OpenCourseWare. Protección Ligera de Sistemas Móviles. Ejercicios Tema 4.

1. La curva de deceleración de un péndulo Charpy de masa 50 kg, puede ser expresada en unidades del Sistema Internacional como $a = c_1 t^{c_2}$, donde c_1 es -1000, c_2 es 0.5 y t es el tiempo [en segundos]. La duración del impacto son 10 ms y la velocidad a la que el martillo del Charpy impacta la probeta es de $v_0 = 7{,}5 m/s$. Obtenga la energía absorbida por la probeta (NOTA: el resultado debe expresarse en Julios)

Solution: Para obtener la energía absorbida es necesario conocer la Fuerza y el desplazamiento

$$F = ma \rightarrow F = mc_1 t^{c_2}$$

El desplazamiento se obtiene por integración de la aceleración conociendo la velocidad de impacto:

$$v = \int a dt = \int c_1 t^{c_2} dt = \frac{c_1 t^{c_2+1}}{c_2+1} + c_3$$

donde c_3 es una contante de integración, que se puede obtener imponiendo la condicion de contorno correspondiente $t = 0 \rightarrow v = v_0$, por lo que:

$$v = \frac{c_1 t^{c_2+1}}{c_2+1} + v_0$$

Se puede integrar el desplazamiento d:

$$d = \int v dt = \int \left(\frac{c_1 t^{c_2+1}}{c_2+1} + v_0 \right) dt$$

$$d = \frac{c_1 t^{c_2+2}}{(c_2+1)(c_2+2)} + v_0 t = 7{,}5t - 266{,}67 t^{2{,}5}$$

Nota: el desplazamiento es 0 en $t = 0$ por lo que no queda término independiente o constante de integración es 0. Queda por tanto obtener la energía:

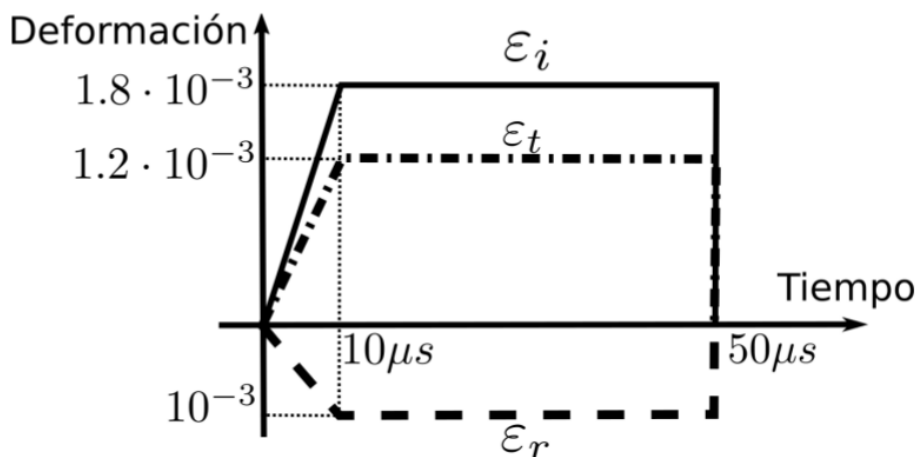
$$E = \int F d\, dt = \int \left[(mc_1 t^{c_2}) \left(\frac{c_1 t^{c_2+2}}{(c_2+1)(c_2+2)} + v_0 t \right) \right] dt = 1{,}46 J$$

2. Se desea conocer la velocidad a la que se ha realizado un ensayo de Taylor. Conociendo
   - el límite elástico dinámico del material 420 MPa
   - Densidad del material $7850 kg/m^3$
   - la longitud inicial de la probeta 0,3 m
   - la longitud final de la probeta 0,2 m

- la longitud no plastificada de la probeta 0,1 m

Solution: 342.87 m/s

3. Una barra Hopkinson se utiliza para ensayar probetas cilíndricas de 22 mm de diámetro y 5 mm de espesor. Las barras del aparato son de acero de 22 mm de diámetro ($E = 203GPa$ y $\rho = 7804{,}7kg/m^3$). En un determinado ensayo se obtiene el siguiente registro de deformación de las ondas incidente, reflejada y transmitida. Determinar:



(a) Si el proyectil es idéntico a las barras (diámetro y material), obtenga el valor de la longitud del mismo, así como la velocidad de impacto.

(b) Obtenga la expresión analítica de la velocidad de deformación durante el ensayo.

(c) Obtenga la expresión analítica de la curva tensión deformación del material durante el ensayo.

(d) Dibuje la curva tensión deformación del material durante el ensayo.

Solution:

- **Calculo la longitud del proyectil:** la longitud del proyectil determina el tiempo de pulso generado en el impacto $tf = 50 \cdot 10^{-6}s$, es el tiempo que tarda la onda que viaja a una velocidad c en ir y volver desde el lugar del impacto dentro del proyectil ($2L_p$). a velocidad de propagación de las ondas en las barras es $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5099\ m/s$. Por lo que conociendo las propiedades del material del impactador se puede obtener su longitud.

$$L_p = \frac{1}{2} \cdot tf \cdot c = 0{,}12749m$$

La velocidad de impacto determina la magnitud de la tensión generada (onda incidente) o lo que es lo mismo de la deformacion incidente generada (Revisar Tema 2).

$$\sigma_i = E\varepsilon_i = \rho c \frac{v}{2}$$

Despejando la velocidad de impacto:

$$v = \frac{2 \cdot E \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3}}{\rho c} = 18{,}36 m/s$$

- Para obtener la expresión analítica de la **velocidad de deformación** durante el ensayo, recurrimos a la formula obtenida en teoría:

  $$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{-2c}{L}\varepsilon_r(t)$$

  por lo que se necesita la expresión analítica de la deformación reflejada, la cual se puede obtener de la gráfica:

  - $0 < t < 10 \cdot 10^{-6} \longrightarrow \varepsilon_r(t) = \frac{-10^{-3}}{10\,10^{-6}}t = -100t \longrightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{2c}{L}100t[1/s]$
  - $10 \cdot 10^{-6} < t < 50^{-6} \longrightarrow \varepsilon_r(t) = -10^{-3} \longrightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{2c}{L}10^{-3}[1/s]$

- **Calculo de la curva tensión-deformación:** para ello se deben obtener las expresiones en función del tiempo de la deformación y de la tensión.

  - Para obtener la expresión analítica de la deformación durante el ensayo se debe integrar la velocidad de deformación obtenida anteriormente:

    $$\varepsilon(t) = \int \dot{\varepsilon}(t)dt = \frac{-2c}{L}\int \varepsilon_r(t)dt$$

    Primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$:

    $$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L}\frac{100}{2}t^2 = \frac{2c}{L}50t^2$$

    Segundo tramo $10 \cdot 10^{-6} < t < 50 \cdot 10^{-6}$

    $$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L}10^{-3}(t + C_1) = \frac{2c}{L}10^{-3}(t - 5 \cdot 10^{-6})$$

    Nota: C_1 se calcula de tal manera que exista continuidad entre el primer y el segunto tramo, esto es

    $$\varepsilon_{tramo1}(t = 10 \cdot 10^{-6}) = \varepsilon_{tramo2}(t = 10 \cdot 10^{-6})$$

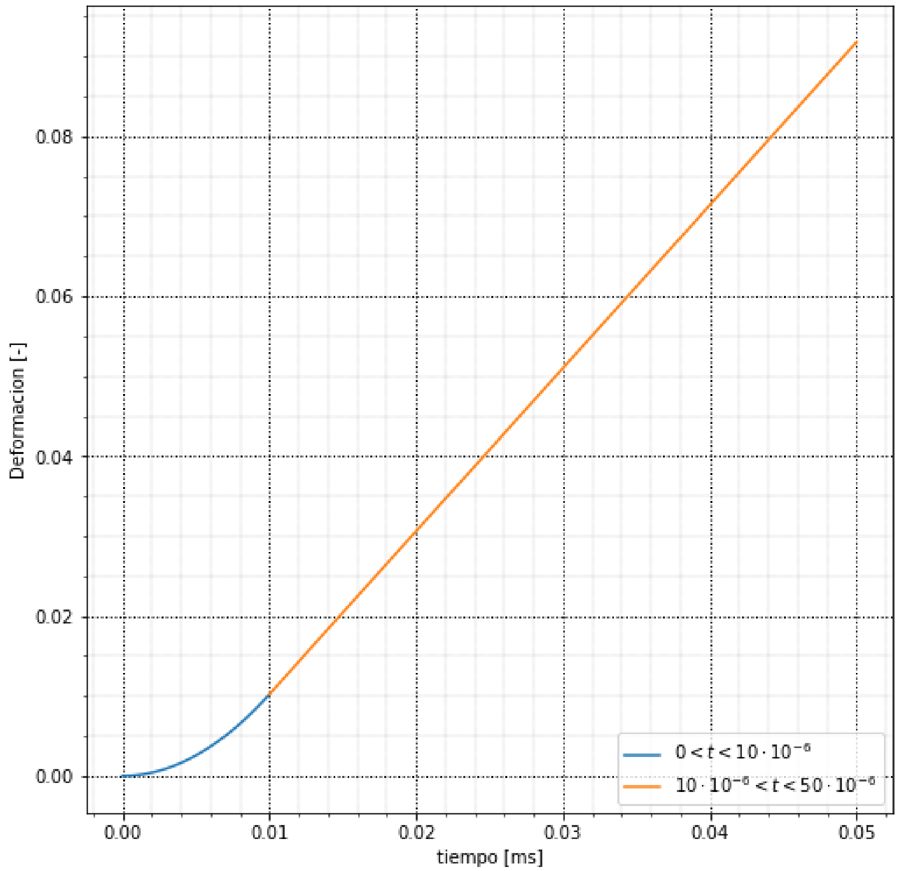


Figura 1: Deformación vs tiempo

- El cálculo de la tensión se basa en la deformación transmitida (ε_t), expresion que se simplifica al tener la barra y la probeta la misma área $A_B = A_s$:

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_t(t) = E \cdot \varepsilon_t(t)$$

Del enunciado es posible ver como cambia la deformación trasmitida en dos tramos diferentes. Primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$ (donde c_1 y c_2 son constantes que determinan la pendiente de la recta que se proporciona en el enunciado):

$$\sigma(t) = E\varepsilon_T(t) = E(c_1 \cdot t + c_2) = E\frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}t$$

Segundo tramo $10 \cdot 10^{-6} < t < 50 \cdot 10^{-6}$

$$\sigma = E\varepsilon_T(t) = E \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}$$

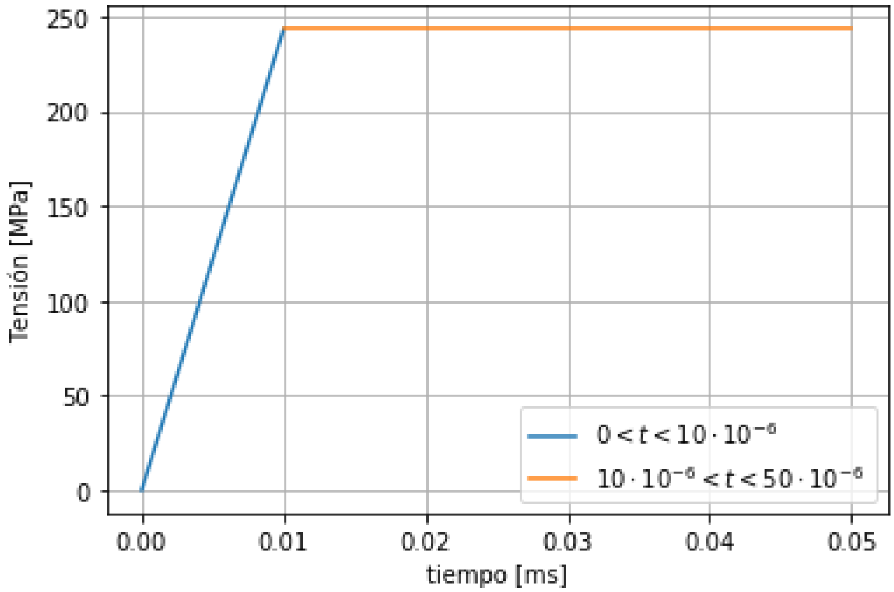


Figura 2: Tensión vs tiempo

Para calcular la **curva tensión deformación** de la probeta se debe despejar la tensión o la deformación del tiempo. Por lo que en el primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$:

$$t = \left(\frac{\varepsilon(t) \cdot L}{1000 \cdot c}\right)^{0{,}5}$$

e introducir este t en la expresión de la tensión para obtener una dependencia de la tensión con la deformación:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_T(t) = E(A \cdot t + B) = E\frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}\left(\frac{\varepsilon(t) \cdot L}{1000 \cdot c}\right)^{0{,}5}$$

El segundo tramo es independiente del tiempo por lo el valor de la tensión es constante $10 \cdot 10^{-6} < t < 50 \cdot 10^{-6}$

$$\sigma = E\varepsilon_T(t) = E \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}$$

- Por último para **representar la curva tensión deformación** solo sería necesario determinar los puntos más significativos como son:
  - Valor de la tensión y deformación para $t = 0$
  - Valor de la tensión y deformación para $t = 10 \cdot 10^{-6}$
  - Valor de la tensión y deformación para $t = 50 \cdot 10^{-6}$

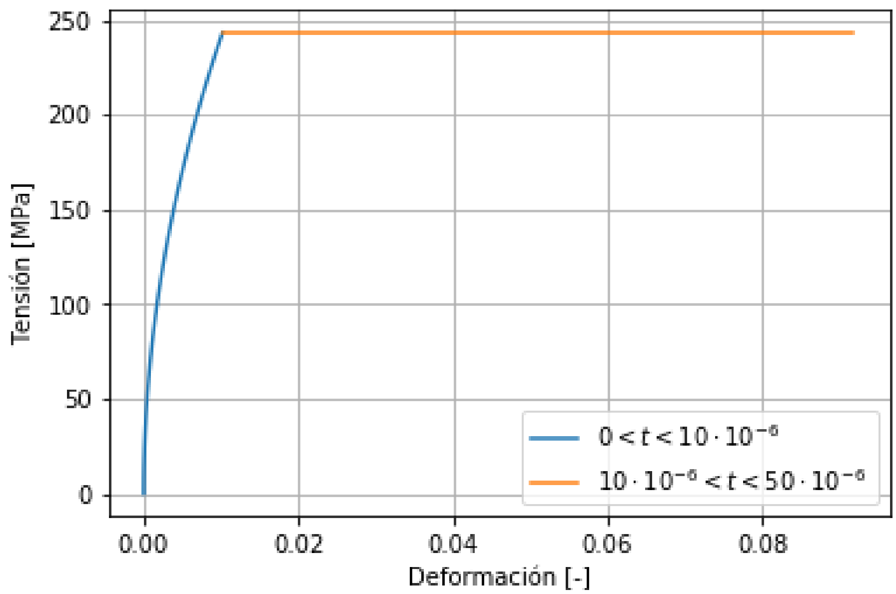
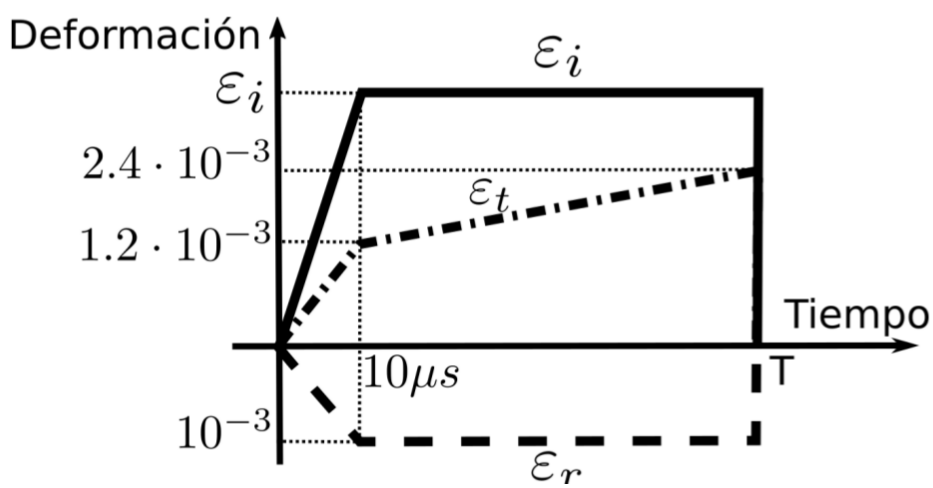


Figura 3: Tensión vs deformación

4. Una barra Hopkinson se utiliza para ensayar probetas cilíndricas de 22 mm de diámetro y 5 mm de espesor. Las barras del aparato son de acero de 22 mm de diámetro ($E = 203GPa$ y $\rho = 7804{,}7kg/m^3$). El proyectil es idéntico a las barras de 127,5 mm de longitud. Cuando el proyectil impacta contra la barra incidente a una velocidad de 30 m/s se obtiene el siguiente registro de deformación de las ondas incidente, reflejada y transmitida que se detalla en la figura. Determinar:



(a) Obtenga la magnitud de deformación de la onda incidente ε_i y el tiempo de duración del pulso (T).

(b) Obtenga la expresión analítica de la velocidad de deformación durante el ensayo.

(c) Obtenga la expresión analítica de la curva tensión deformación del material durante el ensayo.

(d) Dibuje la curva tensión deformación del material durante el ensayo.

NOTA: Por simplicidad, a pesar de no cumplirse ($\varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t$), use las siguientes ecuaciones:
Valor de la velocidad de deformación en la probeta: $\dot{\varepsilon}(t) = \frac{-2c}{L}\varepsilon_r(t)$
Valor de deformación en la probeta: $\varepsilon(t) = \frac{-2c}{L}\int \varepsilon_r(t)dt$
Valor de tensión en la probeta: $\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_t(t)$

Solution:

- De manera similar a lo calculado en el ejercicio anterior, se obtiene la velocidad de propgación de las ondas en el material $c = 5100\ m/s$. En este caso se desconoce el valor máximo de la deformación pero si el valor de la velocidad de impacto del proyectil, por lo que:

$$\varepsilon_i = \frac{v_0}{2c} = 2{,}94 \cdot 10^{-3}$$

Por último conociendo la longitud del proyectil: $T = \frac{2L}{c} = 50\ \mu s$

- **Velocidad de deformación en la probeta** Para obtener la expresión analítica de la velocidad de deformación durante el ensayo:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{-2c}{L}\varepsilon_r(t)dt$$

Primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{2c}{L}\frac{1 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}t = \frac{2c}{L}100 \cdot t$$

Segundo tramo $10 \cdot 10^{-6} < t < 50 \cdot 10^{-6}$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{2c}{L}10^{-3}$$

Nota: ver ejercicio anterior

- **Deformación en la probeta** Para ello lo primero que debo hacer el calcular la deformación, mediante la integración de la velocidad de deformación. Para obtener la expresión analítica de la deformación durante el ensayo:

$$\varepsilon(t) = \int \dot{\varepsilon}(t)dt = \frac{-2c}{L}\int \varepsilon_r(t)dt$$

Primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$:

$$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L} 100 \frac{t^2}{2} = \frac{2c}{L}\frac{100}{2} t^2 = \frac{2c}{L} 50 t^2 = 101{,}9 \cdot 10^6 t^2$$

Segundo tramo $10 \cdot 10^{-6} < t < 50 \cdot 10^{-6}$

$$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L} 10^{-3} \left(t + C_1\right)$$

con $C_1 = -5 \cdot 10^{-6}$ Nota: ver ejercicio anterior

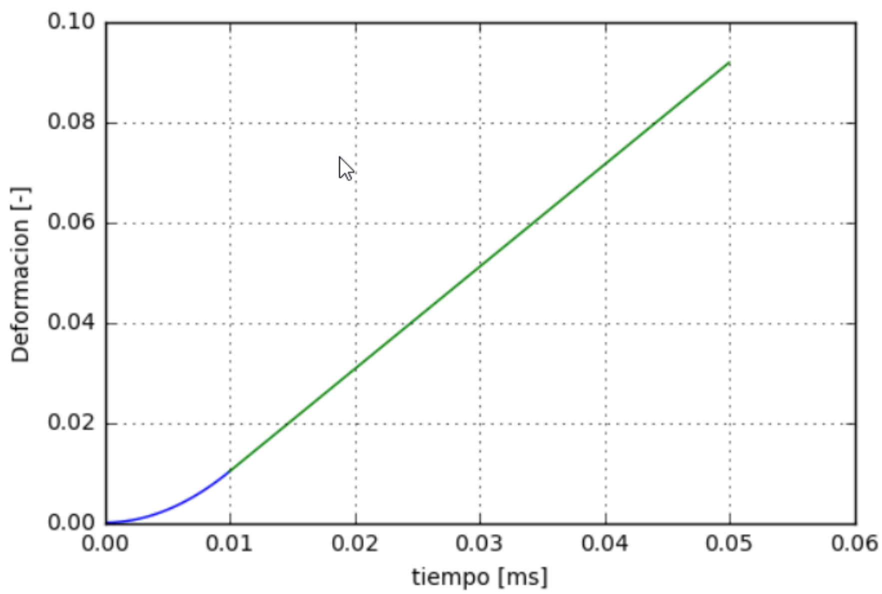


Figura 4: Deformacion vs tiempo

- El cálculo de la tensión se basa en la deformación en la deformación transmitida

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s} \varepsilon_T(t) = E \cdot \varepsilon_T(t)$$

Primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_T(t) = E(A \cdot t + B) = E \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}} t$$

Segundo tramo $10 \cdot 10^{-6} < t < 50 \cdot 10^{-6}$

$$\sigma = E\varepsilon_T(t) = E \cdot \left(\frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-6}} \cdot t + 9 \cdot 10^{-4}\right)$$

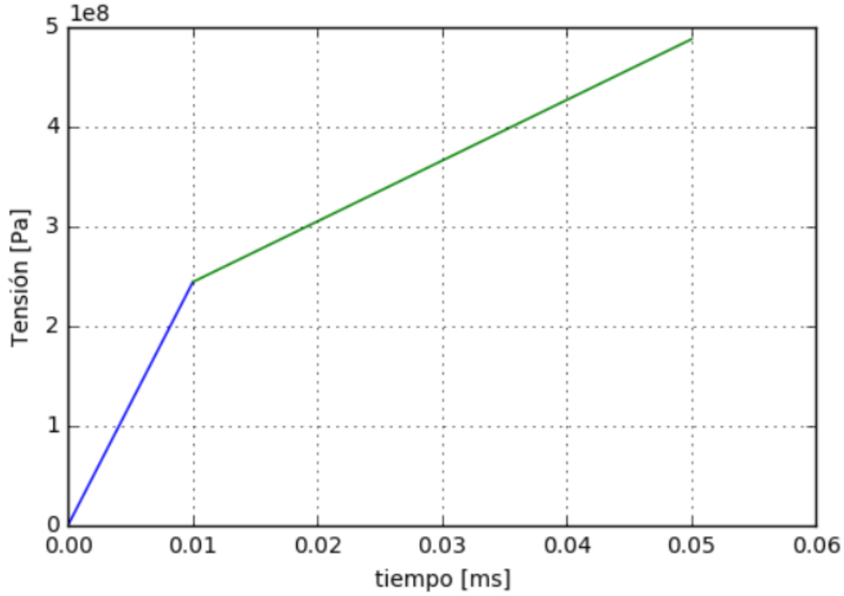


Figura 5: Tension vs tiempo

- Despejando el tiempo en las relaciones deformación tiempo y sustituyendo en las expresiones de la deformación tiempo. Por último para **representar la curva tensión deformación** solo sería necesario determinar los puntos más significativos como son:
  - Valor de la tensión y deformación para $t = 0$
  - Valor de la tensión y deformación para $t = 10 \cdot 10^{-6}$
  - Valor de la tensión y deformación para $t = 50 \cdot 10^{-6}$

  Sabiendo que el primer tramo es no lineal y el segundo es lineal.

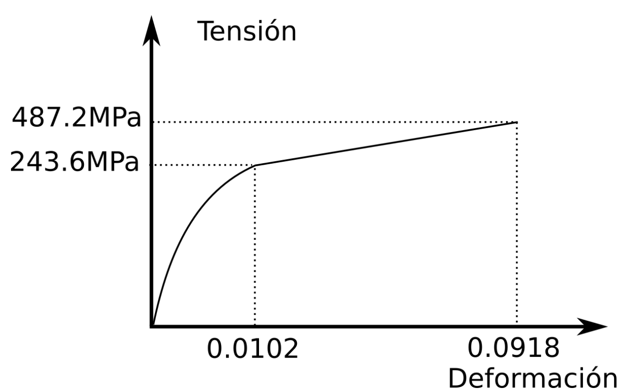
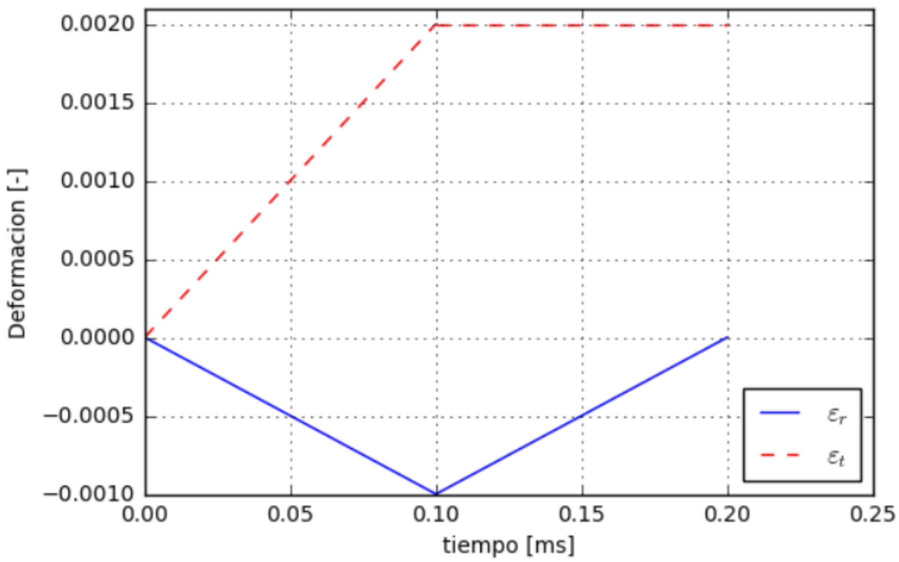


Figura 6: Tensión vs Deformación

5. Unas barras Hopkinson de 22 mm de diámetro se utilizan para ensayar probetas cilíndricas de 20 mm de diámetro y 5 mm de espesor. Las barras del aparato son de acero ($E = 203GPa$ y $\rho = 7804{,}7kg/m^3$). En un determinado ensayo se obtiene el siguiente registro de deformación de las ondas reflejada y transmitida. Determinar:



(a) Obtenga la expresión analítica de la curva tensión deformación del material durante el ensayo.

(b) Dibuje la curva tensión deformación del material durante el ensayo. Indicando los límites y puntos más significativos.

Fórmulas de interés para la barra Hopkinson de Compresión:
Valor de la velocidad de deformación en la probeta:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{-2c}{L}\varepsilon_r(t)$$

Valor de deformación en la probeta:

$$\varepsilon(t) = \int \dot{\varepsilon}(t)dt$$

Valor de tensión en la probeta:

$$\sigma(t) = \frac{F_A + F_B}{2A_s} = \frac{A_B E}{2A_s}(\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_T(t)) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_T(t)$$

Solution:

- Para obtener la expresión analítica de la velocidad de deformación durante el ensayo, se recurre a la formula:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{-2c}{L}\varepsilon_r(t)$$

por lo que se necesita la expresión analítica de la deformación reflejada, de la gráfica se puede obtener que:

- $0 < t < 100 \cdot 10^{-6}$ $\varepsilon_r(t) = -10t$
- $100 \cdot 10^{-6} < t < 200 \cdot 10^{-6}$ $\varepsilon_r = -2 \cdot 10^{-3} + 10t$.

Para obtener la expresión analítica de la deformación durante el ensayo:

$$\varepsilon(t) = \int \dot{\varepsilon}(t)dt = \frac{-2c}{L}\int \varepsilon_r(t)dt$$

- Primer tramo $0 < t < 100 \cdot 10^{-6}$:

$$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L}\frac{10}{2}t^2$$

- Segundo tramo $100 \cdot 10^{-6} < t < 200 \cdot 10^{-6}$

$$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L}\int(2 \cdot 10^{-3} - 10t)dt = \frac{2c}{L}(2 \cdot 10^{-3}t - 5t^2 + C_1)$$

Para calcular C_1 (constante de integración) la deformación final del primer tramo debe ser igual a la deformación inicial del segundo tramo para que haya continuidad. Por lo que $C_1 = -1 \cdot 10^{-7}$:

$$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L}(2 \cdot 10^{-3}t - 5t^2 - 1 \cdot 10^{-7})$$

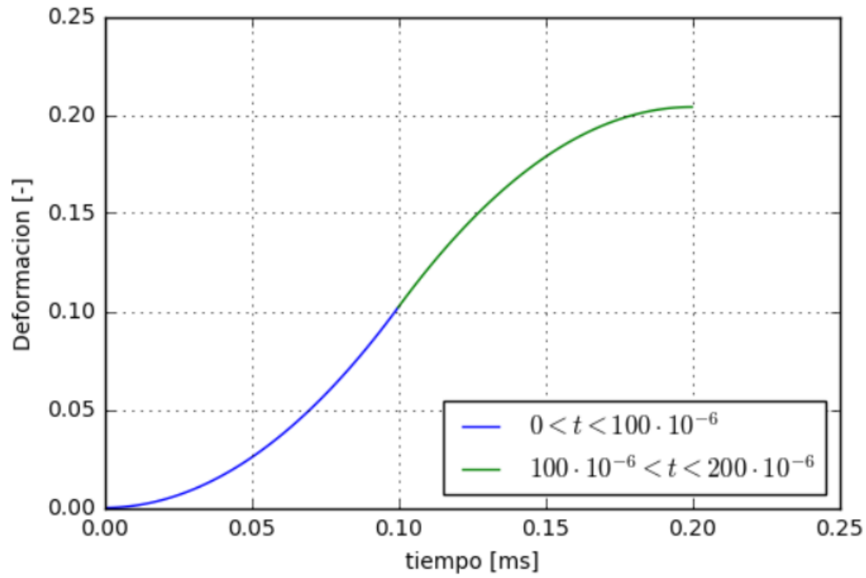


Figura 7: evolución de la deformación durante el ensayo

- El cálculo de la tensión se basa en la deformación transmitida

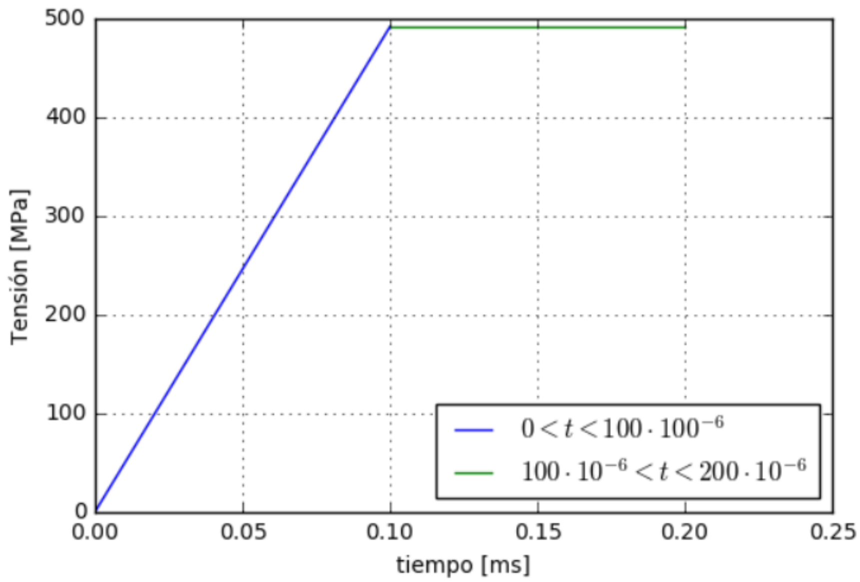
$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s} \varepsilon_T(t)$$

Primer tramo $0 < t < 100 \cdot 10^{-6}$:

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s} \varepsilon_T(t) = \frac{A_B E}{A_s} 20t$$

Segundo tramo $100^{-6} < t < 200 \cdot 10^{-6}$:

$$\sigma = \frac{A_B E}{A_s} \varepsilon_T(t) = \frac{A_B E}{A_s} 0{,}002$$



- Para calcular la curva tensión deformación de la probeta se debe despejar la tensión o la deformación del tiempo.

    - primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$:

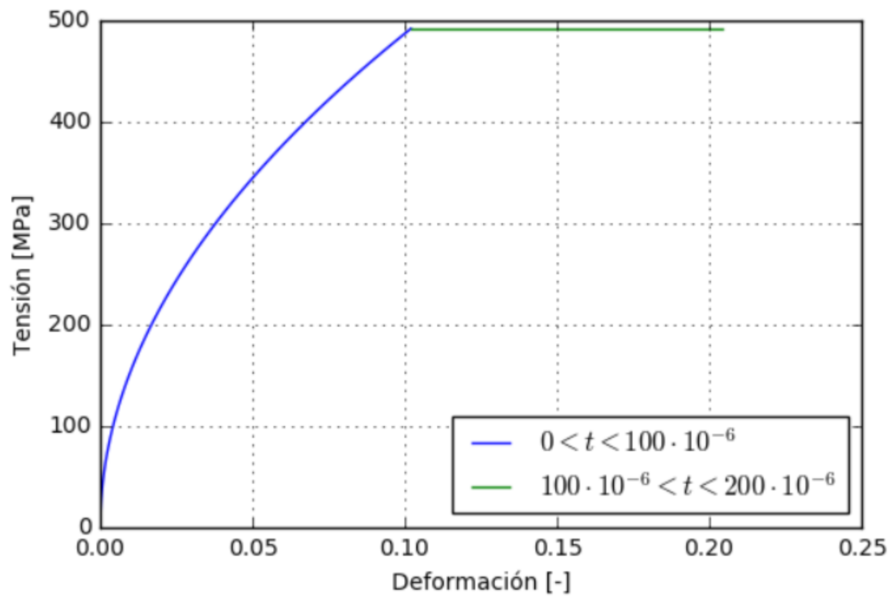
$$t = \left(\frac{\varepsilon(t) \cdot L}{10 \cdot c}\right)^{0,5}$$

y por lo tanto la tensión será

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_T(t) = \frac{A_B E}{A_s}20\left(\frac{\varepsilon(t) \cdot L}{10 \cdot c}\right)^{0,5}$$

    - Segundo tramo es independiente del tiempo $100^{-6} < t < 200 \cdot 10^{-6}$

$$\sigma = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_T(t) = \frac{A_B E}{A_s}0{,}002$$



6. [Puntos] En un ensayo de compresión en la barra Hopkinson asuma que la onda incidente es una onda cuadrada y que se cumple $\varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t$. Si la deformación reflejada es una onda de tracción lineal, con valor 0 al inicio y decreciente con el tiempo, comente de manera razonada como debe ser la forma de la deformación transmitida en la barra transmisora, la curva de tensión-tiempo, la curva deformación-tiempo, y la curva constitutiva del material.

Solution:

- **Deformación transmitida** asumiendo que hay equilibrio y por lo tanto se cumple:

  $$\varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t$$

  Sabiendo que la deformación incidente es constante (onda cuadrada) $\varepsilon_i = c_1$ y que la deformación reflejada es lineal, por lo que es de la forma:

  $$\varepsilon_r = c_2 t + c_3$$

  Siendo c_2 la pendiente y $c_3 = 0$ (valor inicial de la deformación). Por lo tanto la deformación transmitida, será:

  $$\varepsilon_t = \varepsilon_i + \varepsilon_r = c_1 + c_2 t$$

- **Tensión en la probeta:** viene definida por:

  $$\sigma(t) = \frac{F_A + F_B}{2A_s} = \frac{A_B E}{2A_s}(\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_T(t)) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_T(t)$$

Por lo que:

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}(c_1 + c_2 t)$$

- **Deformación en la probeta**: la velocidad de deformación viene definida por:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{-2c}{l_s}\varepsilon_r = \frac{2c}{l_s}c_2 t$$

Integrando para obtener la deformación:

$$\varepsilon = \int \dot{\varepsilon} = \frac{2c}{l_s}\int \varepsilon_r = \frac{2c}{l_s}c_2 \int t dt = \frac{2c}{l_s}c_2\frac{t^2}{2}$$

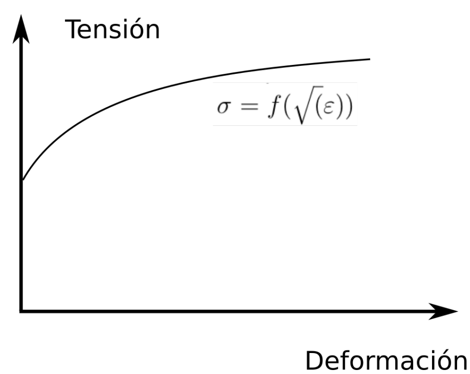
- **Curva tensión-Deformación:** Para ello se despeja el tiempo de la deformación:

$$\varepsilon = \frac{2c}{l_s}c_2\frac{t^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\varepsilon\frac{l_s}{cc_2}}$$

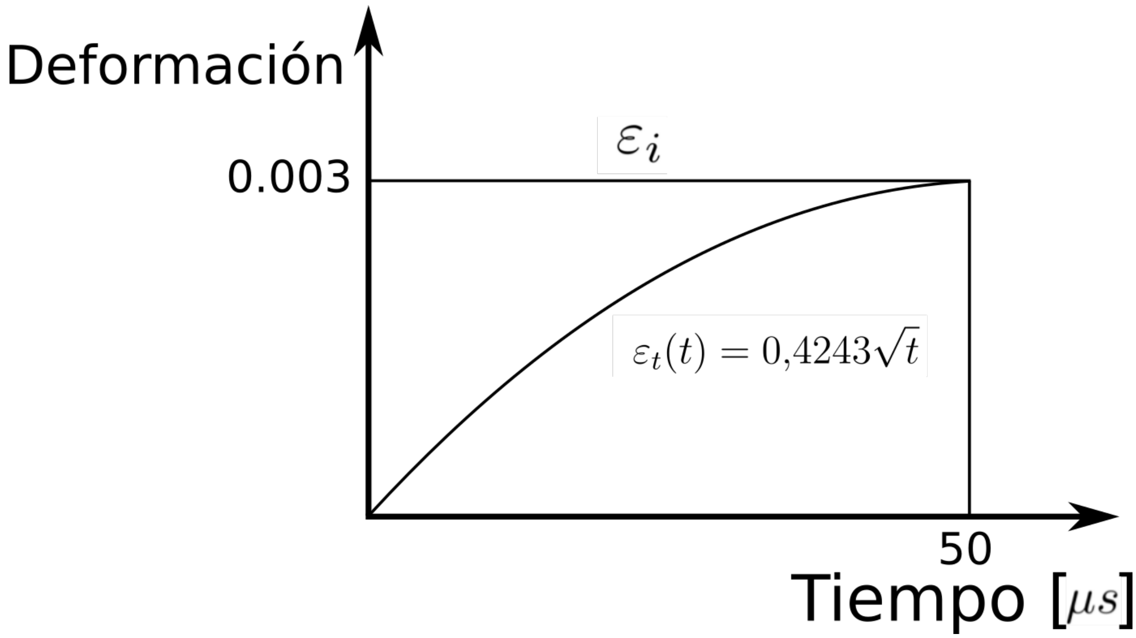
Entrando en la tensión:

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\left(c_1 + c_2\sqrt{\varepsilon\frac{l_s}{cc_2}}\right)$$

Por lo que la curva constitutiva del material será:



7. Una barra Hopkinson se utiliza para ensayar probetas cilíndricas de 22 mm de diámetro y 5 mm de espesor. Las barras del aparato son de acero de 22 mm de diámetro ($E = 203GPa$ y $\rho = 7804{,}7kg/m^3$). Se ha obtenido el siguiente registro de deformación de las ondas incidente y transmitida que se detalla en la figura. La onda incidente es una onda cuadrada mientras que la transmitida sigue la siguiente expresión $\varepsilon_t(t) = 0{,}4243\sqrt{t}$ en la que el tiempo está en unidades de segundo (s). Ambas señales caen a cero al llegar $t = 50\mu s$.



(a) [Puntos] Obtenga analíticamente la deformación reflejada asumiendo $\varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t$. Represéntala en una gráfica respecto al tiempo.

(b) [Puntos] Obtenga la expresión analítica de la velocidad de deformación durante el ensayo.

(c) [Puntos] Obtenga la expresión analítica de la deformación durante el ensayo y represéntala en una gráfica respecto al tiempo.

(d) [Puntos] Obtenga la expresión analítica de la tensión durante el ensayo y represéntala en una gráfica respecto al tiempo.

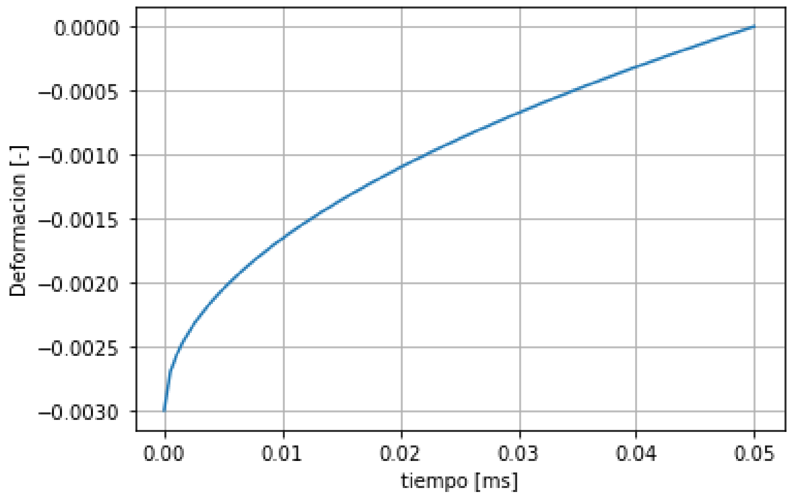
(e) [Puntos] Obtenga la expresión analítica de la curva tensión deformación del material durante el ensayo.

(f) [Puntos] Dibuje la curva tensión deformación del material durante el ensayo.

NOTA: Use las siguientes ecuaciones:
Valor de la velocidad de deformación en la probeta: $\dot{\varepsilon}(t) = \frac{-2c}{L}\varepsilon_r(t)$
Valor de deformación en la probeta: $\varepsilon(t) = \frac{-2c}{L}\int \varepsilon_r(t)dt$
Valor de tensión en la probeta: $\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_t(t)$

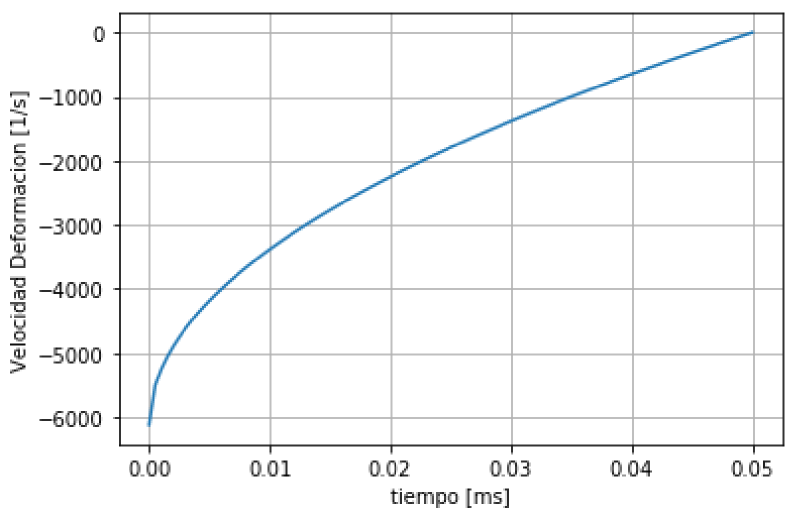
Solution: Para obtener la deformación reflejada se debe aplicar el equilibrio:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t - \varepsilon_i = 0{,}4243 t^{0{,}5} - 0{,}003$$



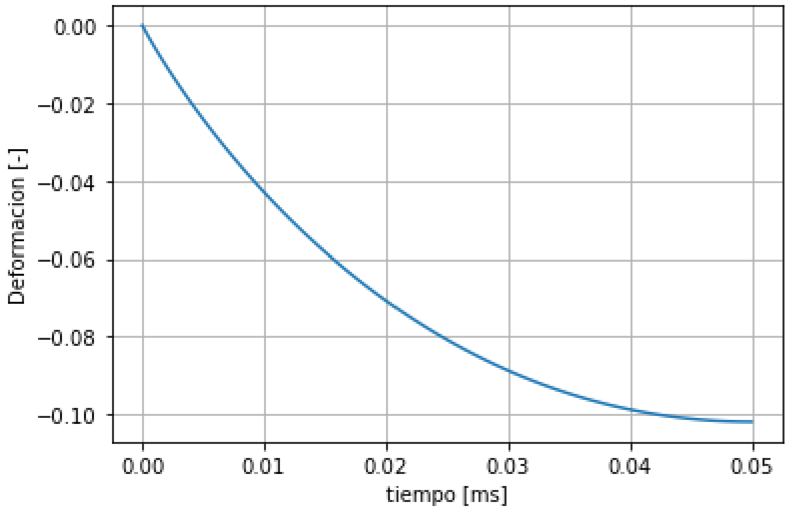
La expresión analítica de la velocidad de deformación es:

$\dot{\varepsilon} = \frac{2c}{L}\left(0{,}4243t^{0{,}5} - 0{,}003\right)$



La expresión analítica de la deformación es:

$\varepsilon = \frac{2c}{L}\left(\frac{0{,}4243}{1{,}5}t^{1{,}5} - 0{,}003t\right)$

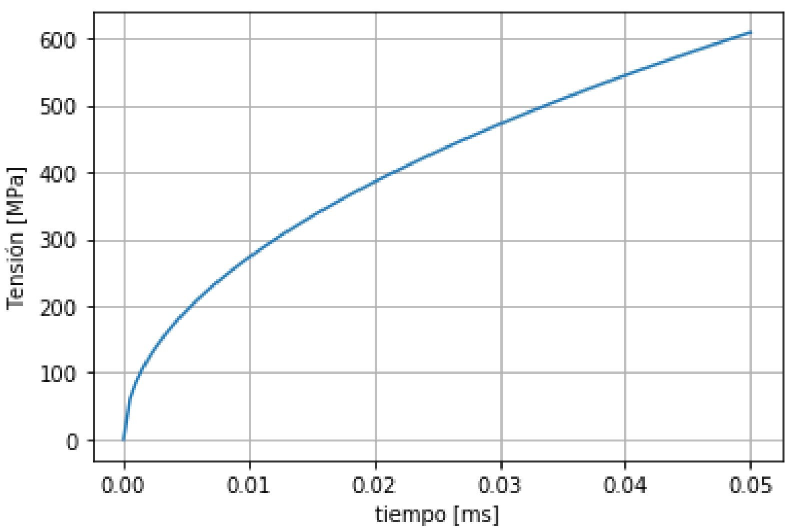


El cálculo de la tensión se basa en la deformación en la deformación transmitida

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s} \varepsilon_T(t) dt = E \cdot \varepsilon_T(t)$$

Por lo que

$$\sigma = E \cdot 0{,}4243 t^{0{,}5}$$

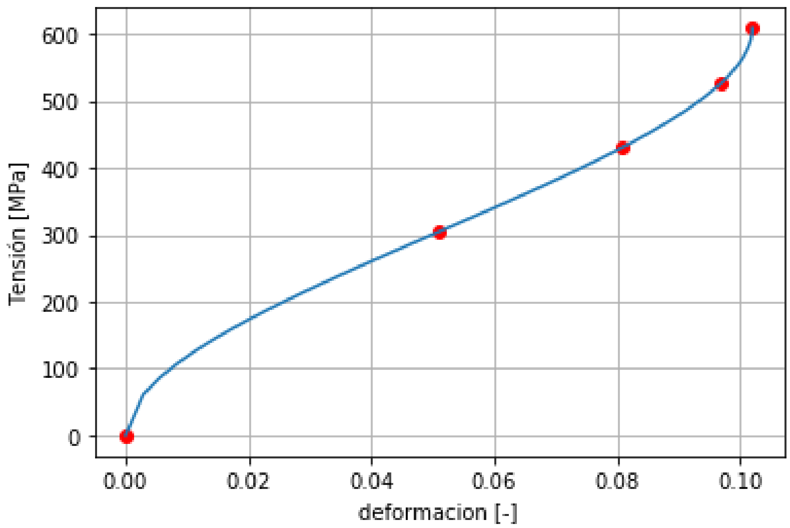


Por ultimo la curva tensión deformación, que obtenemos numéricamente dado que analíticamente no es posible despejar el tiempo de la expresión de la deformación de manera cerrada (sólo aproximada). Para ello calculamos los valores de la tensión y de la deformación para 5 puntos de tiempo diferentes:

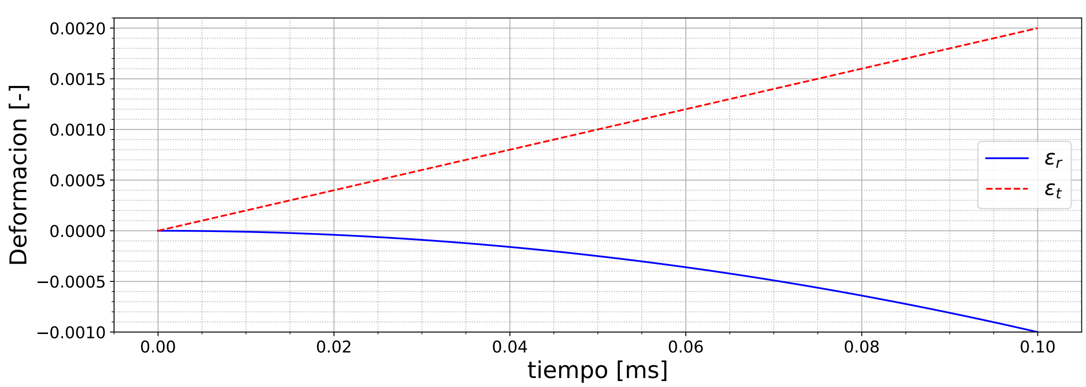
- $t = 0s \rightarrow \varepsilon = 0 \rightarrow \sigma = 0\, MPa$
- $t = 1{,}25e - 05s \rightarrow \varepsilon = 0{,}05099781 \rightarrow \sigma = 304{,}5\, MPa$

- $t = 2{,}50e - 05s \rightarrow \varepsilon = 0{,}08086895 \rightarrow \sigma = 430{,}6\ MPa$
- $t = 3{,}75e - 05s \rightarrow \varepsilon = 0{,}09698683 \rightarrow \sigma = 527{,}4\ MPa$
- $t = 5{,}00e - 05s \rightarrow \varepsilon = 0{,}10198266 \rightarrow \sigma = 609\ MPa$

Representados con puntos rojos en la siguiente figura



8. (Examen parcial 2019) Unas barras Hopkinson de compresión de 22 mm de diámetro se utilizan para ensayar probetas cilíndricas de 20 mm de diámetro y 5 mm de espesor. Las barras del aparato son de acero ($E = 203GPa$ y $\rho = 7804{,}7kg/m^3$). En un determinado ensayo se obtiene el siguiente registro de deformación de las ondas reflejada y transmitida. Supongamos que la onda reflejada $\varepsilon_r = -10^5 t^2$, en cuanto a la deformación transmitida es una recta ascendente $\varepsilon_t = 20t$ (la deformación positiva es de compresión) ambas curvas definidas en el intervalo $0 < t < 100 \cdot 10^{-6}s$ (tal y como se observa en la figura). Determine la curva tensión-deformación del material ensayado y represéntela dando los valores numéricos más significativos.



Fórmulas de interes:

Valor de la velocidad de deformación y de la deformación en la probeta:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{-2c}{L}\varepsilon_r(t); \qquad \varepsilon(t) = \int \dot{\varepsilon}(t)dt$$

Valor de tensión en la probeta:

$$\sigma(t) = \frac{F_A + F_B}{2A_s} = \frac{A_B E}{2A_s}(\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_t(t)) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_t(t)$$

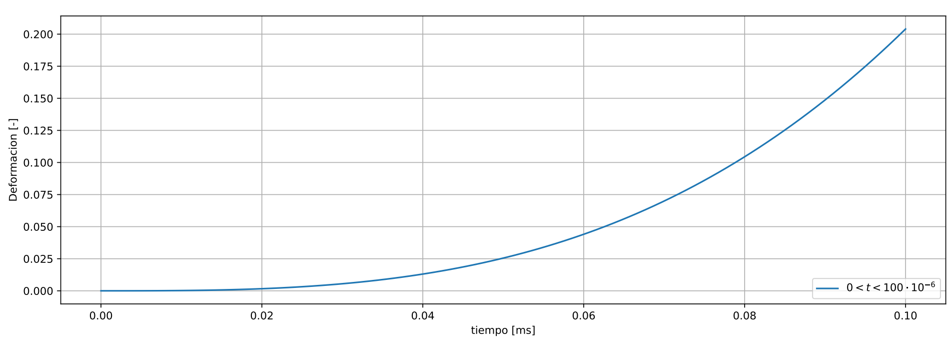
Solution: Para obtener la expresión analítica de la velocidad de deformación durante el ensayo, recurro a la formula: $\dot{\varepsilon}(t) = \frac{2c}{L}\varepsilon_r(t)$, por lo que necesito la expresión analítica de la deformación reflejada, de la gráfica puedo obtener que $0 < t < 100 \cdot 10^{-6} s$, $\varepsilon_r(t) = 10^5 t^2$ Para obtener la expresión analítica de la deformación durante el ensayo:

$$\varepsilon(t) = \int \dot{\varepsilon}(t)dt = \frac{-2c}{L}\int \varepsilon_r(t)dt$$

Por lo que en el tramo $0 < t < 100 \cdot 10^{-6}$:

$$\varepsilon(t) = \frac{2c}{L}\frac{10^5}{3}t^3 + C_1$$

Para calcular c_1 la deformación inicial en tiempo 0 es cero, por lo que $c_1 = 0$

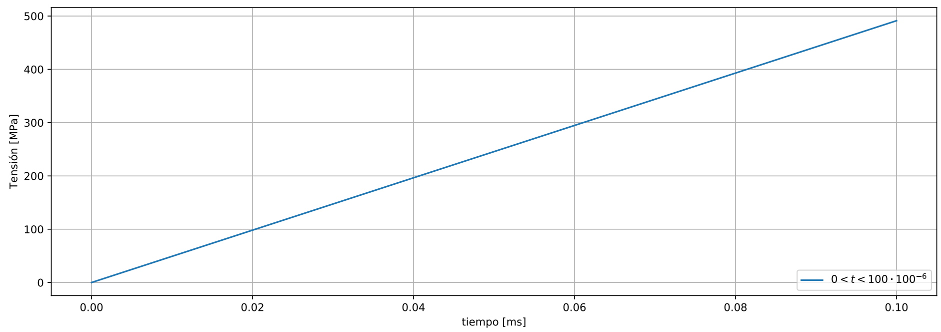


El cálculo de la tensión se basa en la deformación en la deformación transmitida

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_T(t)$$

Primer tramo $0 < t < 100 \cdot 10^{-6}$:

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_T(t) = \frac{A_B E}{A_s}20t$$



Para calcular la curva tensión deformación de la probeta debo despejar la tensión o la deformación del tiempo. Por lo que en el primer tramo $0 < t < 10 \cdot 10^{-6}$:

$$t = \left(\frac{3L\varepsilon(t)}{2c10^5}\right)^{1/3}$$

y por lo tanto la tensión será

$$\sigma(t) = \frac{A_B E}{A_s}\varepsilon_T(t) = \frac{A_B E}{A_s} 20 \left(\frac{3L\varepsilon(t)}{2c10^5}\right)^{1/3}$$