OpenCourseWare. Protección Ligera de Sistemas Móviles. Ejercicios Tema 3B.

1. El comportamiento constitutivo de un aluminio se puede caracterizar con la siguiente ecuación $\sigma = 256\varepsilon^{0,3}\ MPa$. Asuma que el módulo elástico es $E = 70\ GPa$ y una densidad de $\rho = 2700\ kg/m^3$.

   - Obtenga la velocidad de la onda elástica en el material
   - Obtenga la expresión de la velocidad de la onda plástica en el material
   - Obtenga la velocidad de la onda plástica en el material para una deformación de $\varepsilon = 0{,}0039$.
   - Obtenga la deformación para la cual la velocidad de propagación de las ondas plásticas es $c = 1000\ m/s$

Solution:

- $v_{el} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5091{,}75\ m/s$
- $v_{pl} = \sqrt{\frac{\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\rho}} = \sqrt{\frac{Kn\varepsilon^{n-1}}{\rho}}$ siendo $K = 256\ MPa$ y $n = 0{,}3$ Podemos visualizar la curva tensión deformación:

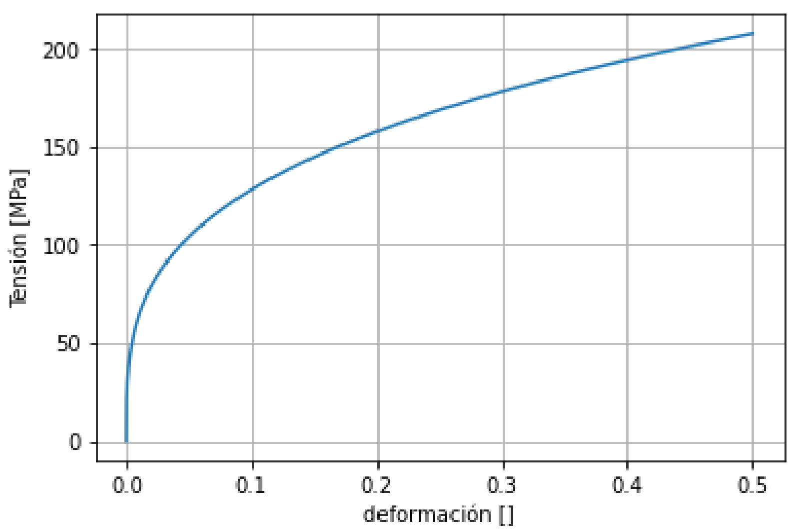


Figura 1: Tensión vs deformación

- Sustituyendo en la ecuación anterior. $v_{pl} = 1175{,}24\ m/s$ este punto correspondería a la pendiente de la curva tensión-deformación en el punto indicado (marcado en la figura por un triangulo). Notesé que se ha realizado un cambio en los ejes para mejor visualización

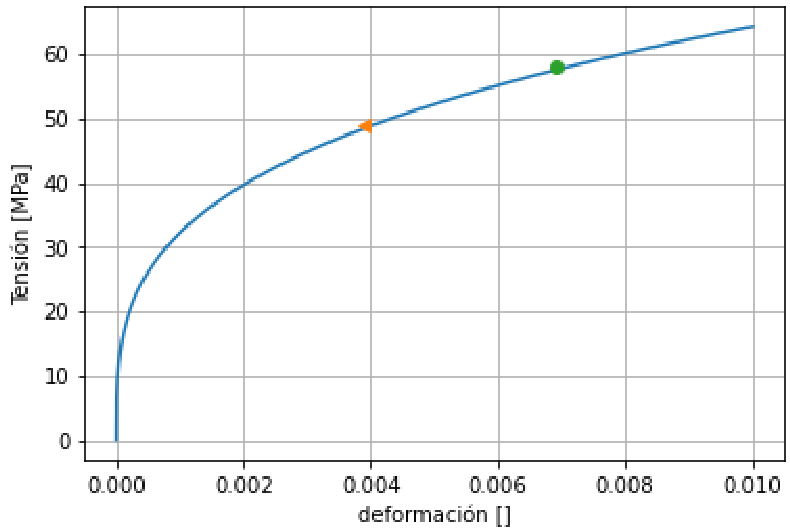


Figura 2: Tensión vs deformación

- En este caso debemos despejar la deformación asumiendo la velocidad de $c = 1000\ m/s$. Así pues se obtienen $\varepsilon = 0{,}00619$(marcado en la figura anterior por un circulo))

2. [Puntos] (Parcial 21-22)Suponga que una barra de un material con un comportamiento tension-deformación como el mostrado en la figura y densidad ρ, recibe un impacto que produce una tensión de valor S_4. Dibuje para un tiempo $t_1 > 0$, conocido, el estado tensional de la barra en el gráfico que se le adjunta. Indicando los valores de tensión y las distancias recorridas en función de los datos suministrados.

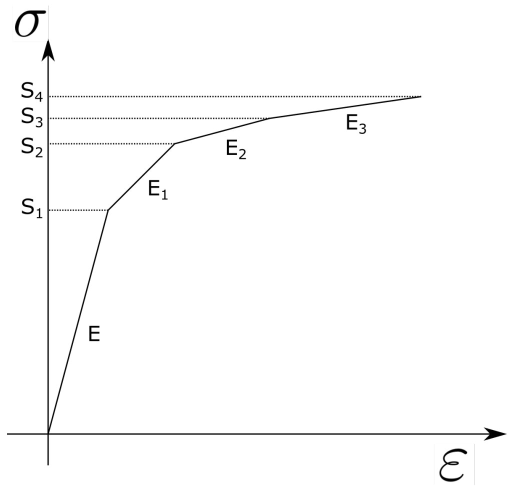


Figura 3: Comportamiento del material

Solution: Dado el comportamiento del material descrito en la figura, para un tiempo determinado viajará por el material ondas elásticas y plásticas. Debido a la diferente velocidad de éstas ondas en el material, para un tiempo determinado t_1 la distancia recorrida será:

$$\underbrace{\sqrt{\frac{E}{\rho}}t_1}_{S_1} > \underbrace{\sqrt{\frac{E_1}{\rho}}t_1}_{S_2} > \underbrace{\sqrt{\frac{E_2}{\rho}}t_1}_{S_3} > \underbrace{\sqrt{\frac{E_3}{\rho}}t_1}_{S_4}$$

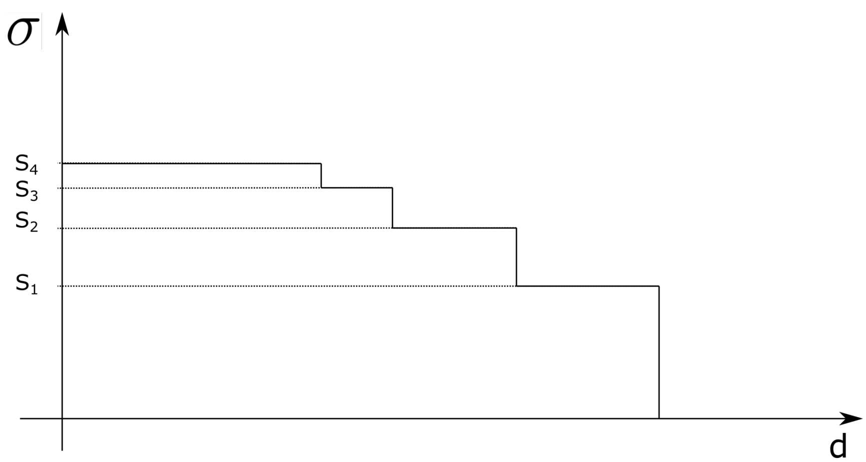


Figura 4: Gráfico tensión vs distancia

3. Considérese la transmisión de una onda de 1,5 GPa de un sólido cerámico elástico lineal ($\rho = 3840\ kg/m^3$ y $E = 380\ GPa$ a una placa de aluminio. El comportamiento del aluminio se puede asemejar a una curva bilineal donde $\sigma_y = 450\ MPa$, $E = 70\ GPa$,

$\rho = 2700\ kg/m^3$ y $E_t = 30\ GPa$. Calcule la magnitud de la onda inelástica en el caso de que se produciera.

Solution: Si se aplica como si no hubiera plastificación

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T$$

$$\frac{\sigma_I}{\sqrt{E_A \rho_A}} - \frac{\sigma_R}{\sqrt{E_A \rho_A}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{E_B \rho_B}}$$

Se obtendría un valor de $\sigma_T = 793\ MPa$. Esto está por encima del límite elástico por tanto las ecuaciones anteriores no son válidas.
Asumiendo el caso plástico, planteando el equilibrio:

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T$$

Ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\sigma_I}{\sqrt{E_A \rho_A}} - \frac{\sigma_R}{\sqrt{E_A \rho_A}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E_B \rho_B}} + \frac{\sigma_T - \sigma_y}{\sqrt{E_B^T \rho_B}}$$

Se obtiene $\sigma_T = 697{,}9\ MPa$ y $\sigma_R = -802{,}1\ MPa$

4. [Puntos] Considérese la transmisión de una onda de 2 GPa de un sólido cerámico elástico lineal ($\rho_1 = 3840\ kg/m^3$ y $E_1 = 380\ GPa$) a una placa de aluminio. El comportamiento del aluminio se puede asemejar a una curva bilineal donde $\sigma_{y2} = 450\ MPa$, $E_2 = 70\ GPa$, $\rho_2 = 2700\ kg/m^3$ y $E_{t2} = 1{,}367\ MPa$. El área del cerámico es A_1 y el area del aluminio es A_2 siendo $A_1 = 1/4A_2$. Calcule la magnitud de la onda inelástica en el caso de que se produzca.

Solution: Si se aplica como si no hubiera plastificación. Del equilibrio de fuerzas:

$$A_1(\sigma_I + \sigma_R) = A_2 \sigma_T$$

$$1/4(\sigma_I + \sigma_R) = \sigma_T$$

Por compatibilidad de desplazamiento de las partículas:

$$\frac{\sigma_I}{Z_1} - \frac{\sigma_R}{Z_1} = \frac{\sigma_T}{Z_2}$$

Se obtendría un valor de $\sigma_T = 590\ MPa$. Esto está por encima del límite elástico ($\sigma_{y2} = 450\ MPa$) por tanto las ecuaciones anteriores no son válidas.
Asumiendo el caso plástico

$$A_1(\sigma_I + \sigma_R) = A_2(\sigma_y + (\sigma_T^p - \sigma_y))$$

$$\frac{\sigma_I}{\sqrt{E_A \rho_A}} - \frac{\sigma_R}{\sqrt{E_A \rho_A}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E_B \rho_B}} + \frac{\sigma_T^p - \sigma_y}{\sqrt{E_B^T \rho_B}}$$

Se obtiene $\sigma_T^p = 451{,}5\ MPa$ y $\sigma_R = -193{,}99\ MPa$

5. Una barra cilíndrica de un material cuya densidad es ρ_1, módulo de elasticidad E_1 y longitud L_1 viaja a una velocidad v_1. La barra impactará contra una pared rígida tal y como se puede ver en la figura 5.

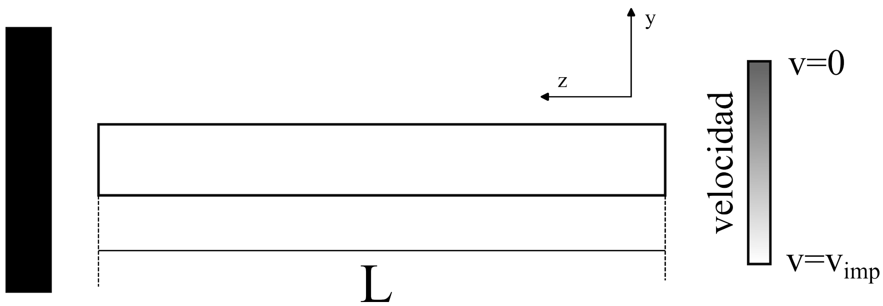


Figura 5: Barra a velocidad v_1 contra pared rígida

Siendo el comportamiento del material el que se muestra en la siguiente σ vs ε figura 6, obtenga:

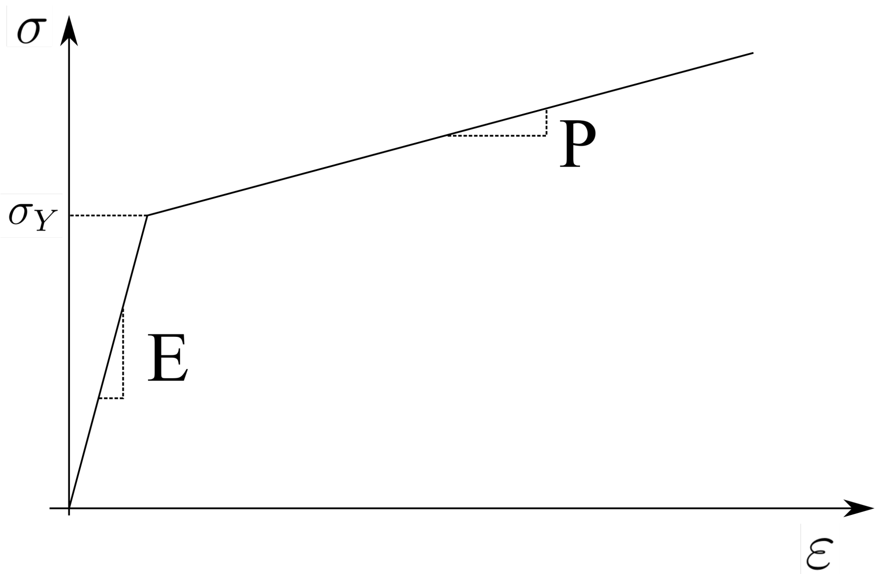


Figura 6: Comportamiento del material

Datos:
$\rho = 7850\ kg/m^3$; $E = 210\ GPa$; $L = 1\ m$; $\sigma_Y = 450\ MPa$; $P = 1\ GPa$

Se pide:

- La velocidad mínima de impacto a la que se genera una onda plástica (v_Y).
- Si $v_1 = 1{,}5 v_Y$ obtenga la tensión, la deformación y la velocidad de todos los puntos de la barra desde $t = 0$ hasta el tiempo T en el que las ondas generadas se encuentran. (Tenga en cuenta la posible reflexión de las ondas en los extremos)
- Obtenga ese tiempo T y la posición de la barra x_1 en la que se produce.

Solution:

- La velocidad de impacto que genere una tensión igual al límite elástico será la minima para generar una onda plástica. Despejando la velocidad de:

$$\Delta\sigma = -\rho \overrightarrow{c_{el}} \Delta \overleftarrow{v}$$

Nótese que las tensiones de compresión se consideran positivas y que el sentido positivo de la velocidad es el marcado por el eje z de la figura 5.

El impacto se produce desde un estado de reposo $\sigma = 0$ y $v = \overleftarrow{v_y}$ hasta un estado tensionado que produce la deceleración de la barra $\sigma = \sigma_y$ y $v = 0$

$$0 - \sigma_Y = -\rho \overrightarrow{c_{el}} (\overleftarrow{v_y} - 0)$$

Se obtiene $\overleftarrow{v_y} = \frac{\sigma}{\rho c_{el}} = 11{,}08\ m/s$

- Ahora el impacto se produce a $v_1 = 1{,}5 v_Y = 16{,}62\ m/s$, por lo que al ser una velocidad mayor que la que se calculó en el primer apartado la barra superará el límite elástico y por lo tanto se producirá plastificación. En el momento del impacto se puede considerar que se producirán instantáneamente (tal y como se comentó en clase el tiempo de incremento de tensión es mucho más pequeño que los tiempos de propagación y por lo tanto podemos aproximarlo a 0) ambas ondas (elástica y plástica). Ambas ondas viajarán a diferentes velocidades a la velocidad de propagación de las ondas elásticas c_{elas} y a la velocidad de propagación de las ondas plásticas c_{plas}, siendo $c_{elas} > c_{plas}$. Esta diferencia en velocidades de propagación hace que la onda elástica avance más rápido, por lo que emplearemos ésta para dividir los cálculos en función del tiempo en 3 intervalos:
  - el primero desde el comienzo del impacto $t = 0s$ hasta que la onda llega al extremo libre del proyectil $t = \frac{L}{c_{el}}$. $(0 < t < \frac{L}{c_{el}})$
  - El instante en el que la onda elástica alcanza el extremo libre $(t = \frac{L}{c_{el}})$
  - el intervalo desde que la onda elástica rebota en el extremo libre y alcanza a la onda plástica producida en el impacto que por ahora llamaremos T. $(\frac{L}{c_{el}} < t < T)$

Cálculo de tensiones, deformaciones y velocidades en los intervalos:

1. En este intervalo si se pudiera visualizar el estado tensio-deformacional del proyectil en un instante de tiempo intermedio ($0 < t < \frac{L}{c_{el}}$), se podrían distinguir 3 zonas diferenciadas por las ondas que las han afectado (figura 7):

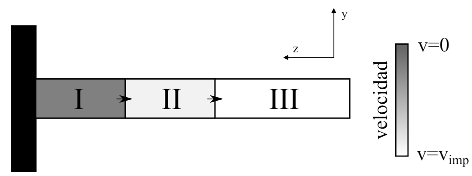


Figura 7: Estado tensio-deformacional en el intervalo 1

- Para la zona III (Parte del proyectil descargada). Esta zona dado que aún no ha llegado el frente de onda elástico (frontera entre las zonas II y III) no ha sufrido por tanto el efecto del impacto (no se ha tensionado y por lo tanto no ha modificado su velocidad). Por esta razón:
  $v_{III} = v_1 \qquad \sigma_{III} = 0 \qquad \varepsilon_{III} = 0$
  En la figura 7 marcada como zona blanca dado que lleva la velocidad inicial.
- Para la zona II (Parte del proyectil cargada sólo elásticamente), esta zona comprendida entre el frente de onda elástico (frontera entre las zonas II y III) y el frente de onda plástico (frontera entre las zonas I y II) se ha visto afectada por la onda elástica unicamente dado que esta onda viaja a mayor velocidad y por lo tanto habrá cubierto mayor parte del proyectil que la onda plástica. De ésta zona no sabemos a priori su velocidad dado que habrá sido modificada por el efecto de la onda elástica. Pero sí podemos conocer/suponer su estado tensional que será el máximo de la parte elástica del comportamiento del material (por lo tanto también podemos conocer también su deformación):

$$\sigma_{II} = \sigma_Y \longleftrightarrow \varepsilon_{II} = \varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = 2{,}14 \cdot 10^{-3}$$

  Por lo que esta zona II ha pasado de estar libre (ser zona III sin tensiones ni deformaciones) a verse afectada por la onda elástica de valor σ_Y. Este cambio de estado tensional provoca por tanto un cambio en la velocidad:

$$\Delta\sigma = -\rho \overrightarrow{c} \Delta \overleftarrow{v}$$

La velocidad que alcanza esta parte será la resta de la velocidad de impacto menos la reducción derivada del estado tensional elástico (σ_Y):

$$\sigma_{III} - \sigma_{II} = 0 - \sigma_Y = -\rho \overrightarrow{c}_{elas}(1{,}5\overleftarrow{v_Y} - \overleftarrow{v_{II}})$$

$$\overleftarrow{v_{II}} = 1{,}5\overleftarrow{v_Y} - \frac{\sigma_Y}{\rho \overrightarrow{c}_{elas}} = 5{,}54\ m/s$$

ES importante remarcar que el sentido de la velocidad se ha considerado positivo con el sentido positivo del eje z (Figura 5). Dado que el valor obtenido es positivo el sentido de la velocidad obtenido sigue siendo en sentido positivo del eje z y por lo tanto la zona II se sigue aproximando a la pared rígida. En la figura 7 se ha marcado la zona II em grisácea dado que lleva una velocidad inferior a la de impacto pero no es 0.

- Para la zona I (Parte del proyectil cargada elasto-plásticamente), esta zona comprendida entre la zona de impacto y el frente de onda plástico (frontera entre las zonas I y II). De esta zona no podemos conocer a priori su estado tensio-deformacional pero si podemos conocer su velocidad. Dado que el impacto se realiza contra una pared infinitamente rígida, las partículas del proyectil no pueden atravesarla y por tanto su velocidad final será 0, por lo que el material se deformará plásticamente hasta reducir su velocidad a 0.

$$v_I = 0$$

Este cambio de estado velocidad provoca por tanto un cambio tensional:

$$\Delta\sigma = -\rho \overrightarrow{c} \Delta \overleftarrow{v}$$

Particularizando para el salto de velocidades, estados tensionales y que las ondas que producen este cambio son plásticas:

$$\sigma_{II} - \sigma_I = \sigma_Y - \sigma_I = -\rho \overrightarrow{c}_{plas}(\overleftarrow{v_{II}} - 0)$$

Despejando:

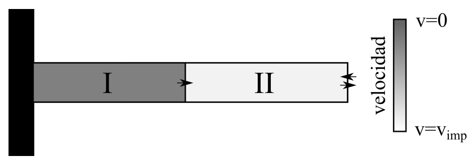
$$\sigma_I = \rho \overrightarrow{c}_{plas}(\overleftarrow{v_{II}}) + \sigma_Y = 465{,}52\ MPa\ \ (Comp)$$

Conociendo la pendiente de la parte plástica, el valor de inicio σ_Y y el valor de la tensión alcanzada para detener el proyectil σ_I se puede calcular el valor de la deformación final (suponiendo aditivas las deformaciones):

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} + \frac{\sigma_I - \sigma_Y}{P} = 1{,}766 \cdot 10^{-2}$$

En la figura 7 marcada como zona gris oscuro dado que lleva una velocidad 0.

2. En el tiempo en el que la onda elástica alcanza el extremo libre del proyectil $t = \frac{L}{c_{el}}$, la zona III se ha visto afectada por completo por la onda elástica y en este caso solo hay zona I y zona II. A partir de este momento la onda se reflejará en tracción por ser un extremo libre (ver tema 2: ondas elásticas). Esta onda empieza a afectar a la zona II que ahora será zona IV. Definiendo la zona IV: es aquella que ha sufrido una onda de compresión elástica y una onda de tracción elástica



3. En el intervalo de tiempo superior a $t = \frac{L}{c_{el}}$, la onda elástica se ha reflejado en el extremo libre en tracción de valor σ_y. Esta onda de tracción se superpondrá a la onda de compresión (Zona II) dando lugar a un cambio de tensión desde un estado de tension σ_y a compresión a 0 zona que se denominará como zona IV. (Definiendo la zona IV: es aquella que ha sufrido una onda de compresión elástica y una onda de tracción elástica) Este cambio de estado tensional provoca por tanto un cambio en la velocidad:

$$\Delta\sigma = -\rho \overrightarrow{c} \Delta \overleftarrow{v} = \rho \overleftarrow{c} \Delta \overleftarrow{v}$$

Nótese el cambio de signo por la dirección de propagación de la onda (vease tema 2 de la asignatura)

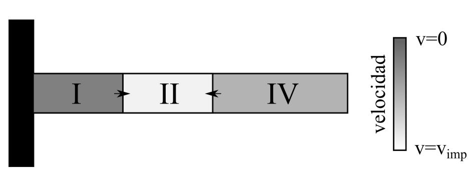
Particularizando para el salto de estados tensionales y que las ondas que producen este cambio son elásticas:

$$\sigma_{II} - \sigma_{IV} = \sigma_Y - 0 = \rho \overrightarrow{c}_{elas} (\overleftarrow{v_{II}} - \overleftarrow{v_{IV}})$$

Despejando la velocidad de la zona IV:

$$\overleftarrow{v_{IV}} = -\frac{\sigma_Y}{\rho \overrightarrow{c}_{elas}} + \overleftarrow{v_{II}} = -5{,}54 m/s$$

El signo negativo en la velocidad denota que es en sentido contrario de lo que se ha considerado positivo hasta este momento (sentido positivo de derecha a izquierda) y por lo tanto este tramo de la barra estará rebotando y alejándose de la pared.



Los valores calculados para las zonas II y I no cambian con respecto al anterior intervalo de tiempo.
Este intervalo de tiempo termina cuando la onda elástica de tracción se encuentra con el frente de propagación de la onda plástica, para $t = T$. Para calcular el tiempo T y la posición de la barra x_1 (distancia desde el extremo libre del proyectil) en la que se produce, se deberá igualar el tiempo que tarda la onda elástica en recorrer el proyectil (L_1) más la parte reflejada (que denominaremos como x_1) a la velocidad de las ondas elásticas, con el timepo que tarda las ondas plásticas en recorrer ($L_1 - x_1$):

$$T = \frac{L_1 - x_1}{c_{pl}} = \frac{L + x_1}{c_{el}}$$

Entonces:
$T = 3{,}614 \cdot 10^{-4}\ s$ $\qquad x_1 = 0{,}871\ m$

6. [Puntos] (Parcial 17-18) Una onda elástica de tracción (σ_I) viaja a través de un acero ($E_A; \rho_A$) que presenta diferentes límites elásticos a tracción que a compresión ($\sigma^t_{yA} > \sigma^c_{yA}$). Dicha onda se transmite desde el acero a un bloque de aluminio ($E_B; \rho_B$) transmitiéndose parte de la onda y reflejándose otra parte. Suponiendo que el endurecimiento por deformación de ambos materiales tanto a tracción como a compresión es $E^T_A = E^T_B$. Plantee las ecuaciones en el caso de que:

   (a) [1 Punto] La onda transmitida supere el límite elástico del aluminio (σ^B_y)

   (b) [2 Puntos] La onda reflejada supere el límite elástico a compresión del acero

Solution:

- La onda transmitida supere el límite elástico del aluminio
  Del equilibrio : $\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T = \sigma^{al}_{yB} + \sigma^{al}_{pB}$
  De las ecuaciones de compatibilidad:

$$\frac{\sigma_I}{\sqrt{E_A \rho_A}} - \frac{\sigma_R}{\sqrt{E_A \rho_A}} = \frac{\sigma^{al}_y}{\sqrt{E_B \rho_B}} + \frac{\sigma^{al}_p}{\sqrt{E^T_B \rho_B}}$$

- La onda reflejada supere el límite elástico a compresión del acero
  Del equilibrio : $\sigma_I + \sigma^c_{yA} + \sigma^{ac}_p = \sigma_T$
  De las ecuaciones de compatibilidad:

$$\frac{\sigma_I}{\sqrt{E_A \rho_A}} - \frac{\sigma^{ac}_y}{\sqrt{E_A \rho_A}} - \frac{\sigma^{ac}_p}{\sqrt{E^T_A \rho_A}} = \frac{\sigma^{al}_t}{\sqrt{E_B \rho_B}}$$

7. [Puntos] Una barra prismática está fabricada por un material elástico perfectamente plástico. Su eje longitudinal coincide con el eje 1, mientras que los ejes transversales 2 y 3 están cofinados. Obtenga razonadamente y explicando todos los pasos a seguir para la consecución del valor:

   - La velocidad de propagación de las ondas elásticas de una onda que se desplaza a lo largo de la barra.
   - La velocidad de propagación de las ondas plásticas de una onda que se desplaza a lo largo de la barra.

   Datos: Módulo elástico E, coeficiente de Poisson ν, límite elástico σ_y y densidad ρ. .

Solution: Onda Elástica unideformacional (c_0) Aplicando las leyes de Hooke para el acero (isótropo)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) = 0$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$
$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

Obtenemos una relación entre las tensiones tal que:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} \Rightarrow \sigma_{22} = \sigma_{11}\frac{\nu}{1-\nu}$$

Particularizando para la dirección longitudinal:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$$

Dado que:

$$c_0 = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \rightarrow S = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{1}$$

La Velocidad de Propagación de las ondas elásticas en dirección longitudinal será:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \tag{2}$$

Onda Plástica unideformacional (c_{0p}) Tenemos que:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^p$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3^e + \varepsilon_3^p$$

Al estar confinado en direcciones 2 y 3. $\varepsilon_2^e = -\varepsilon_2^p = \varepsilon_3^e = -\varepsilon_3^p$.
Por incompresibilidad del flujo plástico $\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = 0$ y entonces $\varepsilon_1^p = -2\varepsilon_2^p = 2\varepsilon_2^e$.
Por lo tanto:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e$$

Usando la ley de Hooke $\varepsilon_1^e = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{2\nu\sigma_2}{E}$ y $\varepsilon_2^e = \frac{(1-\nu)\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E}$ se obtiene:

$$\varepsilon_1 = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_1 + \frac{2(1-2\nu)}{E}\sigma_2 \tag{3}$$

Usando el criterio de Tresca donde $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_y$ por tanto $\sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_y$ e introduciendolo en 3 Se obtiene que

$$\sigma_1 = \frac{E}{3(1-2\nu)}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\sigma_y \tag{4}$$

La Velocidad de Propagación de las ondas plásticas en dirección longitudinal será:

$$c_{0p} = \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-2\nu)}} \tag{5}$$