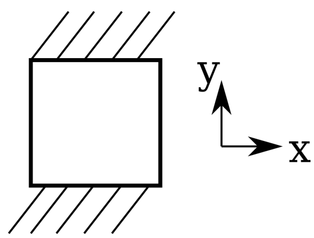
OpenCourseWare. Protección Ligera de Sistemas Móviles. Ejercicios Tema 3A.

1. Calcule el tiempo que tardará en recorrer una onda una barra de 1 m de acero en direccón z (perpendicular al plano del papel) . Si en esta los desplazamientos están impedidos en dirección y, tal y como muestra la figura. ($E = 210GPa$, $\nu = 0,3$ y $\rho = 7850kg/m^3$) (Examen Parcial 2016)

Solution: $\varepsilon_y = 0$ al estar impedida y $\sigma_x = 0$ por ser superficie libre. De las leyes de Hooke sale que $\sigma_y = -\nu\sigma_z$. Por tanto, $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z(1-\nu^2)$. $c = \sqrt{\frac{E/(1-\nu^2)}{\rho}} = 5422\ m/s$ $t = L/c = 1/5422 = 184\mu s$



2. Dado una protección formada por acero y aluminio, la placa de acero es sometida a un impacto que produce una onda de compresión de intensidad de 100 MPa.
   - Calcule la magnitud de la onda transmitida en el aluminio y reflejada en el acero.
   - ¿Y si la placa trasera fuera de tungsteno?

Solution:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}| + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|}\right) \quad (1)$$

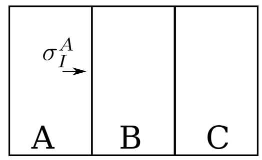
$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}| - \rho_A|\overrightarrow{c_A}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}| + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|}\right) \quad (2)$$

$$\sigma_I = -100MPa$$

1. $\sigma_T = 0{,}52\sigma_I = -52\ MPa \qquad \sigma_R = -0{,}48\sigma_I = 48\ MPa$
2. $\sigma_T = 1{,}37\sigma_I = -137\ MPa \qquad \sigma_R = 0{,}37\sigma_I = -37\ MPa$

3. Por el material A de la figura viaja una onda de compresión (σ_I^A) que incide sobre el material B, generando una onda que a su vez incidirá sobre el material C. Calcule la

magnitud de las ondas transmitidas y reflejadas en B y C. Suponga conocidas la densidad, el modulo de Young del material A y la magnitud de la onda incidente en A (ρ_A, E_A y σ_I^A).



Suponga:

- Material B: $\rho_B = \rho_A$ y $E_B = E_A/4$
- Material C: $\rho_C = 2\rho_A$ y $E_C = 2E_A$

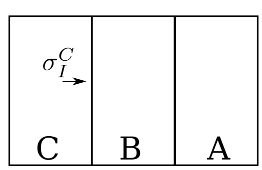
Solution:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}| + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}| - \rho_A|\overrightarrow{c_A}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}| + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|}\right) \tag{4}$$

Si $\sigma_I = -|\sigma_I|$ Del material A al B $\sigma_T = -0{,}67|\sigma_I|$ $\sigma_R = 0{,}33|\sigma_I|$
Del material B al C $\sigma_T = 1{,}6\sigma_I = 1{,}6(0{,}67\sigma_I) = -1{,}067|\sigma_I|$ $\sigma_R = 0{,}6\sigma_I = 0{,}6(0{,}67\sigma_I) = -0{,}4|\sigma_I|$

4. Por el material C de la figura viaja una onda de compresión (σ_I^C) que incide sobre el material B, generando una onda que a su vez incidirá sobre el material A. Calcule la magnitud de las ondas transmitidas y reflejadas en B y A. Suponga conocidas la densidad, el modulo de Young del material A y la magnitud de la onda incidente en C (ρ_A, E_A y σ_I^C).



- Material B: $\rho_B = \rho_A$ y $E_B = E_A/4$
- Material C: $\rho_C = \rho_A$ y $E_C = 4E_A$

Solution:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}| + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}| - \rho_A|\overrightarrow{c_A}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}| + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|}\right) \tag{6}$$

Si $\sigma_I = -|\sigma_I|$ Del material C al B $\sigma_T = -0{,}4|\sigma_I|$ $\sigma_R = 0{,}6|\sigma_I|$
Del material B al A $\sigma_T = 1{,}33\sigma_I = 1{,}33(0{,}4\sigma_I) = -0{,}532|\sigma_I|$ $\sigma_R = 0{,}33\sigma_I = 0{,}33(0{,}4\sigma_I) = -0{,}132|\sigma_I|$

5. Una onda elástica de compresión de 50 MPa de intensidad viaja por una barra de aluminio hasta una barra de acero la cual tiene la mitad del diámetro de la barra de aluminio. Calcule la magnitud de la onda transmitida y reflejada.

Solution:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T - \rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{8}$$

$\sigma_T = -169{,}1\ MPa$ $\sigma_R = 7{,}7\ MPa$

6. Se dispone de una barra cilindrica de espuma de aluminio (Area$=A_2$) entre dos placas de aluminio (Area$=A_1$), siendo $A_2 = 0{,}25A_1$. Para una intensidad de onda de compresión de 100 MPa: (Considere que la densidad y el modulo de young de todos los materiales es el mismo $\rho_A = 2700kg/m^3$ y $E_A = 73GPa$)

- Calcule la magnitud de la onda transmitida en la espuma de aluminio
- Calcule la magnitud de la onda transmitida desde la espuma de aluminio a la segunda placa de aluminio.

Solution:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T - \rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{10}$$

1. $\sigma_T = 1{,}6\sigma_I = -160\ MPa$ $\sigma_R = -0{,}60\sigma_I = 60\ MPa$

2. $\sigma_T = 0{,}4\sigma_I = 0{,}4(1{,}6\sigma_I) = -64\ MPa$ $\sigma_R = 0{,}6\sigma_I = 0{,}6(1{,}6\sigma_I) = -96\ MPa$

7. Una onda elástica de compresión viaja sobre una barra de material A (ρ_A y c_A) que posee una sección circular de área A_A. La barra está en contacto con otra barra de tal manera que se produce una transmisión y una reflexión de la onda. La nueva barra está realizada en un nuevo material B (ρ_B y c_B) cuya sección circular tiene un área de A_B. Obtenga la relación del ratio de la impedancias mecánicas $\frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A}$ y de las áreas $\frac{A_B}{A_A}$ para que el ratio entre la onda transmitida y la incidente sea $\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 5$ y el ratio entre la onda reflejada y la incidente sea $\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 0{,}5$

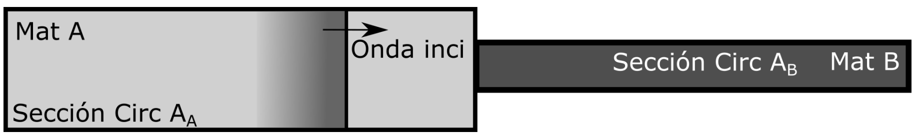


Figura 1: Detalle de la onda y de las barras A y B. La figura es solo una representación, no asuma gracias al dibujo ninguna conclusión respecto a los ratios de áreas.

Solution: Usando

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T - \rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{12}$$

Y llamando a los ratios $\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|} = x$ y $\frac{A_T}{A_I} = y$. Entonces

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{x}{1+xy}\right) = 5$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{xy-1}{1+xy}\right) = 0{,}5$$

La solución queda $x = \frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|} = 10$ e $y = \frac{A_T}{A_I} = 3/10$

8. Una barra semiinfinita de material cerámico (alúmina) se encuentra sometido a un pulso triangular de compresión causado por un explosivo, que se propaga a una velocidad c,

de valor pico σ_m y longitud λ (Figura 1). Sabiendo que la tensió de tracción máxima que soporta el material es $\sigma_t = 5/8\sigma_m$ y la tensión máxima a compresión es $|\sigma_c| = 8/5\sigma_m$. Determine:

- Si la onda de compresión es capaz de provocar el fallo del material
- Si una vez que se refleja en el extremo, la nueva onda generada es capaz de provocar el fallo del material
- En el caso de que en alguno de los dos casos se pueda generar el fallo, determine la posición del fallo.

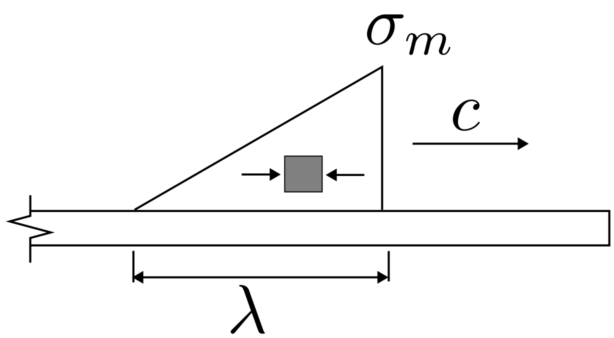


Figura 2: Pulso triangular en barra semiinfinita.

Solution:

- La onda a compresión no es capaz de originar el fallo en el material ya que $|\sigma_c| > |\sigma_m|$
- La onda se refleja en el extremo de la barra como onda de tracción. Debido a que $\sigma_t < \sigma_m$, sí que puede provocar el fallo del material.
- Se va a asumir que el fallo se va a generar en un punto situado a x del extremo. Este punto es el cual cuando llegue la onda de tracción reflejado (de valor pico σ_m) sumada al valor de la onda de compresión que aún no ha acabado de llegar todo al extremo, la tensión resultante deba ser igual a la tensión de tracción máxima. Por tanto, $\sigma_m - \sigma' = \sigma_t = 5/8\sigma_m$. En esta ecuación σ' representa el valor en dicho punto de la onda a compresión. Por tanto, $\sigma' = 3/8\sigma_m$. Debido a la forma lineal del pulso de compresión esto implica que el recorrido de ida (onda de compresión) y vuelta (onda de tracción) entre el punto y el extremo es igual a: $2x = 5/8\lambda$. Y por tanto el punto donde se genera el fallo está situado a una distancia $x = 5/16\lambda$ del extremo.

9. [Puntos] Las gotas del príncipe Rupert, también conocidas como esferas de Rupert o lágrimas holandesas (Figura izquierda), son una curiosidad de vidrio creadas haciendo

gotear vidrio fundido en agua fría. Idealizando el problema en estudio, se puede considerar la gota como dividida en dos partes cilíndricas (cuerpo y cola) de diferente sección (Figura derecha) y mismas propiedades ($E_1 = 70GPa$ y $\rho_1 = 2900kg/m^3$). Se dice que es un tipo de vidrio templado. (Datos Geométricos $A_1 = 4A_2$ y $L_1 = L_2 = 5cm$). Una de estas gotas cae contra el suelo (infinitamente rígido) a una velocidad de $v = 10\ m/s$. Calcule:

- Tensión generada en el impacto contra el suelo
- Sabiendo que el vidrio se comporta como un material frágil, cuyos limites últimos son a compresión de $|\sigma_c| = 400MPa$ y a tracción $\sigma_t = 200MPa$. ¿Se romperá la gota?.

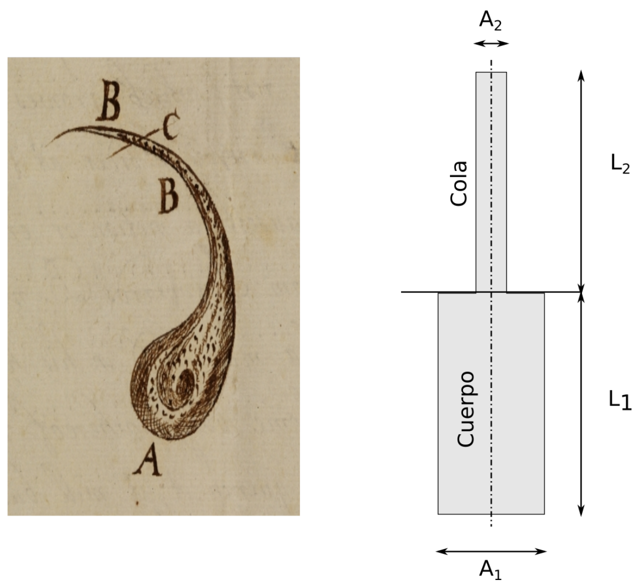


Figura 3: Gota Rupert

Referencia: Robert Hooke, Micrographia or Some Physiologial Descriptions of Minute Bodies made by Magnifying Glasses with Observation and Inquiries thereupon (London, 1665), "Observation vii. of some Phaenomena of Glass Drops" pp. 33-44.

Solution: La tensión generada en el impacto será:

$$\sigma = \rho \overrightarrow{c}(\overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v_f}) = -142MPa$$

Esta onda de compresión no alcanza el limite del vidrio por lo que producirá la rotura y viajara por la gota hasta la transición entre cuerpo y cola donde se generará una onda transmitida y una reflejada.

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 2\left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{13}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \left(\frac{\rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T - \rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I}{\rho_A|\overrightarrow{c_A}|A_I + \rho_B|\overrightarrow{c_B}|A_T}\right) \tag{14}$$

$$\sigma_T = -227{,}2MPa$$

$$\sigma_R = 85{,}2MPa$$

De nuevo no se alcanza los límites ultimos del material por lo que no se rompera. La onda transmitida viajara hasta el extremo libre de la cola donde se relfejará en formato de tracción luego:

$$\sigma_R = 227{,}2MPa$$

Valor que supera el limite a tracción y por tanto provocará la rotura del vidrio. La onda llegará a este extremo libre en:

$$t = \frac{L_1 + L_2}{c} = 2{,}03 * 10^{-5}s$$

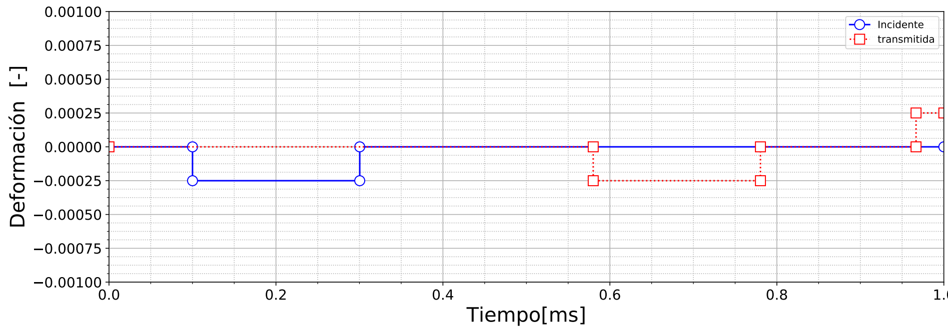
10. (Examen Parcial 2019) Dado un sistema experimental de tres barras, una de ellas (proyectil) choca contra la barra incidente que esta estacionaria ($V = 0m/s$). Una tercera barra, denominada transmisora está colocada a continuación de la barra incidente y también es estacionaria ($V = 0m/s$). Las características de las barras son:

- Proyectil de acero ($\rho = 7850kg/m^3$, $E = 210GPa$) de 518 mm de longitud y 22 mm de diámetro.
- Barra incidente de acero de 2500 mm de longitud y 22 mm de diámetro, instrumentada a 517.5 mm de distancia del extremo que recibe el impacto del proyectil.
- Barra transmisora de acero de 1500 mm de longitud y 22 mm de diámetro. Instrumentada a 500 mm de distancia del extremo en contacto con el espécimen o probeta.

(a) Suponiendo que el proyectil impacta a una velocidad de $v = 2{,}59m/s$ en $t = 0ms$ y que no existe probeta (contacto directo entre barras sin unión mecánica ninguna). Represente sobre una gráfica las señales (de manera idealizada) que debe medir la instrumentación de cada barra hasta un $t_{max} = 1ms$, argumentando razonadamente el proceso de obtención de los resultados e indicando los valores más importantes.

Solution: La magnitud de la deformación obtenida debido al impacto será $\varepsilon = \frac{\overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v_f}}{\overrightarrow{c}} = \frac{0 - v/2}{\overrightarrow{c}} = -0{,}00025$
La barra incidente esta instrumentada a $L_i = 517{,}5mm$ desde el lugar del impacto, por lo que la onda tardará desde el momento del impacto $t_i = L_i/c = 0{,}1ms$.

En la instrumentación de la barra transmisora se medirá un pulso de igual valor en magnitud y duración pero desfasado en el tiempo $(L_i + Inst_L t)/c = 0{,}58ms$



(b) ¿Que sucedería en el caso de que la barra transmisora fuese de 1 m de longitud y estuviese instrumentada a 800 mm del lugar de impacto? Represente de nuevo la medida de la instrumentación.

Solution: En este caso habría una zona de superposición de ondas, en la que ambas se cancelaran.