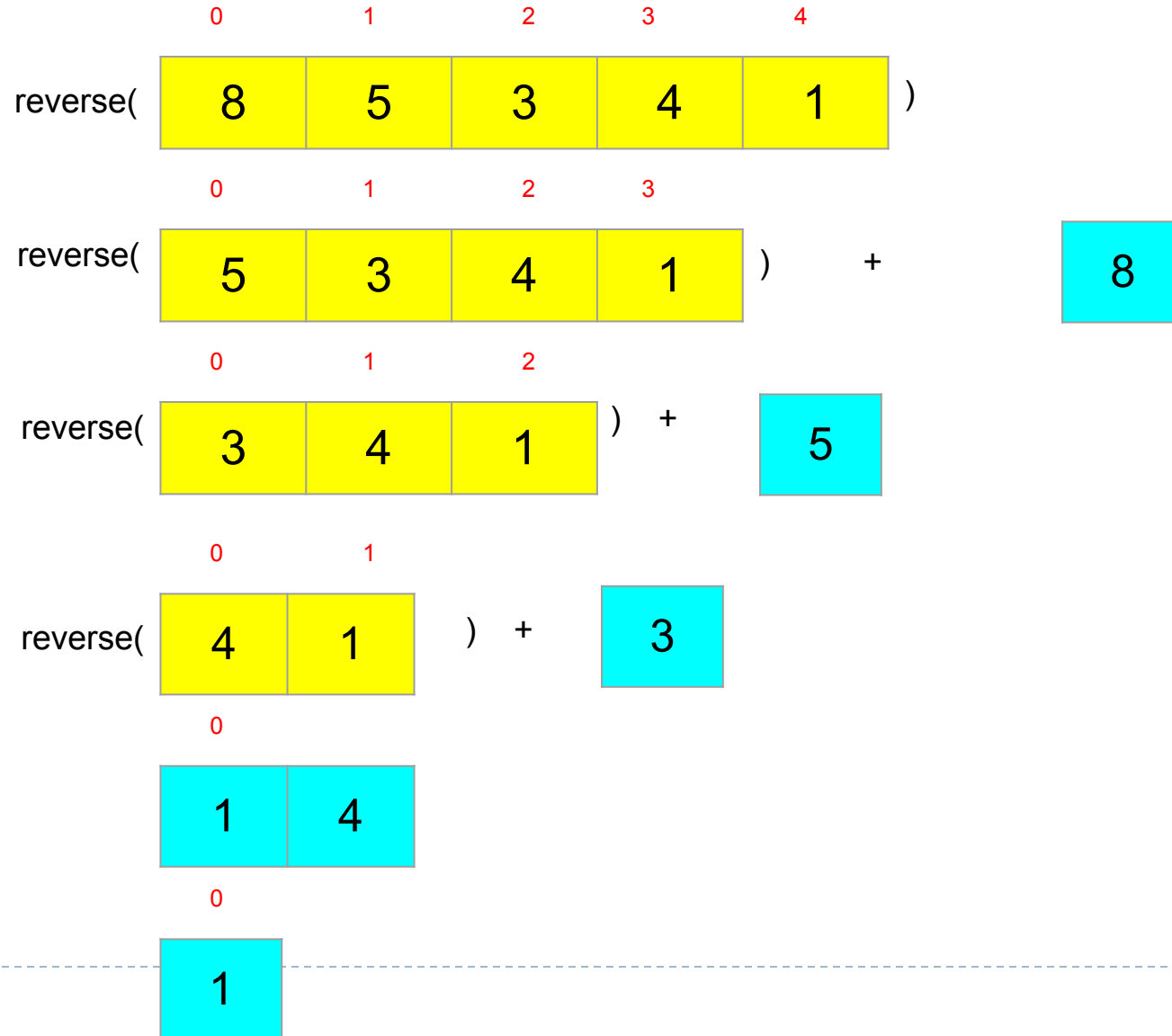
En el caso recursivo, podemos mover el primer elemento al final del array, e invertir el resto del array, recursivamente.



Invertir una lista



Invertir una lista



Invertir una lista

reverse(

0	1	2	3	4
8	5	3	4	1

)

reverse(

0	1	2	3
5	3	4	1

) +

8

reverse(

0	1	2
3	4	1

) +

5

0	1	2
1	4	3

0	
1	4

0
1



Invertir una lista

reverse(

8	5	3	4	1
---	---	---	---	---

)

reverse(

5	3	4	1
---	---	---	---

) +

8

1	4	3	5
---	---	---	---

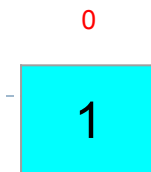
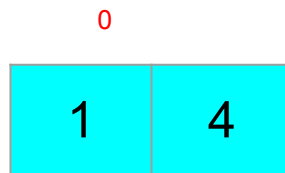
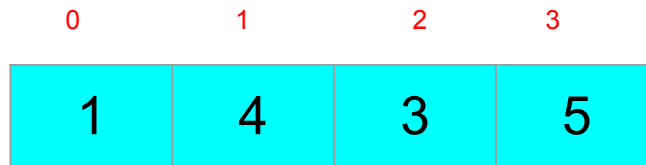
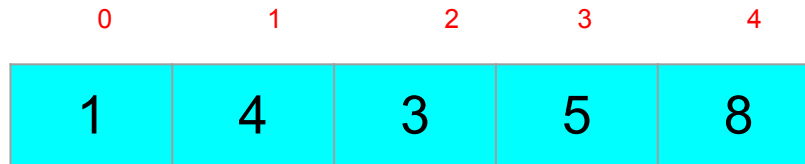
1	4	3
---	---	---

1	4
---	---

1

Invertir una lista

[8,5,3,4,1] -> [1,4,3,5,8]



Ejemplo 5: Invertir una lista

```
def reverse1(a: list) -> None:
    if a is None or not isinstance(a, list):
        return
    if len(a) >= 1:
        aux = a.pop(0)
        reverse1(a)
        a.append(aux)
```

Invertir una lista

- Piensa en una solución que no elimine ningún elemento de la lista.
- Sí está permitido intercambiar elementos en el array.

Invertir una lista (enfoque II)

Caso recursivo: intercambiar cambiando el primer y último elemento, e invertir el resto del array recursivamente.

Caso Base: la lista no tiene ningún elemento.

Solución

0	1	2	3	4
8	5	3	4	1
1	5	3	4	8
1	4	3	5	8
1	4	3	5	8



Ejemplo: Máximo común divisor

- Encontrar el entero mayor d que divida a a y b
- Algoritmo de Euclides algorithm (300 BCE).

$$\text{mcd}(a,b) = \begin{cases} a & \text{if } b=0 \\ \text{gcd}(b, a\%b) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{gcd}(4032, 1272) &= \text{gcd}(1272, 216) = \text{gcd}(216, 192) = \\ \text{gcd}(192, 24) &= \text{gcd}(24, 0) = 0 \end{aligned}$$

Recursión lineal: Máximo común divisor

```
def gcd(a: int, b: int) -> int:
    """returns the greatest common divisor of a and b"""
    if not isinstance(a, int) or a < 0 or not isinstance(b, int) or b < 0:
        return None # a, b must be >=0
    # suppose a > b, if a < b, we change
    if a < b:
        a, b = b, a
    return _gcd(a, b)
```

```
def _gcd(a: int, b: int) -> int:
    if b == 0:
        return a
    else:
        return gcd(b, a % b)
```

Recursión Binaria

- En alguno de los casos recursivos, se realizan dos llamadas recursivas.
- Estudiará dos ejemplos:
 - Números Fibonacci
 - Suma una lista de números usando recursión binaria.

Recursión Binaria: Números Fibonacci

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n=0 \\ 1 & \text{if } n=1 \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & \text{if } n>1 \end{cases}$$

Recursión Binaria: Números Fibonacci

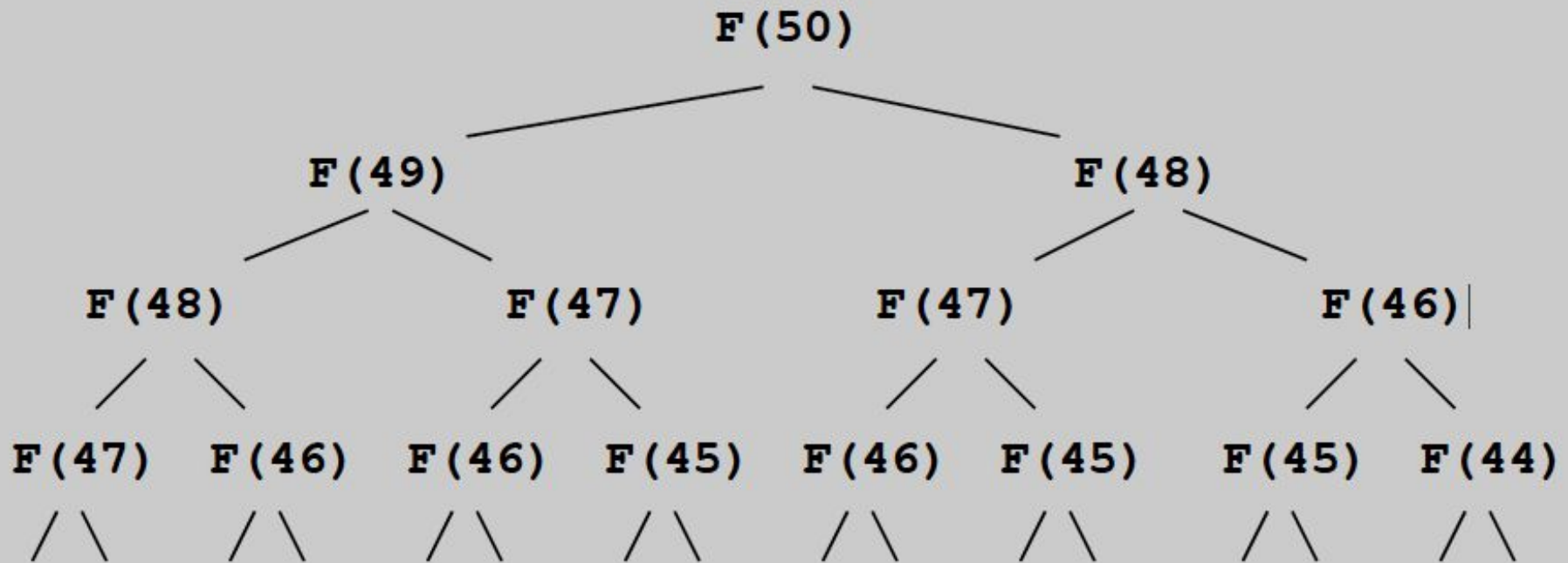
```
def fibo(n: int) -> int:
    if n < 0 or not isinstance(n, int):
        return None

    if n <= 1:
        return n
    else:
        return fibo(n - 1) + fibo(n - 2)
```

¿Es una forma eficiente de calcular fibo(50)?

Recursión Binaria: Números Fibonacci

No!!! Este código es espectacularmente ineficiente: $O(2^n)$



Una función más eficiente para Fibonnaci

```
def fibo2(n: int) -> (int, int):  
    """This implementation is more efficient than the previous one.  
    It returns a pair (x, y), where x is the Fibonacci number for n-1, and y for n"""  
    if n < 0 or not isinstance(n, int):  
        return None  
  
    if n <= 1:  
        # returns the fibonacci for 0 and for 1  
        return 0, n  
    else:  
        # a is the fibonacci number for n-2, b is the Fibonacci number for n-1  
        a, b = fibo2(n-1)  
        # Now, we have to return the Fibonacci number for n-1, and the Fibonacci number for n,  
        # which is a + b  
        return b, a + b
```

Recursión Binaria: sumar una lista de números

¿Cómo calcular la suma de los números de una lista usando recursión binaria?

Idea!!!: dividir en dos mitades, calcular la suma de la primera parte, calcular la suma de la segunda parte, y sumar estos resultados

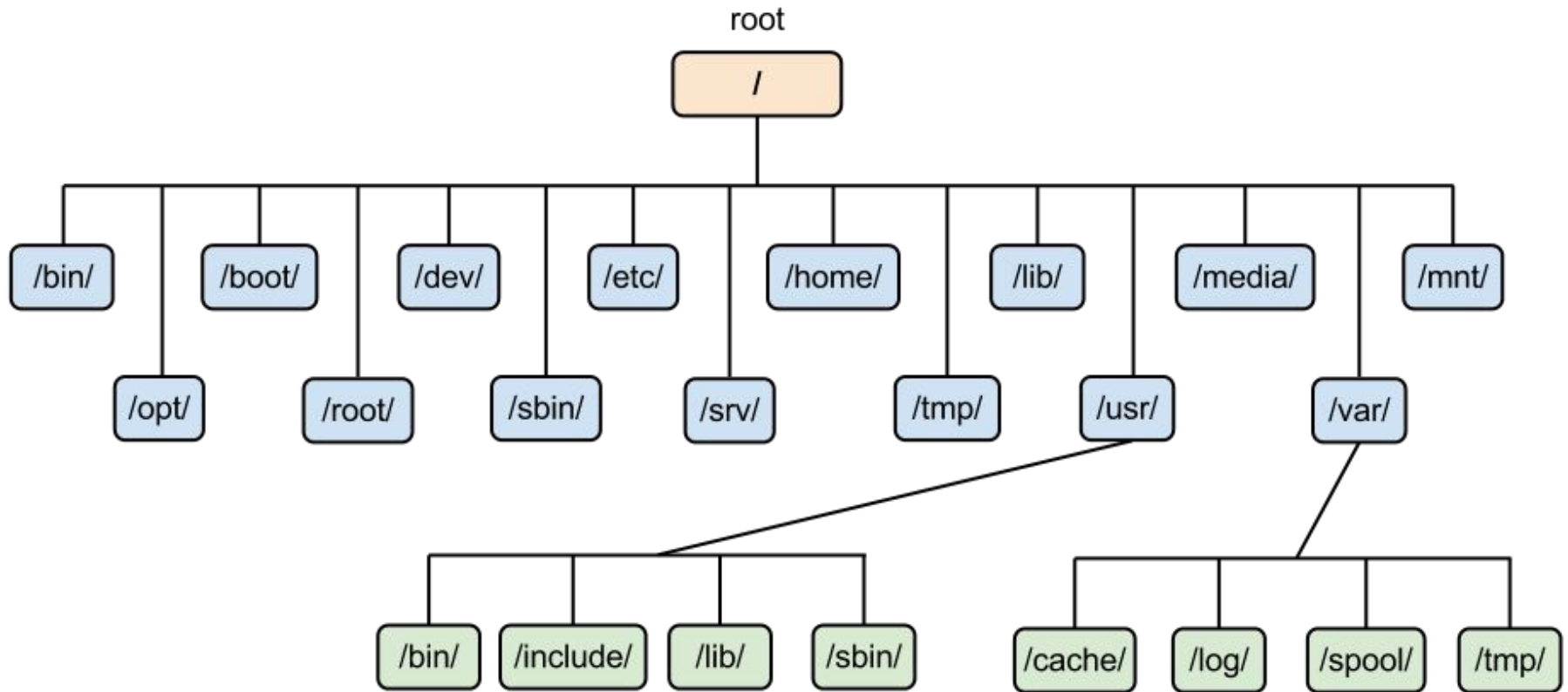
Recursión Binaria: sumar una lista de números

```
def binary_sum(a: list) -> int:
    """returns the sum of the elements in a by using
    binary recursion"""
    if a is None or not isinstance(a, list):
        return None
    if len(a) == 0:
        return 0
    else:
        m = len(a) // 2
        return binary_sum(a[0:m]) + a[m] + binary_sum(a[m+1:])
```

Recursión Múltiple

- En al menos uno de los casos recursivos, se realizará tres o más llamadas recursivas.
- Ejemplo: explorar el sistema de archivos puede resolverse usando recursión múltiple.

Recursión Múltiple: explorar sistema de archivos



Recursión Múltiple: explorar sistema de archivos

¿Cómo calcular el espacio en disco de un determinado directorio?. Te dejamos este pseudocódigo, para que trates de implementarlo en Python.

Algorithm DiskUsage(path):

Input: A string designating a path to a file-system entry

Output: The cumulative disk space used by that entry and any nested entries

total = size(path) {immediate disk space used by the entry}

if path represents a directory **then**

for each child entry stored within directory path **do**

 total = total + DiskUsage(child) {recursive call}

return total

Solución

Índice

- 1) ¿Qué es recursión?
- 2) Algunos ejemplos de recursión.
- 3) Tipos de recursión.
- 4) Iteración y Recursión**

Iteración y Recursión

- Un bucle también es un proceso repetitivo.
- Un método recursivo es una solución matemáticamente más elegante (y requiere menos líneas de código) que un bucle.
- A menudo, cuando implementamos fórmulas matemáticas (que suelen definirse con recursión), es mucho más fácil conseguir una solución recursiva que iterativa.
 - Calcular el tamaño o altura de un árbol (lo veremos en el tema 5).

Iteración y Recursión

- La recursión implica un mayor tiempo de ejecución y gasto de memoria principal, porque todos los resultados parciales (junto con los argumentos y variables locales de cada llamada recursiva) son almacenados en memoria en tiempo de ejecución.
- Si se encadenan muchas llamadas recursivas, es posible que se produzca un desbordamiento de memoria.

Iteración y Recursión

- **Todo algoritmo recursivo puede expresarse como iterativo y viceversa.**
- Sin embargo, según las condiciones del problema a resolver podrá ser preferible utilizar la solución recursiva o la iterativa.

*To iterate is human, to recurse,
divine*