OpenCourseWare. Protección Ligera de Sistemas Móviles. Ejercicios Tema 2.

1. Un punto de un cuerpo deformable dúctil está sometido a un estado tensional cuya matriz asociada, en un sistema de referencia cartesiano, es $\begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ MPa Si se sabe que el límite elástico es $\sigma_y = 80$ MPa, obtenga el factor de seguridad del estado tensional anterior según el criterio de Tresca y de Von Mises.

Solution: Se calculan las tensiones principales: $\sigma_1 = 26{,}18$ MPa, $\sigma_2 = 15$ MPa y $\sigma_1 = 3{,}81$ MPa. Se aplica los criterios de Tresca y Von Mises y se calculan el coeficiente de seguridad:

$$n_{Tr} = \frac{\sigma_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = 3{,}58$$

$$n_{VM} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3J_2}} = 4{,}13$$

2. Un material está sometido a una compresion en un eje, estando confinado lateralmente en los otros dos ejes. Obtenga la tensión a la que plastifica usando el criterio de Tresca y el de Von Mises si $\sigma_y = 350$ MPa y sus propiedades elásticas son ($E = 210$ GPa y $\nu = 0{,}3$). Compárelo con el caso en el que no está confinado.

Solution: Se calculan las tensiones debido a la compresión confinada ($\sigma_z = -p$, $\sigma_x = \frac{-\nu p}{1-\nu}$ y $\sigma_y = \frac{-\nu p}{1-\nu}$). éstas dos últimas se calculan aplicando las leyes de Hooke, sabiendo que $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ al estar confinada. Ya que no hay tensiones tangenciales, éstas son principales. Y por tanto se aplica los criterios de Tresca y Von Mises y se calculan la P que produce la plastificación:

$$P_{Tr} = \frac{\sigma_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = 611{,}88 \text{ MPa}$$

$$P_{VM} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3J_2}} = 611{,}88 \text{ MPa}$$

3. Una empresa necesita elegir entre dos aluminios. El aluminio A tienes las siguientes propiedades ($E = 71$ GPa, $\nu = 0{,}3$, $A = 280$ MPa y $B = 2$ GPa) mientras que el aluminio B ($E = 71$ GPa, $\nu = 0{,}3$, $A = 250$ MPa y $B = 1$ GPa) . Para asegurar una buena decisión, se va a estudiar las deformaciones plásticas generadas. Para ello se va a usar una probeta de 200 mm a la que se va a alargar 0,2 mm. En estas condiciones obtenga si el material tiene una curva de tensión deformación $\sigma_y = A + B\varepsilon_p$

- ¿Alguno de los dos va a plastificar?
- En el caso de que no haya deformaciones plásticas, ¿Cuál es la máxima elongación?
- En un segundo test la elongación es de 0,9 mm. Calcule el estado tensional y deformacional de la probeta en este caso

Solution:

- Por definición, y asumiendo pequeña deformación, la deformación ingenieril es $e = \frac{\Delta l}{l_0} = 0{,}001$.
- $\sigma = E\varepsilon = 71\ MPa$. Por lo tanto, ya que este valor es menor que los límites elásticos de ambos materiales ninguno plastifica.
- Asumiendo pequeñas deformaciones, $\Delta l = el_0$. Para el material A $e = \varepsilon = \frac{\sigma_{y0}}{E} = \frac{A}{E} = \frac{280\ Mpa}{71\ GPa} = 3{,}94 \cdot 10^{-3}$ y por tanto $\Delta l = 0{,}78mm$. Para el material B $e = \frac{A}{E} = \frac{250\ Mpa}{71\ GPa} = 3{,}52 \cdot 10^{-3}$ y por tanto $\Delta l = 0{,}71mm$
- Con $0{,}9mm$ de elongación ambos materiales plastifican. Por tanto la ley constitutiva a usar es en el régimen plástico. Sabiendo que la deformación total es igual a la plástica más la elástica $\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e$ y que $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ siempre. Se puede expresar la ley constitiva en términos de tensión versus deformación total (sustituyendo $\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$):

$$\sigma_y = \frac{A + B\varepsilon}{1 + B/E}$$

. Así si $\varepsilon = e = \frac{\Delta l}{l_0} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$, para el material A $\sigma_y = 281{,}06\ MPa$ y para el B $\sigma_y = 250{,}9\ MPa$

4. En el punto de mayores esfuerzos de una estructura se ha evaluado el tensor de esfuerzos $\sigma_x = 125MPa$; $\tau_{xy} = 65MPa$; $\sigma_y = -20MPa$; siendo el resto de las componentes del tensor nulas. Se supone que el material de la estructura se comporta de forma elástico-lineal hasta que plastifica ($\sigma_y = 300\ MPa$). Determine el factor de seguridad frente a plastificación suponiendo el criterio de Tresca y el criterio de Von Mises

Solution: Se calculan las tensiones principales: $\sigma_1 = 149{,}87\ MPa$, $\sigma_2 = 0\ MPa$ y $\sigma_1 = -44{,}87\ MPa$. Se aplica los criterios de Tresca y Von Mises y se calculan el coeficiente de seguridad:

$$n_{Tr} = \frac{\sigma_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = 1{,}54$$

$$n_{VM} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3J_2}} = 1{,}7$$

5. Una pieza prismática metálica está sometida a una presión p en la dirección del eje z y a una tensión tangencial $\tau_{yz} = p/2$. La pieza tiene impedida la deformación en la dirección del eje x. Halla el valor de p para el que se produce la plastificación del metal si $\sigma_y = 330MPa$ y $\nu = 0{,}3$ usando el criterio de Von Mises.

Solution: Se calculan las tensiones debido a la compresión confinada en un solo eje $\sigma_z = -p$, $\sigma_x = -\nu p$ y $\sigma_y = 0$. Teniendo en cuenta además que $\tau_{yz} = p/2$ y aplicando el criterios de Von Mises en los ejes XYZ, se calcula la P que produce la plastificación

$$P_{VM} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3J_2}} = 265{,}92\ MPa$$

6. Un punto de un cuerpo deformable dúctil está sometido las siguientes tensiones principales máximas y mínimas ($\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_3 = 10MPa$). Siendo $\sigma_y = 10\ MPa$ y usando el criterio de Tresca:

   - Obtenga el valor de σ que produce la plastificación
   - Si $\sigma_3 = -10MPa$, obtenga el valor de σ que produce la plastificación
   - Si $\sigma_3 = -20MPa$, obtenga el valor de σ que produce la plastificación
   - Dibuje de manera aproximada para cada uno de los casos anteriores en el plano de tensiones normales-tensiones tangenciales sus respectivos círculos de Mohr, así como la curva que define el criterio de Tresca.

Solution:

- Usando el criterio de Tresca y despejando $\sigma_1 = \sigma_y + \sigma_3$. Por tanto $\sigma_1 = 20MPa$
- Usando el criterio de Tresca y despejando $\sigma_1 = \sigma_y + \sigma_3$. Por tanto $\sigma_1 = 0MPa$
- Usando el criterio de Tresca y despejando $\sigma_1 = \sigma_y + \sigma_3$. Por tanto $\sigma_1 = -10MPa$

7. Un punto de un cuerpo deformable frágil está sometido las siguientes tensiones principales máximas y mínimas ($\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_3 = 10MPa$). Siendo $\sigma_{rt} = 10\ MPa$ y $|\sigma_{rc}| = 40\ MPa$ y usando el criterio de Mohr-Coulomb:

   - Obtenga el valor de σ que produce el fallo
   - Si $\sigma_3 = -10MPa$, obtenga el valor de σ que produce el fallo
   - Si $\sigma_3 = -20MPa$, obtenga el valor de σ que produce el fallo

- Dibuje de manera aproximada para cada uno de los casos anteriores en el plano de tensiones normales-tensiones tangenciales sus respectivos círculos de Mohr, así como la curva que define el criterio de Mohr-Coulomb.

Solution:

- Usando el criterio de Mohr-Coulomb y despejando $\sigma_1 = \sigma_{rt} + \frac{\sigma_{rt}}{|\sigma_{rc}|}\sigma_3$. Por tanto $\sigma_1 = 12{,}5MPa$
- Usando el criterio de Mohr-Coulomb y despejando $\sigma_1 = \sigma_{rt} + \frac{\sigma_{rt}}{|\sigma_{rc}|}\sigma_3$. Por tanto $\sigma_1 = 7{,}5MPa$
- Usando el criterio de Mohr-Coulomb y despejando $\sigma_1 = \sigma_{rt} + \frac{\sigma_{rt}}{|\sigma_{rc}|}\sigma_3$. Por tanto $\sigma_1 = 5MPa$

8. Un punto de un cuerpo deformable frágil está sometido a un estado tensional cuya matriz asociada, en un sistema de referncia cartesiano, es $\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 10 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ MPa Si se sabe que el la tensión de rotura es $\sigma_{rt} = 10MPa$ y $|\sigma_{rc}| = 40MPa$, obtenga el factor de seguridad del estado tensional anterior según el criterio de Mohr y Drucker-Prager.

Solution: Se calculan las tensiones principales: $\sigma_1 = 2\ MPa$, $\sigma_2 = -2{,}19\ MPa$ y $\sigma_1 = -22{,}81\ MPa$. Se aplica los criterios de Mohr-Coulmon y Drucker-Prager y se calculan el coeficiente de seguridad:

$$n_{MC} = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_{rt}}{|\sigma_{rc}|}\sigma_3} = 1{,}29$$

$$n_{DP} = \frac{\frac{2|\sigma_c|\sigma_t}{|\sigma_c|+\sigma_t}}{\sqrt{3J_2} + 3\frac{|\sigma_c|-\sigma_t}{|\sigma_c|+\sigma_t}p} = 1{,}73$$

9. Una lámina de material compuesto está sometido a las siguientes tensiones en función de una carga P desconocida ($\sigma_{11} = -1551{,}25P\ Pa$, $\sigma_{22} = 47{,}375P\ Pa$ y $\tau_{12} = 0\ Pa$). Si $X_T = 1410\ MPa$, $|X_C| = 280\ MPa$, $Y_T = 28\ MPa$, $|Y_C| = 141\ MPa$ y $S = 45MPa$, obtenga la carga P que produce el fallo usando el criterio de tensiones máximas y Tsai Hill.

Solution: Para los criterios de tensiones máximas $\frac{-1551{,}25P}{280MPa} = 1$ por lo que $P = 180000$, $\frac{47{,}375P}{28MPa} = 1$ por lo que $P = 591000$. La carga que produce el fallo es por tanto la mínima $P = 180000$.
Para el criterio de Tsai Hill

$$\frac{(-1551{,}25P)^2}{280MPa^2} + \frac{(47{,}375P)^2}{28MPa^2} - \frac{-1551{,}25P47{,}375P}{1410\ MPa280\ MPa} = 1$$

por lo que $P = 172151$

10. Un laminado de material compuesto está formado por la siguiente secuencia de apilamiento $[0/90]_{3S}$. La lámina de 0° tiene las siguientes tensiones en función de una carga P desconocida ($\sigma_{11} = 0{,}474P\ MPa$, $\sigma_{22} = 0{,}015P\ MPa$ y $\tau_{12} = 0\ MPa$) y la lámina de 90° ($\sigma_{11} = -0{,}021P\ MPa$, $\sigma_{22} = 0{,}083P\ MPa$ y $\tau_{12} = 0\ MPa$). Si $X_T = |X_C| = 1062\ MPa$, $Y_T = |Y_C| = 31\ MPa$ y $S = 72MPa$, obtenga la carga P que produce el fallo así como la lámina en la que se produce usando el criterio de Tsai-Hill.

Solution: Para la lámina de 0° el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(0{,}474P)^2}{1062^2} + \frac{(0{,}015P)^2}{31^2} - \frac{0{,}474 \cdot 0{,}015P^2}{1062^2} = 1$$

por lo que $P = 1530$ Para la lámina de 90° el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(-0{,}021P)^2}{1062^2} + \frac{(0{,}083P)^2}{31^2} - \frac{-0{,}021 \cdot 0{,}083P^2}{1062^2} = 1$$

por lo que $P = 373$.La carga que produce el fallo es por tanto la mínima $P = 373$ y se produce en la lámina de 90°.

11. Un laminado de material compuesto está formado por la siguiente secuencia de apilamiento $[0/90]_S$. El punto superior de la lámina superior de 0° tiene las siguientes tensiones en función de una carga P desconocida ($\sigma_{11} = -3048{,}9P\ Pa$, $\sigma_{22} = -45{,}32P\ Pa$ y $\tau_{12} = 0\ Pa$) y el punto superior de la lámina superior de 90° ($\sigma_{11} = 158{,}4P\ Pa$, $\sigma_{22} = -127{,}88P\ Pa$ y $\tau_{12} = 0\ Pa$). Las inferiores de 0° y 90° tienen las mismas tensiones pero con el signo invertido. Si $X_T = 2580\ MPa$, $|X_C| = 1820\ MPa$, $Y_T = 115\ MPa$, $|Y_C| = 226\ MPa$ y $S = 82MPa$, obtenga la carga P que produce el fallo así como la lámina en la que se produce usando el criterio de Tsai-Hill.

Solution: Para la lámina de 0° superior el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(-3048{,}9P)^2}{1820MPa^2} + \frac{(-45{,}32P)^2}{226MPa^2} - \frac{3048{,}9 \cdot 45{,}32P^2}{2580MPa \cdot 1820MPa} = 1$$

por lo que $P = 595792$. Para la lámina de 0° inferior el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(3048{,}9P)^2}{2580MPa^2} + \frac{(45{,}32P)^2}{115MPa^2} - \frac{3048{,}9 \cdot 45{,}32P^2}{2580MPa \cdot 1820MPa} = 1$$

por lo que $P = 810468$. Para la lámina de 90° superior el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(158{,}4P)^2}{2580MPa^2} + \frac{(-127{,}88P)^2}{226MPa^2} - \frac{-158{,}4 \cdot 157{,}88P^2}{2580MPa \cdot 1820MPa} = 1$$

por lo que $P = 1745386$. Para la lámina de 90° inferior el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(-158{,}4P)^2}{1820MPa^2} + \frac{(127{,}88P)^2}{115MPa^2} - \frac{-158{,}4 \cdot 157{,}88P^2}{2580MPa \cdot 1820MPa} = 1$$

por lo que $P = 894988$. La carga que produce el fallo es por tanto la mínima $P = 595792$ y se produce en la lámina de 0° superior.

12. Un laminado de material compuesto está formado por la siguiente secuencia de apilamiento $[0/90]_S$. El punto superior de la lámina superior de 0° tiene las siguientes tensiones ($\sigma_{11} = 600\ MPa$, $\sigma_{22} = 40\ MPa$ y $\tau_{12} = 0\ Pa$) y el punto superior de la lámina superior de 90° ($\sigma_{11} = 425\ MPa$, $\sigma_{22} = 29\ MPa$ y $\tau_{12} = 0\ Pa$). Si $X_T = 3500\ MPa$, $|X_C| = 1540\ MPa$, $Y_T = 56\ MPa$, $|Y_C| = 150\ MPa$ y $S = 70\ MPa$, obtenga el coeficiente de seguridad de cada una de las láminas y del laminado usando el criterio de Tsai-Hill.

Solution: Para la lámina de 0° superior el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(600)^2}{3500^2} + \frac{(40)^2}{56^2} - \frac{600 \cdot 40}{3500MPa \cdot 1540MPa} = 1/(n^2)$$

por lo que $n = 1{,}36$. Para la lámina de 90° superior el criterio de Tsai Hill es

$$\frac{(425)^2}{3500^2} + \frac{(29)^2}{56^2} - \frac{425 \cdot 29}{3500MPa \cdot 1540MPa} = 1/(n^2)$$

por lo que $n = 1{,}89$. Por lo tanto el factor de seguridad es del laminado es el mínimo de todos, en este caso $n = 1{,}36$.

13. Un laminado de material compuesto está formado por la siguiente secuencia de apilamiento $[0/90]_S$. El estado tensional en el laminado está definido por las siguientes ecuaciones $\sigma_{xx} = -87{,}5z\ [MPa]$, $\sigma_{yy} = 6{,}25z\ [MPa]$ y $\tau_{xy} = 0\ MPa$. **Z** es el eje en la dirección del espesor con el origen en el plano medio y expresado en mm. Los ejes **x** e **y** representan los ejes **1** (dirección de las fibras) y **2** (dirección transversal a las fibras) para las láminas de 0° , caso contrario en las láminas de 90° . Obtenga:

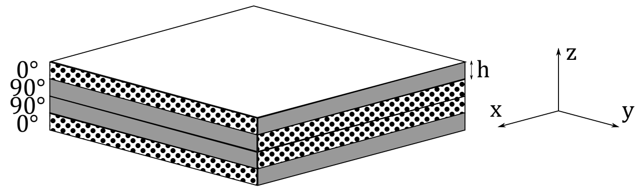

Figura 1: Imagen 3D

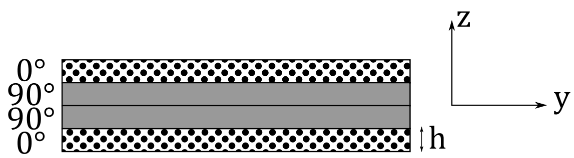

Figura 2: Imagen lateral

- El estado tensional en los puntos z=2h, z=h, z=0 mm, z=-h y z=-2h.
- El coeficiente de seguridad de cada una de las láminas usando el criterio de Tsai-Hill.

$$F \equiv \frac{\sigma_{11}^2}{X^{*2}} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^{*2}} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X_T|X_C|} - 1 = 0$$

$X^* = X_T$ cuando $\sigma_{11} > 0$ $\quad$ $Y^* = Y_T$ cuando $\sigma_{22} > 0$
$X^* = |X_C|$ cuando $\sigma_{11} < 0$ $\quad$ $Y^* = |Y_C|$ cuando $\sigma_{22} < 0$

- El coeficiente de seguridad del laminado.

Datos: $h = 0{,}4mm$ (espesor de la lámina), $X_T = 3500\ MPa$, $|X_C| = 1540\ MPa$, $Y_T = 56\ MPa$, $|Y_C| = 150\ MPa$ y $S = 70\ MPa$.

Solution: Los puntos críticos son las zonas más alejadas del plano medio de cada una de las láminas. Es decir para la de 0° superior z=0.8mm, para la de 90° superior z=0.4mm, para la de 90° inferior z=-0.4mm y para la de 0° inferior z=-0.8mm. Las tensiones y el coeficiente de seguridad en cada lámina (Aplicando Tsai-Hill) son

- 0° superior z=0.8mm. $\sigma_{11} = -70\ MPa$, $\sigma_{22} = 5MPa$ y $\tau_{12} = 0\ MPa$. El coeficiente de seguridad $n = 9{,}94$
- 90° superior z=0.4mm. $\sigma_{11} = 2{,}5\ MPa$, $\sigma_{22} = -35MPa$ y $\tau_{12} = 0\ MPa$. El coeficiente de seguridad $n = 4{,}28$
- 90° inferior z=-0.4mm. $\sigma_{11} = -2{,}5\ MPa$, $\sigma_{22} = 35MPa$ y $\tau_{12} = 0\ MPa$. El coeficiente de seguridad $n = 1{,}59$
- 0° inferior z=-0.8mm. $\sigma_{11} = 70\ MPa$, $\sigma_{22} = -5MPa$ y $\tau_{12} = 0\ MPa$. El coeficiente de seguridad $n = 25{,}19$

El l coeficiente de seguridad del laminado es $n = 1{,}59$. No hay ninguna lámina que llegue a fallo ni por ello el laminado. En cualquier caso, la más cercano al fallo sería la de 90° inferior, que fallaría con $\sigma_{xx} = -139{,}13z$ $[MPa]$ y $\sigma_{yy} = 9{,}94z$ $[MPa]$