

OpenCourseWare  
Protección Ligera de Sistema Móviles (PLSM)  
Tema 3A: Ondas elásticas

Jesús Pernas Sánchez  
José Alfonso Artero Guerrero  
Fernando Naya Montáns

Universidad Carlos III de Madrid



# Índice

Introducción

Estudio 1D: Propagación de ondas unidimensionales  
Intensidad de las ondas generadas en un impacto  
Reflexión y refracción de ondas  
Interferencia de ondas

Choque de Barras

Consideraciones adicionales

## Introducción

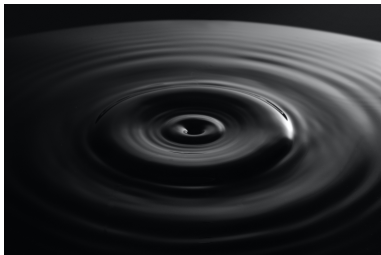


Figura: Ondas en la superficie de un fluido

Imagen de Julian Böck en Unsplash.

### Onda

propagación de una perturbación de alguna propiedad del espacio, por ejemplo, densidad, presión, campo eléctrico o campo magnético, implicando un transporte de **energía sin** transporte de **materia**. El espacio perturbado puede contener **materia** (aire, agua, etc) o no (vacío).

uc3m

Universidad  
Carlos III  
de Madrid





# Introducción

## Tipos de ondas

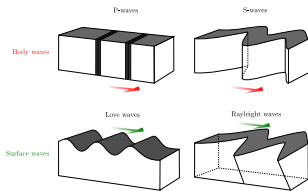
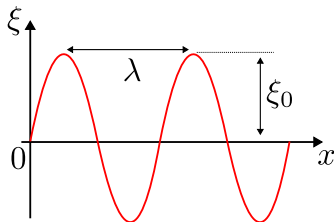


Figura: Tipos de ondas en medios continuos

- Ondas longitudinales o dilatacionales: Movimiento de las partículas es paralelo al frente de onda [▶ Link](#)
- Ondas transversales: Movimiento de las partículas es perpendicular al frente de onda [▶ Link](#)
- Ondas Love: son un tipo de ondas superficiales polarizadas horizontalmente. [▶ Link](#)
- Ondas de Rayleigh: son ondas superficiales elípticas. [▶ Link](#)



## Introducción



### Propiedades/Características de una onda

Amplitud Longitud de onda Frecuencia

$A$  o  $\zeta_0$

$\lambda$

$\omega = 2\pi c/\lambda$

$\omega = 2\pi f$

$f = 1/T$

## Introducción

**Estudio 1D: Propagación de ondas unidimensionales**  
Intensidad de las ondas generadas en un impacto  
Reflexión y refracción de ondas  
Interferencia de ondas

## Choque de Barras

## Consideraciones adicionales



## Estudio 1D del problema

Considérese el caso en el que una barra recibe un impacto y derivado de este se produce una onda en el material que acelera las partículas de la barra de 0 a  $v_0$ . Derivada de esta aceleración se produce un estado tensional que provoca un estado de esfuerzos axiales como los que se ven en la figura 5. De esta manera si aplicamos la primera ley de Newton a una sección de la barra:

$$F' - F = ma = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Siendo  $m$  la masa de la sección diferencial considerada ( $m \sim dm = \rho dx A$ ) y  $A$  la sección de la barra. Dado que  $F'$  puede ser considerado como  $F + dF$ :

$$dF = \rho dx A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Por lo que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

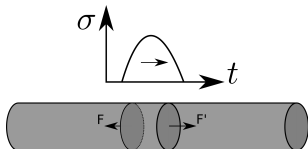


Figura: Equilibrio en una barra

## Estudio 1D del problema

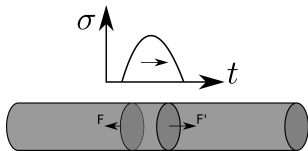


Figura: Equilibrio en una barra

Dado que estamos en un estado unidimensional y que la sección de la barra puede ser considerada constante entonces  $F = \sigma A$ . La sección contempla la propagación de ondas elásticas y por tanto la ley de Hooke  $\sigma = E\varepsilon$  siendo  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  lo que queda:

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow F/A = E \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow F = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

se extrae por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

Ecuación de propagación de las ondas elásticas en 1-D.

## Estudio 1D del problema

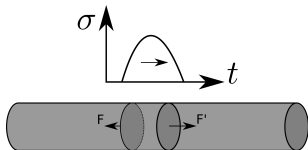


Figura: Equilibrio en una barra

### Ecuación Ondas 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Ecuación de propagación de las ondas elásticas en 1-D. De la cual se define  $c$  como la velocidad de propagación de las ondas en el material como:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

## Estudio 1D del problema

Generalización de la ecuación de ondas:

En un caso más general:

$E \rightarrow S = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  (Pendiente de la curva tensión deformación)

Por lo que nos queda<sup>1</sup>:

$$c_0 = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \sqrt{\frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \quad (6)$$

### Ecuación Ondas 1D

$$c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

Ecuación de propagación de las ondas en 1-D aplicable a estados de tensión **unideformacionales** y estados de tensión **unitensionales**. [4]

<sup>1</sup>Importante consideración para las ondas elastoplásticas



## Ejemplo $c_0$ unitensional

Analizando la propagación de las ondas/vibraciones producidas por un tren en las vías férreas, estas vibraciones mecánicas se propagan como ondas a lo largo de las vías del tren que están simplemente apoyadas. En este caso las vías férreas son libres de deformarse en todas las direcciones por lo que podemos suponer que sólo se propagan las ondas longitudinales



Figura: Vía Férrea

Imagen de Martin Winkler en Pixabay.

### Ecuación Ondas 1D

$$c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10)$$

**Sólo** se producirán tensiones en la dirección que viajan (Suponiendo 11 la dirección longitudinal). Por lo que:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo $c_0$ unitensional

Aplicando las leyes de Hooke para el acero (isótropo)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} = \gamma_{13} = \gamma_{23}$$

Simplificando nos queda:

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu_{12}}{E}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu_{12}}{E}\sigma_{11} \end{bmatrix}$$

## Ejemplo $c_0$ unitensional

Particularizando para la dirección longitudinal:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

Dado que:

$$c_0 = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \rightarrow S = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (11)$$

La Velocidad de Propagación de las ondas en dirección longitudinal será:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (12)$$

Que particularizando en el caso del acero  $E = 210 \text{ GPa}$  y  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ :

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5172,2 \text{ m/s} \quad (13)$$



## Ejemplo $c_0$ unideformacional

Supóngase ahora la propagación de las ondas en la ferralla de armado de un hormigón perteneciente a un pilar.

Estas vibraciones mecánicas se propagan como ondas a lo largo del acero embebido en el hormigón



Figura: Ferralla para hormigón armado

Imagen de Gabriel Trindade Caviglione en Pixabay.

En este caso el acero al estar embebido en el hormigón no es libre de deformarse en todas las direcciones por lo que, suponiendo exclusivamente que sólo se propagan las ondas longitudinales, **sólo** se producirán deformaciones en la dirección permitida 11 (la dirección longitudinal). Por lo que:

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

uc3m  
Universidad Carlos III de Madrid

## Ejemplo $c_0$ unideformacional

Aplicando las leyes de Hooke para el acero (isótropo)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

Obtenemos una relación entre las tensiones tal que:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} \Rightarrow \sigma_{22} = \sigma_{11} \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Simplificando nos queda:

$$T = \sigma_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \end{bmatrix}$$

## Ejemplo $c_0$ unideformacional

Particularizando para la dirección longitudinal:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)}$$

Dado que:

$$c_0 = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \rightarrow S = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (14)$$

La Velocidad de Propagación de las ondas en dirección longitudinal será:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad (15)$$

Que particularizando en el caso del acero  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  y  $\nu = 0,3$ :

$$c_0 = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} = 6000,97 \text{ m/s} \quad (16)$$

## Comparativa $c_0$ unidimensional vs unideformacional

- Unidimensional

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5172,2 \text{ m/s} \quad (17)$$

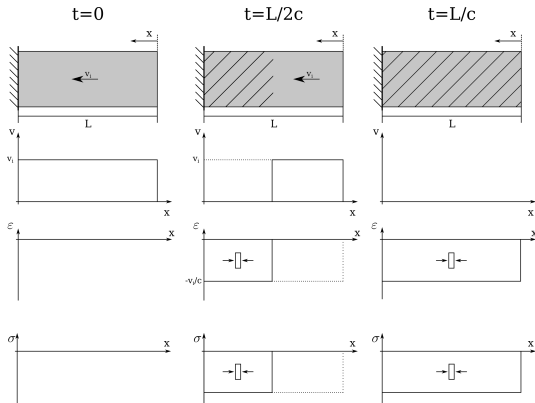
- Unideformacional

$$c_0 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} = 6000,97 \text{ m/s} \quad (18)$$



## Tensión y deformación inducidas en un impacto 1D

Supongamos proyectil cilíndrico viajando a una velocidad  $v = v_i$  ( $t = 0$ ) contra una pared rígida.



- En  $t = 0$  el proyectil viaja sin sufrir tensiones ni esfuerzos
- En  $t + dt = L/2c$  la mitad del proyectil está comprimido
- En  $t + dt = L/c$  el proyectil por completo está comprimido



## Tensión y deformación inducidas en un impacto 1D

De lo anterior también se puede deducir:

$$\varepsilon_f - \varepsilon_0 = -\frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{c}$$



## Introducción

### Estudio 1D: Propagación de ondas unidimensionales

Intensidad de las ondas generadas en un impacto

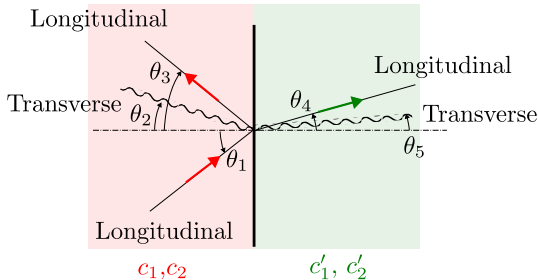
Reflexión y refracción de ondas

Interferencia de ondas

## Choque de Barras

## Consideraciones adicionales

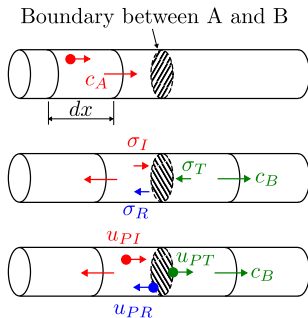
## Reflexión y refracción de ondas



$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_3}{c_3} = \frac{\sin \theta_4}{c'_1} = \frac{\sin \theta_5}{c'_2}$$

## Reflexión y refracción de ondas

Pero si simplificamos a  $\theta = 0$ .



## Reflexión y refracción de ondas

Suponiendo equilibrio de fuerzas:

$$F_I + F_R = F_T$$

siendo  $F_I$  la fuerza incidente,  $F_R$  la fuerza reflejada y  $F_T$  la fuerza transmitida.  
Expresado en tensiones:

$$\sigma_I A_A + \sigma_R A_A = \sigma_T A_B$$

Suponiendo que ambas barras tienen la misma sección:

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T$$

Suponiendo la continuidad/compatibilidad en la zona de contacto (contacto perfecto)

$$\vec{v}_I + \vec{v}_R = \vec{v}_T$$

donde  $u_P$  es la velocidad de la partícula, que puede ser considerada como la velocidad del material detrás del frente de onda.

## Reflexión y refracción de ondas

Asumiendo  $\vec{v}_0 = 0$  y  $\sigma_0 = 0$  se puede relacionar la velocidad de cada partícula con la tensión  $\sigma = -\rho \vec{c} \vec{v}_f$ :

$$\sigma_I = -\rho_A \vec{c}_A \vec{v}_I; \quad \sigma_T = -\rho_B \vec{c}_B \vec{v}_T; \quad \sigma_R = -\rho_A \overleftarrow{c}_A \vec{v}_R = \rho_A \vec{c}_A \vec{v}_R; \quad (20)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior nos queda:

### Reflexión de ondas

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2 \left( \frac{\rho_B |\vec{c}_B|}{\rho_A |\vec{c}_A| + \rho_B |\vec{c}_B|} \right) \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left( \frac{\rho_B |\vec{c}_B| - \rho_A |\vec{c}_A|}{\rho_A |\vec{c}_A| + \rho_B |\vec{c}_B|} \right) \quad (22)$$

## Reflexión y refracción de ondas

Cuadro: Ratio de intensidad de onda transmitida y reflejada en función de las propiedades elásticas de algunos materiales

Material A	Material B	$\rho_B$ (kg/m <sup>3</sup> )	$E_B$ (GPa)	$\sigma_T/\sigma_I$	$\sigma_R/\sigma_I$
Acero	Acero	7840	210	1	0
Acero	Aluminio (6082-T6)	2703	73	0.52	-0.48
Acero	Ti-6AL-4V	4400	114	0.71	-0.29
Acero	Tungsteno	19250	411	1.37	0.37

## Reflexión y refracción de ondas

La velocidad de las partículas puedes ser calculada de manera análoga:

### Reflexión de ondas

$$\frac{\vec{v}_T}{\vec{v}_I} = 2 \left( \frac{\rho_A |\vec{c}_A|}{\rho_A |\vec{c}_A| + \rho_B |\vec{c}_B|} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\vec{v}_R}{\vec{v}_I} = \left( \frac{\rho_A |\vec{c}_A| - \rho_B |\vec{c}_B|}{\rho_A |\vec{c}_A| + \rho_B |\vec{c}_B|} \right) \quad (24)$$

## Reflexión y refracción de ondas

Cuadro: Ratio de velocidad de onda transmitida y reflejada en función de las propiedades elásticas de algunos materiales

Material A	Material B	$\rho_B$ (kg/m <sup>3</sup> )	$E_B$ (GPa)	$\frac{v_T}{v_L}$	$\frac{v_R}{v_L}$
Acero	Acero	7840	210	1	0
Acero	Aluminio (6082-T6)	2703	73	1.49	0.49
Acero	Ti-6AL-4V	4400	114	1.29	0.29
Acero	Tungsteno	19250	411	0.63	-0.37



## Reflexión y refracción de ondas

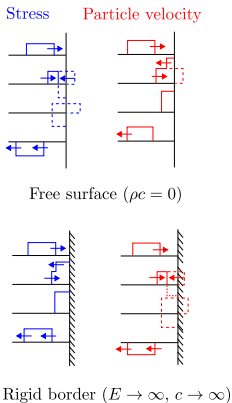


Figura: Superficie libre (imagen superior) vs. frontera rígida (imagen inferior)

Superficie libre  $\rho_B c_B = 0$

$$\sigma_T / \sigma_I = 0$$

$$\sigma_R / \sigma_I = -1$$

$$\frac{\vec{v}_T}{\vec{v}_I} = 2$$

$$\frac{\vec{v}_R}{\vec{v}_I} = 1$$

Frontera rígida  $E = \infty,$   
 $c = \infty$

$$\sigma_T / \sigma_I = 2$$

$$\sigma_R / \sigma_I = 1$$

$$\frac{\vec{v}_T}{\vec{v}_I} = 0$$

$$\frac{\vec{v}_R}{\vec{v}_I} = -1$$

## Reflexión y refracción de ondas: Secciones diferentes

Suponiendo equilibrio de fuerzas:

$$(\sigma_I + \sigma_R) A_I = \sigma_T A_T$$

Suponiendo la continuidad/compatibilidad en la zona de contacto (contacto perfecto)

$$\vec{v}_I + \vec{v}_R = \vec{v}_T$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior nos queda:

### Reflexión de ondas

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2 \left( \frac{\rho_B |\vec{c}_B| A_I}{\rho_A |\vec{c}_A| A_I + \rho_B |\vec{c}_B| A_T} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left( \frac{\rho_B |\vec{c}_B| A_T - \rho_A |\vec{c}_A| A_I}{\rho_A |\vec{c}_A| A_I + \rho_B |\vec{c}_B| A_T} \right) \quad (26)$$

## Reflexión y refracción de ondas: Secciones diferentes

Para las velocidades de la partícula:

### Reflexión de ondas

$$\frac{\vec{v}_T}{\vec{v}_I} = 2 \left( \frac{\rho_A |\vec{c}_A| A_I}{\rho_A |\vec{c}_A| A_I + \rho_B |\vec{c}_B| A_T} \right) \quad (27)$$

$$\frac{\vec{v}_R}{\vec{v}_I} = \left( \frac{\rho_A |\vec{c}_A| A_I - \rho_B |\vec{c}_B| A_T}{\rho_A |\vec{c}_A| A_I + \rho_B |\vec{c}_B| A_T} \right) \quad (28)$$

## Introducción

### Estudio 1D: Propagación de ondas unidimensionales

Intensidad de las ondas generadas en un impacto

Reflexión y refracción de ondas

Interferencia de ondas

## Choque de Barras

## Consideraciones adicionales



## Introducción

Estudio 1D: Propagación de ondas unidimensionales  
Intensidad de las ondas generadas en un impacto  
Reflexión y refracción de ondas  
Interferencia de ondas

## Choque de Barras

## Consideraciones adicionales

## Choque de barras

Considere el problema de dos barras (1 2) de la misma sección ( $s = s_1 = s_2$ ) pero de materiales diferentes ( $\rho_1 \neq \rho_2$  y  $E_1 \neq E_2$ ) viajando a  $v_1 < v_2$  en el mismo sentido, tal y como se aprecia en la figura.

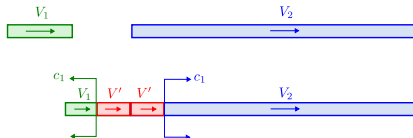
Una vez entran en contacto ( $0 < t < L_1/c$ ), la zona sombreada (afectada por el pulso) pasa a tener una velocidad  $v'$ .

Aplicando la 2 ley de Newton, igualando impulso a cantidad de movimiento podemos llegar a:

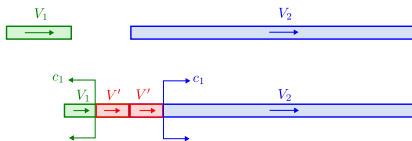
$$\sigma_1 = -\rho_1 \vec{c}_1 (\vec{v}_{1,f} - \vec{v}_{1,0}) \quad \sigma_2 = -\rho_2 \vec{c}_2 (\vec{v}_{2,f} - \vec{v}_{2,0}) = \rho_2 \vec{c}_2 (\vec{v}_{2,f} - \vec{v}_{2,0})$$

con  $(\vec{v}_{1,f} - \vec{v}_{1,0}) = \vec{v}' - \vec{v}_1$  y  $(\vec{v}_{2,f} - \vec{v}_{2,0}) = \vec{v}' - \vec{v}_2$  Por equilibrio en la frontera y dado que las secciones son iguales del equilibrio en fuerzas pasamos a:

$$\sigma_1 = \sigma_2$$



## Choque de barras



Por lo que se pueden obtener las velocidades y tensión generada en las barras:

$$\vec{v} = \frac{\rho_1 |\vec{c}_1| \vec{v}_1 + \rho_2 |\vec{c}_2| \vec{v}_2}{\rho_1 |\vec{c}_1| + \rho_2 |\vec{c}_2|} \quad \sigma = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{1/\rho_1 |\vec{c}_1| + 1/\rho_2 |\vec{c}_2|}$$

En el caso de que los materiales fuesen iguales las expresiones anteriores se simplifican:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} \quad \sigma = \rho |\vec{c}| \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2}$$

Por ultimo si la barra 1 se encontrase en reposo ( $v_1 = 0$ ):

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_2}{2} \quad \sigma = -\rho |\vec{c}| \frac{|\vec{v}_2|}{2} = -\rho |\vec{c}| |\vec{v}|$$









## Introducción

Estudio 1D: Propagación de ondas unidimensionales  
Intensidad de las ondas generadas en un impacto  
Reflexión y refracción de ondas  
Interferencia de ondas

## Choque de Barras

## Consideraciones adicionales





## Bibliografía



Marc André Meyers.  
Dynamic behaviour of materials.  
*Wiley and sons*, 1994.



Johnson W.  
Impact strength of materials.  
*Edward Arnold*, 1972.



Jonas A. Zukas.  
Impact dynamics.  
*Wiley*, 1982.



Jonas A. Zukas.  
High velocity impact dynamics.  
*Wiley*, 1990.

