

Comunicaciones Digitales

Capítulo 1

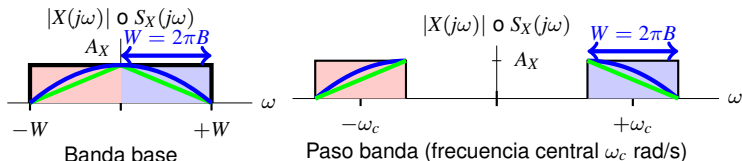
Modulaciones lineales

Marcelino Lázaro

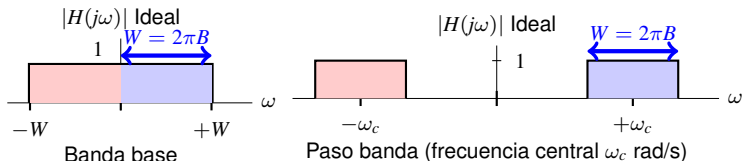
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Objetivos

- Generación de señales con ancho de banda finito (limitadas en banda)
 - ▶ Los canales reales tienen un ancho de banda finito
 - ▶ Ancho de banda de una señal
 - ★ Rango de frecuencias POSITIVAS con componentes frecuenciales no nulas
 - ★ Notation: B Hz, $W = 2\pi B$ rad/s
 - Señales en banda base
 - Señales paso banda (frecuencia central ω_c rad/s)



- Diseño para transmitir información digital a través de canales lineales no ideales



- ▶ Respuesta no ideal del canal (respuesta no plana en la banda): distorsión lineal

Índice de contenidos

- Modulaciones PAM en banda base
 - ▶ Constelaciones y filtros transmisores
 - ▶ Densidad espectral de potencia
 - ▶ Canal discreto equivalente
 - ★ Transmisión a través de canales gaussianos
 - ★ Transmisión a través de canales lineales
 - ▶ Interferencia intersimbólica (ISI: *Inter-Symbol Interference*)
 - ▶ Caracterización de la secuencia de ruido en tiempo discreto
- Modulaciones PAM paso banda
 - ▶ Generación de señales moduladas paso banda
 - ▶ Constelaciones
 - ▶ Densidad espectral de potencia
 - ▶ Canal discreto equivalente
 - ★ Transmisión a través de canales gaussianos
 - ★ Transmisión a través de canales lineales
 - ▶ Caracterización de la secuencia de ruido en tiempo discreto

Teoría de la Comunicación - Modelo básico

- Modulación lineal en un espacio de señales N -dimensional

$$s(t) = \sum_n \sum_{j=0}^{N-1} A_j[n] \phi_j(t - nT)$$

- ▶ La información se transporta linealmente
 - ★ En la amplitud de N señales ortonormales $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
- ▶ Codificador: $A[n]$
 - ★ Constelación en un espacio de dimensión N
 - ★ Diseñado considerando energía (E_s) y prestaciones (P_e , BER)
 - E_s : energía media por símbolo ($E_s = E[|A[n]|^2]$)
 - P_e : probabilidad de error de símbolo
 - BER: tasa de error binaria
- ▶ Modulador: $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ★ Diseñado considerando las características del canal
 - ★ Ideal: la única distorsión que aparece en la transmisión es la adición de ruido (blanco y gaussiano)

Modulación PAM en banda base

- Modulación unidimensional: $N = 1$

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) \begin{cases} \text{PAM (Pulse Amplitude Modulation)} \\ \text{ASK (Amplitude Shift Keying)} \end{cases}$$

- Tiempo de símbolo T (tasa de símbolo $R_s = 1/T$ baudios)
- La secuencia $A[n]$ es la secuencia de símbolos
 - ▶ El alfabeto se denomina constelación (representación 1-D)
 - ▶ Conversión de bits a símbolos: codificador
 - ★ Constelaciones M -árias (M -PAM)

$$M = 2^m \text{ symbols} \quad m = \log_2 M \text{ bits/símbolo}$$

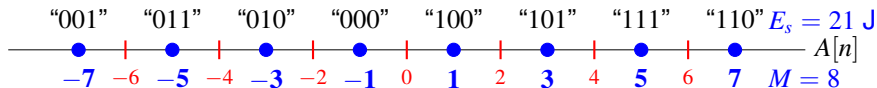
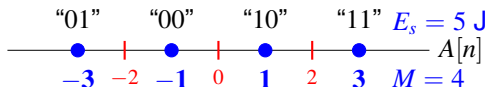
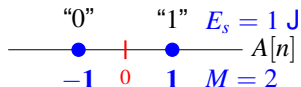
- ★ Asignación binaria: codificación de Gray
- ★ Niveles normalizados:

$$A[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}, \quad E_s = E[|A[n]|^2] = \frac{M^2 - 1}{3} J$$

- Señal $g(t)$ (base ortonormal de dimensión 1)
 - ▶ Normalización: energía unidad ($\mathcal{E}\{g(t)\} = 1 J$)
 - ▶ Recibe habitualmente dos nombres:
 - ★ Filtro transmisor
 - ★ Pulso conformador (aunque no sea necesariamente un pulso)

Ejemplos de constelaciones M -PAM

- Niveles normalizados: $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$
 - ▶ Distancia 1 a los umbrales de decisión (para sÍmb. equiprobables)
- Asignación binaria con codificación de Gray
 - ▶ Asignación para sÍmbolos a mínima distancia difiere sólo en 1 bit
- Ejemplos: 2-PAM, 4-PAM, 8-PAM



Codificador: Tasa de símbolo vs. tasa binaria

- Duración de símbolo (o período de símbolo): T
 - ▶ Se transmite un símbolo de la secuencia $A[n]$ cada T segundos
- Constelaciones M -árias transmiten $m = \log_2 M$ bits por símbolo
 - ▶ Asignación binaria: codificación de Gray
- Hay dos tasas de transmisión (velocidades) en un sistema digital
 - ▶ Tasa de símbolo (para la secuencia de símbolos $A[n]$)

$$R_s = \frac{1}{T} \text{ baudios (símbolos/s)}$$

- ▶ Tasa binaria (para la secuencia de bits $B_b[\ell]$)

$$R_b = \frac{1}{T_b} \text{ bits/s}$$

- Relaciones entre ambas tasas de transmisión

$$R_b = m \times R_s \quad R_s = \frac{R_b}{m}$$

$$T = m \times T_b \quad T_b = \frac{T}{m}$$

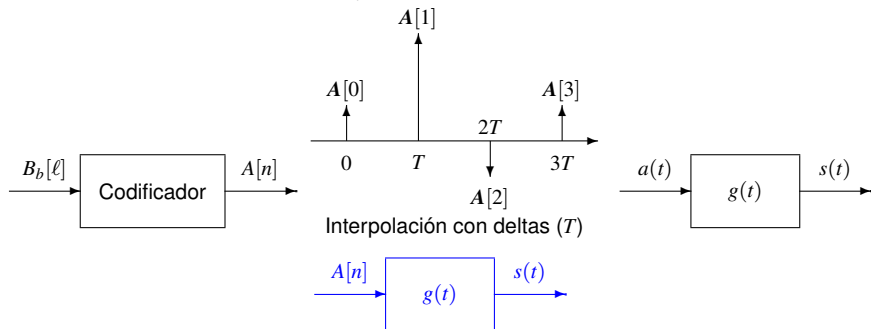
Modulación PAM $s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT)$ mediante filtrado

- Conversión de secuencia en tiempo discreto $A[n]$ a tiempo continuo
 - ▶ Señal de símbolos: tren de impulsos (deltas) con amplitudes $A[n]$ en nT

$$a(t) = \sum_n A[n] \delta(t - nT)$$

- Generación de la señal PAM

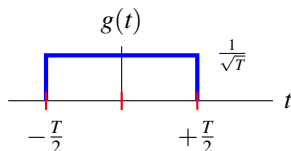
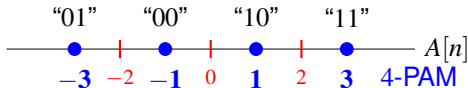
$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) = a(t) * g(t)$$



Representación simplificada equivalente

Ejemplo: modulación de una secuencia binaria (10 bits ini.)

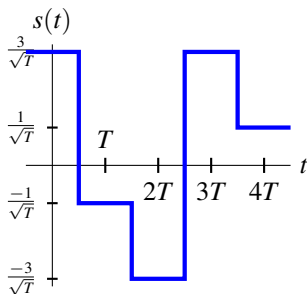
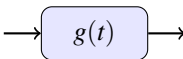
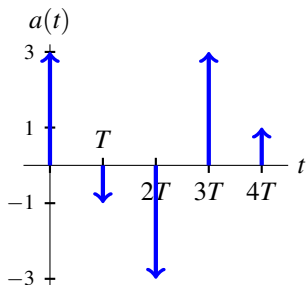
ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$B_b[\ell]$	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	...



- Codificación: bits a símbolos

n	0	1	2	3	4	...
$A[n]$	+3	-1	-3	+3	+1	...

- Tren de deltas $a(t)$ + filtrado de $a(t)$ con $g(t)$: señal PAM modulada



Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de variables aleatorias (proceso aleatorio estacionario)
 - ▶ Media $m_A[n] = E[A[n]] = m_A$
 - ▶ Función de autocorrelación
 $R_A[n+k, n] = E[A[n+k] A^*[n]] = R_A[k]$
 - ▶ Energía media por símbolo $E_s = E[|A[n]|^2]$
 - ▶ La densidad espectral de potencia es

$$S_A(e^{j\omega}) = \mathcal{TF} \{R_A[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k] e^{-j\omega k}$$

- Sea $g(t)$ cualquier señal determinista con transformada de Fourier $G(j\omega)$

Revisión - Cálculo de la densidad espectral de potencia

- Densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio $X(t)$

$$S_X(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X^{[T]}(j\omega)|^2}{T} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X^{[T]}(j\omega)|^2]}{T}$$

Interpretación: promedio de la respuesta en frecuencia del proceso (truncado) en módulo al cuadrado

- Teorema de Wiener-Khinchin
Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo \mathcal{A} , de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_X(t + \tau, t) dt \right| < \infty,$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de autocorrelación

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF} \{ \langle R_X(t + \tau, t) \rangle \}$$

$$\langle R_X(t + \tau, t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t + \tau, t) dt$$

Corolarios Teorema de Wiener-Khinchin

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF} \{R_X(\tau)\}$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es ciclostacionario y se cumple que

$$\left| \int_0^{T_0} R_X(t + \tau, t) dt \right| < \infty,$$

entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF} \left\{ \tilde{R}_X(\tau) \right\},$$

donde

$$\tilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_X(t + \tau, t) dt,$$

y T_0 es el período del proceso cicloestacionario.

Media y función de autocorrelación de una PAM banda base

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A[n] g(t - nT)$$

$$m_S(t) = E \left[\sum_n A[n] g(t - nT) \right] = \sum_n \underbrace{E[A[n]]}_{m_A[n]} g(t - nT) = m_A \sum_n g(t - nT)$$

$$\begin{aligned} R_S(t + \tau, t) &= E[s(t + \tau) s^*(t)] \\ &= E \left[\left(\sum_k A[k] g(t + \tau - kT) \right) \left(\sum_j A^*[j] g^*(t - jT) \right) \right] \\ &= \sum_k \sum_j \underbrace{E[A[k] A^*[j]]}_{R_A[k-j]} g(t + \tau - kT) g^*(t - jT) \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k - j] g(t + \tau - kT) g^*(t - jT) \end{aligned}$$

Cicloestacionariedad

$$\begin{aligned}m_S(t+T) &= m_A \sum_n g(t+T-nT) = m_A \sum_n g(t-(n-1)T) \\ &\stackrel{n'=n-1}{=} m_A \sum_{n'} g(t-n'T) = m_S(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_S(t+\tau+T, t+T) &= \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k-j] g(t+\tau+T-kT)g^*(t+T-jT) \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k-j] g(t+\tau-(k-1)T)g^*(t-(j-1)T) \\ &\stackrel{k'=k-1, j'=j-1}{=} \sum_{k'} \sum_{j'} R_A[(k'+1)-(j'+1)] g(t+\tau-k'T)g^*(t-j'T) \\ &= \sum_{k'} \sum_{j'} R_A[k'-j'] g(t+\tau-k'T)g^*(t-j'T+\tau) = R_S(t+\tau, t)\end{aligned}$$

Promedio temporal de la autocorrelación

$$\begin{aligned}\tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T R_S(t + \tau, t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_k \sum_j R_A[k - j] g(t + \tau - kT) g^*(t - jT) dt \\ &\stackrel{m=k-j}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m] \int_0^T g(t + \tau - kT) g^*(t - (k - m)T) dt \\ &\stackrel{u=t+\tau-kT}{=} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\tau-kT}^{\tau-(k-1)T} g(u) g^*(u - \tau + mT) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m] \int_{-\infty}^{\infty} g(u) g^*(-(\tau - mT - u)) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k] r_g(\tau - kT)\end{aligned}$$

$$r_g(t) = g(t) * g^*(-t)$$

Densidad Espectral de Potencia (DEP)

$$\begin{aligned}\tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k] r_g(\tau - kT) \\ &= \frac{1}{T} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k] \delta(\tau - kT) \right) * r_g(\tau) \\ &= \frac{1}{T} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k] \delta(\tau - kT) \right) * g(\tau) * g^*(-\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_S(j\omega) &= \mathcal{TF} \{ \tilde{R}_S(\tau) \} \\ &= \frac{1}{T} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k] e^{-j\omega kT} \right) G(j\omega) G^*(j\omega) \\ &= \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2\end{aligned}$$

Densidad espectral de potencia - Análisis

$$S_S(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2$$

- Tres contribuciones:

- ▶ Factor de escala constante dado por la tasa de símbolo:
 $\frac{1}{T} = R_s$ baudios
- ▶ Componente determinista dada por $g(t)$: $|G(j\omega)|^2$
- ▶ Componente estadística (estocástica) dada por $A[n]$: $S_A(e^{j\omega})$
 - ★ Evaluada en ωT , i.e. $S_A(e^{j\omega T})$

- Para secuencias $A[n]$ blancas (caso más frecuente)

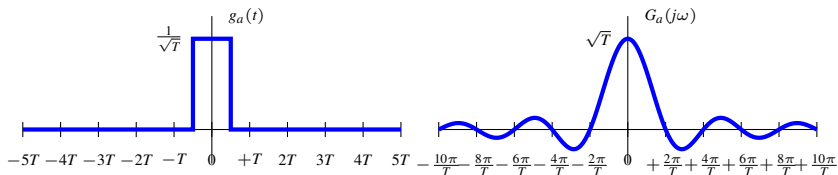
$$R_A[n] = E_s \delta[n] \quad \overset{\mathcal{TF}}{\leftrightarrow} \quad S_A(e^{j\omega}) = E_s = E [|A[n]|^2]$$

$$S_S(j\omega) = \frac{E_s}{T} |G(j\omega)|^2 = E_s R_s |G(j\omega)|^2$$

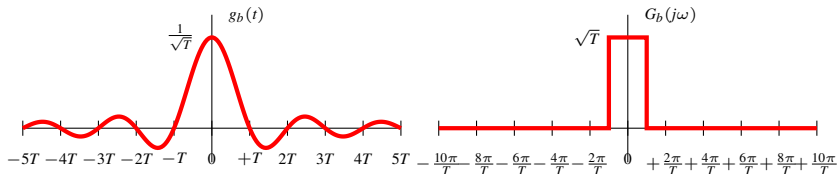
- ▶ $g(t)$: Pulso conformador (determina la forma del espectro)

Ejemplo de pulsos

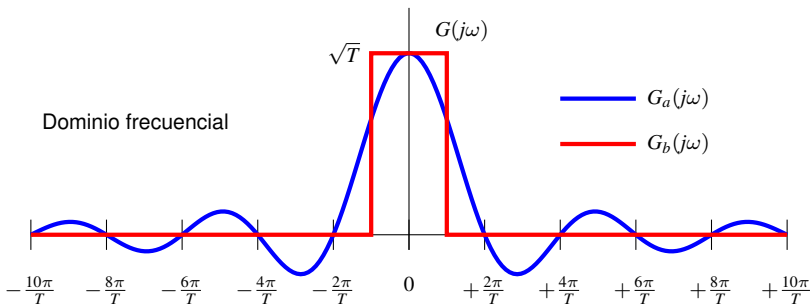
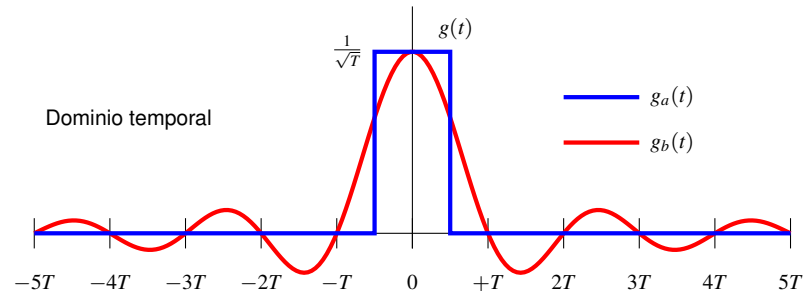
$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad G_a(j\omega) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



$$g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad G_b(j\omega) = \sqrt{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

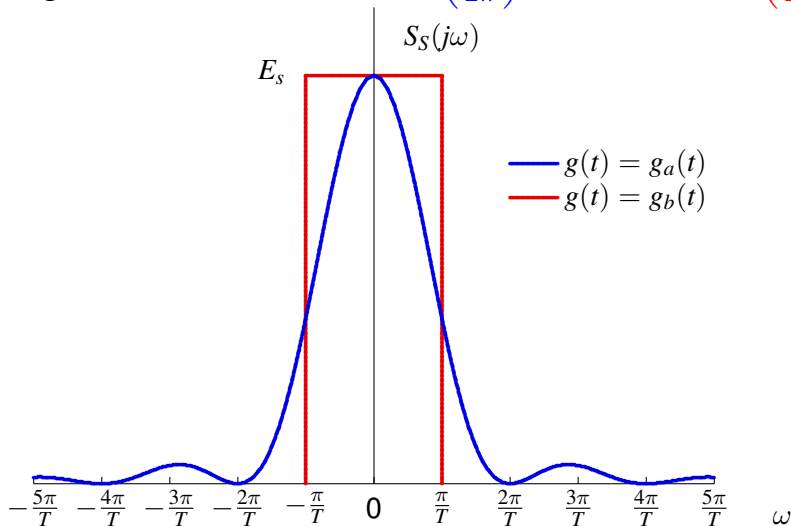


Ejemplo de pulsos (II)



Ejemplos de $S_S(j\omega)$: secuencia $A[n]$ blanca

$$S_S(j\omega) = \frac{E_s}{T} |G(j\omega)|^2 \quad G_a(j\omega) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad G_b(j\omega) = \sqrt{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



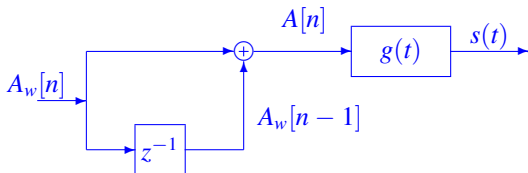
Ejemplos de $S_S(j\omega)$: secuencia $A[n]$ coloreada

- La forma de la D.E.P. se puede modificar también introduciendo correlación en la secuencia transmitida
- Secuencia de información típica: secuencia blanca $A_w[n]$
 - ▶ M -PAM: $A_w[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$
 - ▶ Energía media por símbolo: $E_s = E[|A_w[n]|^2] = \frac{M^2-1}{3}$
- Generación de una secuencia no blanca (*coloreada*) $A[n]$

$$\text{Ejemplo: } A[n] = A_w[n] + A_w[n-1]$$

- Transmisión de la secuencia coloreada $A[n]$

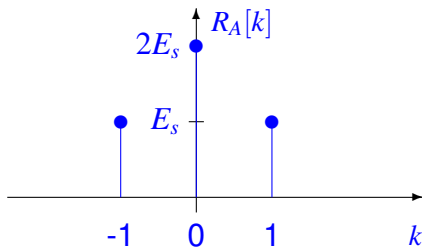
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A[n] g(t - nT)$$



Función de autocorrelación de $A[n]$

- Autocorrelación de $A_w[n]$: $R_{A_w}[k] = E_s \delta[k]$
- Función de autocorrelación de $A[n]$

$$\begin{aligned}R_A[k] &= E [A[n+k] A^*[n]] \\&= E [(A_w[n+k] + A_w[n+k-1]) (A_w^*[n] + A_w^*[n-1])] \\&= E [A_w[n+k] A_w^*[n]] + E [A_w[n+k] A_w^*[n-1]] \\&\quad + E [A_w[n+k-1] A_w^*[n]] + E [A_w[n+k-1] A_w^*[n-1]] \\&= R_{A_w}[k] + R_{A_w}[k+1] + R_{A_w}[k-1] + R_{A_w}[k] \\&= 2R_{A_w}[k] + R_{A_w}[k+1] + R_{A_w}[k-1] \\&= E_s(2\delta[k] + \delta[k+1] + \delta[k-1])\end{aligned}$$



Densidad espectral de potencia

- Densidad espectral de la secuencia $A[n]$

$$\begin{aligned} S_A(e^{j\omega}) &= \mathcal{TF} \{R_A[k]\} = \sum_k R_A[k] e^{-j\omega k} \\ &= E_s (2 e^{j0} + e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \\ &= 2E_s [1 + \cos(\omega)] \end{aligned}$$

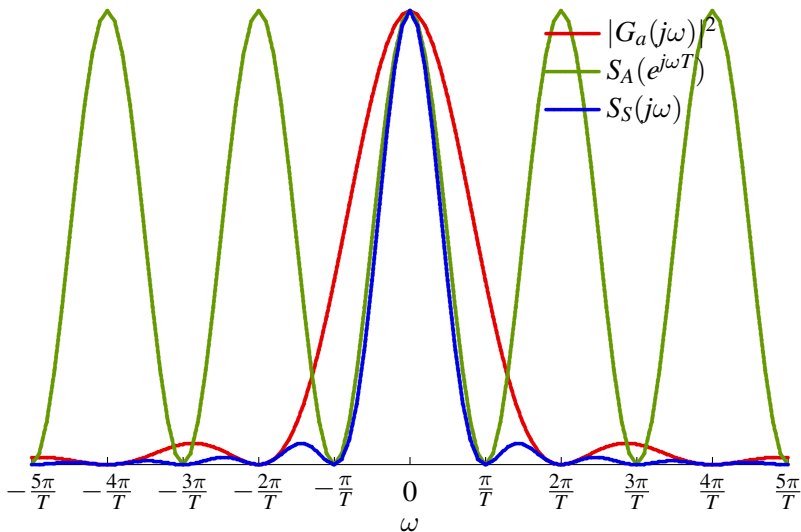
- Densidad espectral de la señal PAM en banda base $s(t)$
Este sistema transmite la secuencia de datos coloreada $A[n]$

$$S_S(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2$$

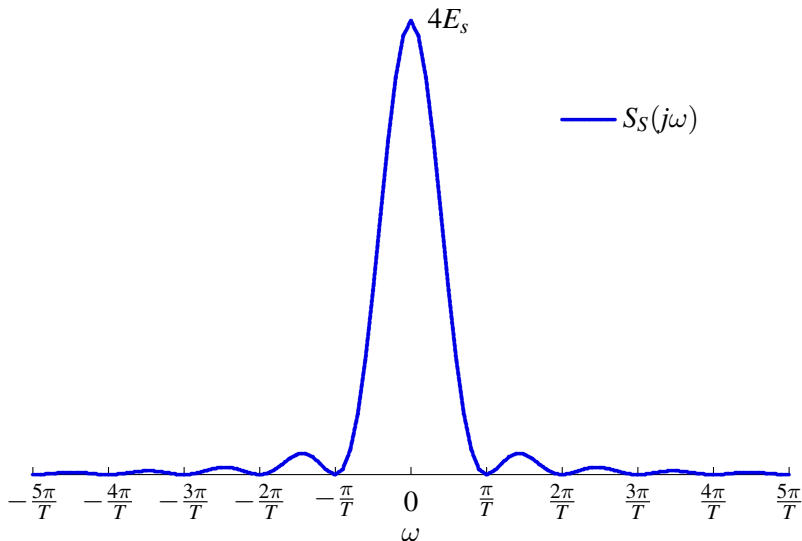
Sustituyendo la expresión obtenida para $S_A(e^{j\omega})$, evaluada en ωT , se tiene la expresión de la densidad espectral para esta señal

$$S_S(j\omega) = \frac{2E_s}{T} [1 + \cos(\omega T)] |G(j\omega)|^2$$

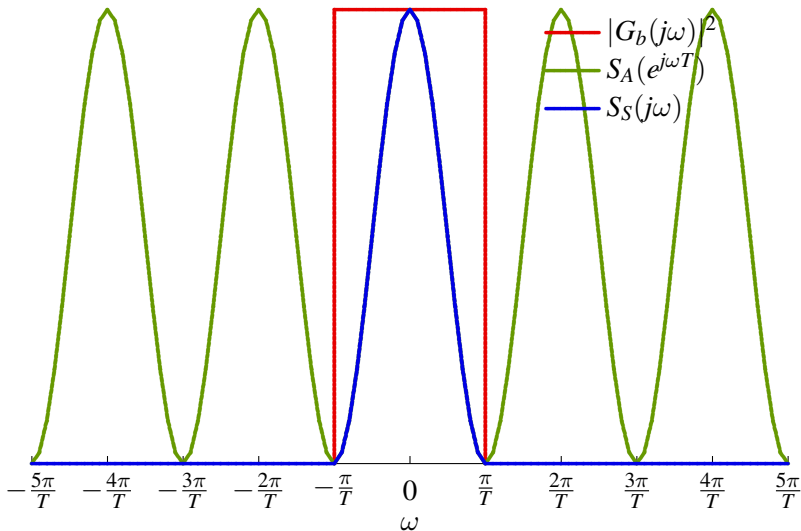
Densidad espectral de potencia con $g_a(t)$



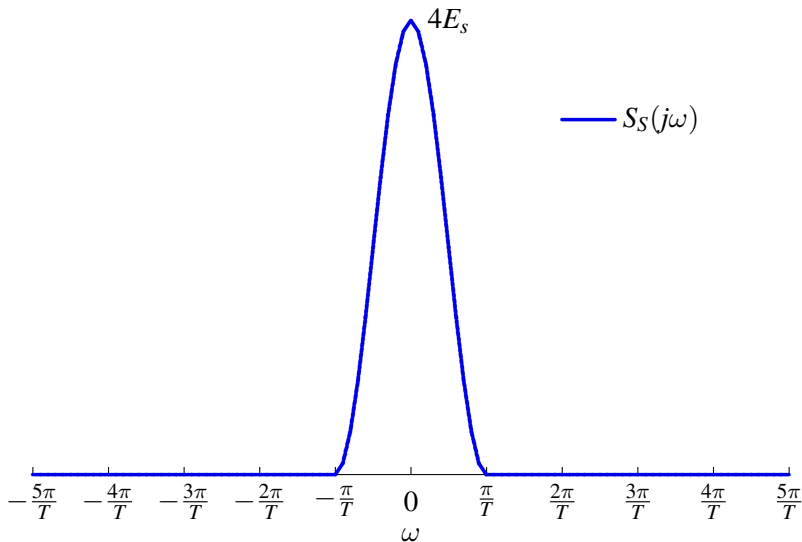
Densidad espectral de potencia con $g_a(t)$



Densidad espectral de potencia con $g_b(t)$



Densidad espectral de potencia con $g_b(t)$



Potencia de una modulación PAM en banda base

- La potencia puede obtenerse integrando $S_s(j\omega)$

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) d\omega$$

- Para secuencias $A[n]$ blancas: $S_s(j\omega) = \frac{E_s}{T} |G(j\omega)|^2$

$$P_S = \underbrace{\frac{E_s}{T}}_{E_s \times R_s} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}_{\mathcal{E}\{g(t)\}}$$

- Si $g(t)$ está normalizado, aplicando la relación de Parseval

$$P_S = \frac{E_s}{T} = E_s \times R_s \text{ Watts}$$

Selección de las formas de onda para $g(t)$

- Selección para identificar la secuencia $A[n]$ muestreando $s(t)$

(a) Pulsos con duración limitada al período de símbolo: T s

- ★ No hay solapamiento entre pulsos desplazados nT segundos

$$\text{Ejemplo : } g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

- ★ El símbolo $A[n]$ determina la amplitud de la señal en su intervalo de símbolo asociado
- ★ Problema: ancho de banda infinito

(b) Pulsos con una duración infinita: ancho de banda finito

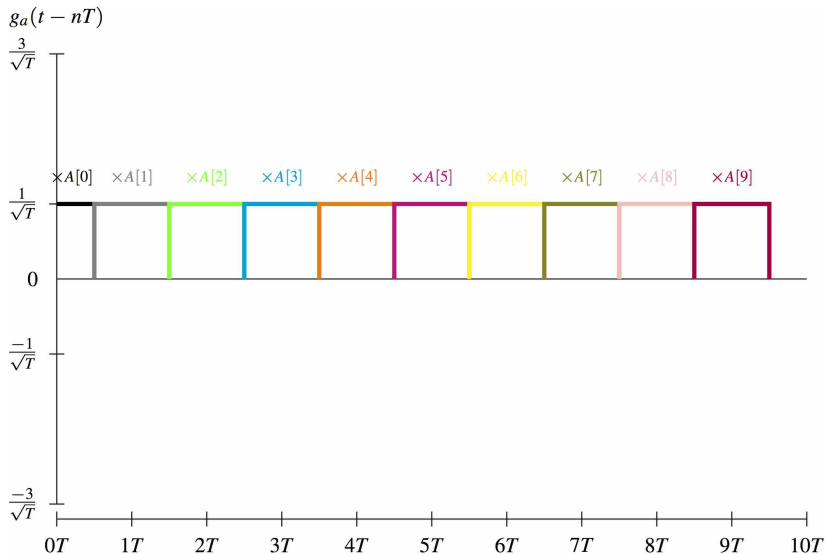
- ★ Solapamiento: interferencia no destructiva en algún punto cada T segundos

$$g(nT) = 0, \forall n \neq 0; \text{ Ejemplo : } g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- ★ El símbolo $A[n]$ determina la amplitud de la señal en el punto no destructivos asociado en su intervalo

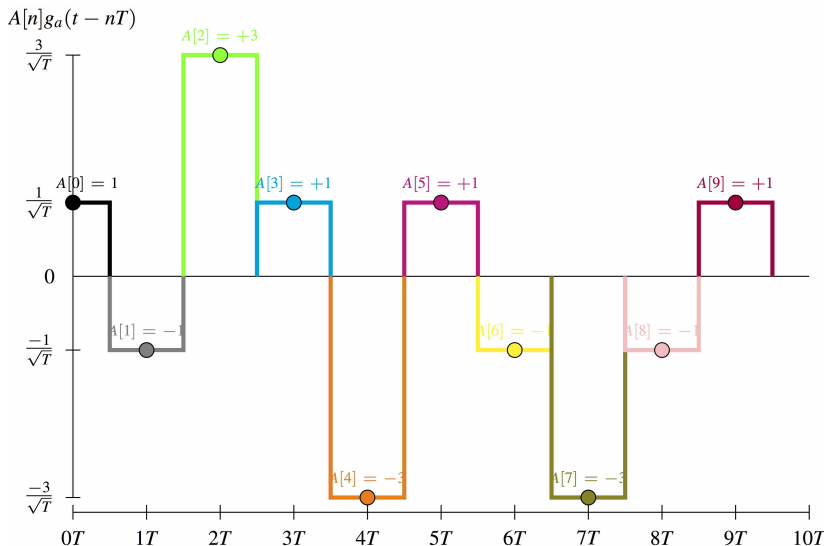
Pulso rectangular : pulsos retardados nT ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	+1	-1	+3	+1	-3	+1	-1	-3	-1	+1



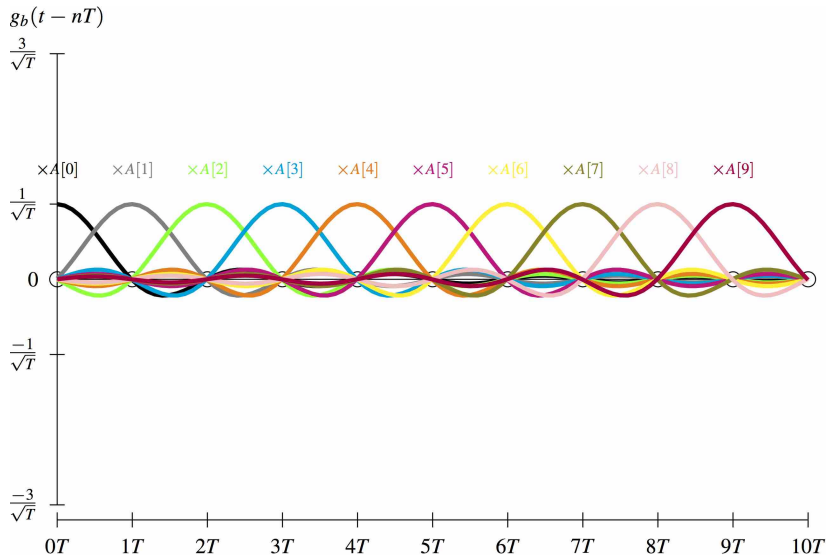
Pulso rectangular : Contribución de cada símbolo

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	+1	-1	+3	+1	-3	+1	-1	-3	-1	+1



Pulso sinc : pulsos retardados nT ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

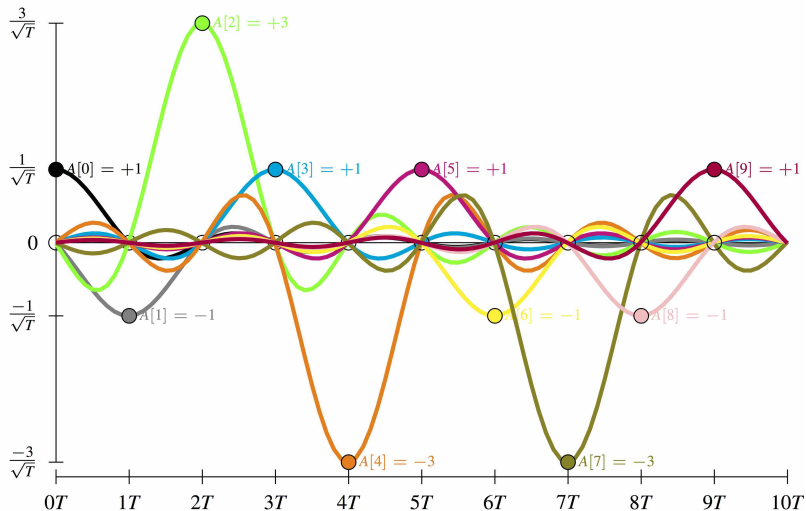
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	+1	-1	+3	+1	-3	+1	-1	-3	-1	+1



Pulso sinc : Contribución de cada símbolo

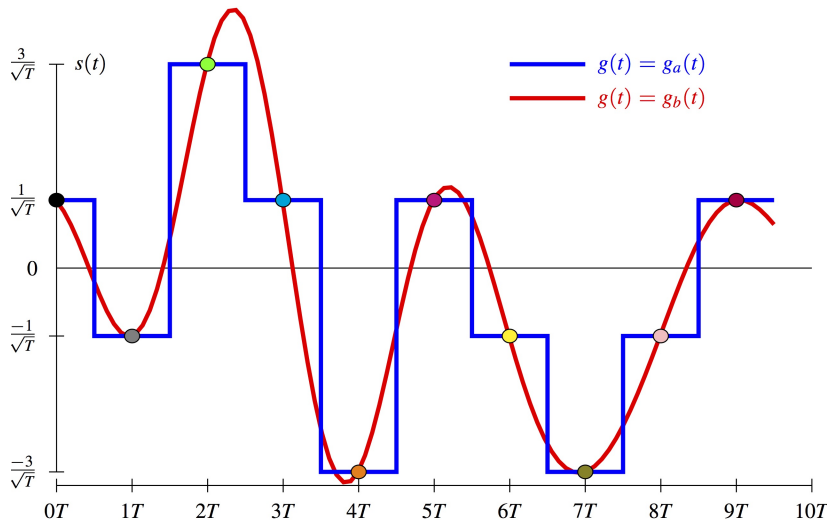
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	+1	-1	+3	+1	-3	+1	-1	-3	-1	+1

$A[n]g_b(t - nT)$



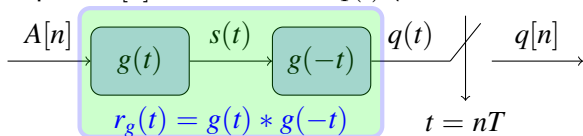
Señal modulada PAM $s(t)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	+1	-1	+3	+1	-3	+1	-1	-3	-1	+1



Recuperación de $A[n]$ a partir de $s(t)$ con un filtro adaptado

- Recuperación de $A[n]$ en un escenario ideal
 - ▶ No hay ninguna distorsión sobre la señal $s(t)$
 - ▶ Se aplica un filtro adaptado sobre $s(t)$
 - ▶ Se recupera $A[n]$ muestreando $q(t)$ (salida del filtro)



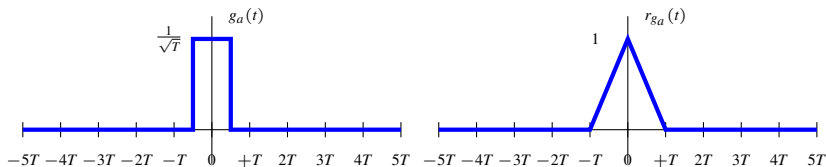
$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) \quad q(t) = \sum_n A[n] r_g(t - nT)$$

- Condiciones para recuperar $A[n]$ de $q[n]$ (muestreando $q(t)$)
 - ▶ Las mismas que antes, pero aplicadas a $r_g(t)$ y no a $g(t)$
 - ★ Condiciones para formas del tipo (a)
 - $r_g(t)$ de duración T
 - ★ Condiciones para formas del tipo (b)
 - Ceros periódicos en $r_g(t)$ ($r_g(nT) = 0 \forall n \neq 0$)

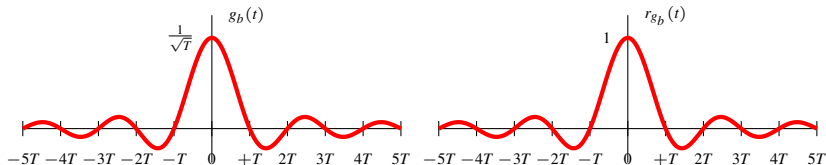
NOTA: Si la duración de $g(t)$ es menor que T , $r_g(t)$ cumple las condiciones (b)

Forma de $r_g(t)$ para los pulsos de ejemplo

$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow r_{g_a}(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

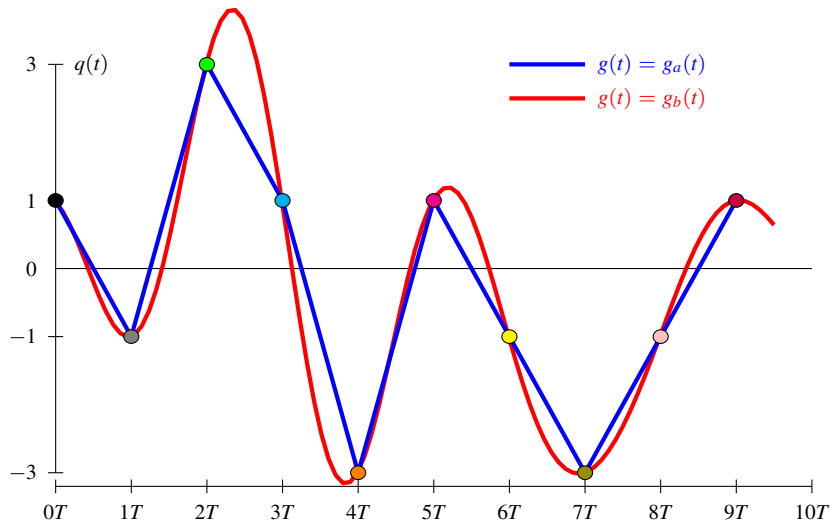


$$g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow r_{g_b}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$



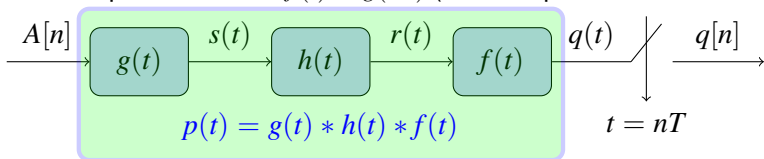
Señal recibida $q(t)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	+1	-1	+3	+1	-3	+1	-1	-3	-1	+1



Recuperación de $A[n]$ transmitiendo por un canal (sin ruido)

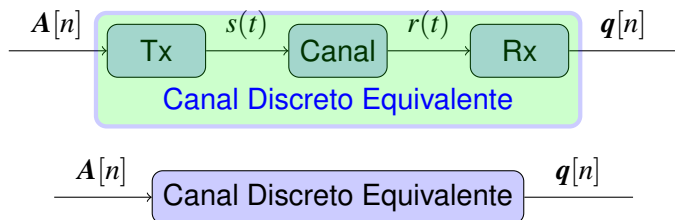
- Recuperación de $A[n]$ transmitiendo por un canal
 - ▶ Por simplicidad, se asume que no hay ruido
 - ▶ A la salida del canal se aplica un filtro receptor $f(t)$
 - ★ Opción habitual: $f(t) = g(-t)$ (filtro adaptado al transmisor)



$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) \quad q(t) = \sum_n A[n] p(t - nT)$$

- Ahora las condiciones deben evaluarse sobre $p(t)$
 - ▶ Duración limitada a T segundos
 - ▶ Pasos cíclicos por cero cada T segundos
- Diseño para cumplir las condiciones
 - ▶ Transmisor $g(t)$ y receptor $f(t)$ pueden diseñarse
 - ▶ El canal $h(t)$ viene dado, no es un parámetro de diseño

Canal discreto equivalente

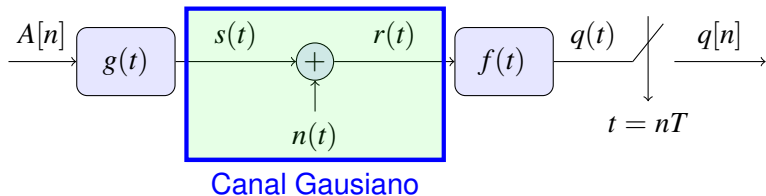


- Proporciona la expresión en tiempo discreto de las observaciones a la salida del demodulador $q[n]$ en función de la secuencia transmitida $A[n]$
 - ▶ En sistemas ideales: $q[n] = A[n] + z[n]$
Si $z[n]$ es gaussiano, las distribuciones condicionales (dado $A[n] = a_i$)

$$f_{q[n]|A[n]}(q|a_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|q-a_i\|^2}{N_0}}$$

- A continuación se obtendrá dichas expresiones para dos canales
 - ▶ Canal gaussiano
 - ▶ Canal lineal

Transmisión de señales PAM sobre canales gaussianos



- Modelo de canal gaussiano

- ▶ La única distorsión durante la transmisión es la suma de ruido

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

$n(t)$: proceso aleatorio estacionario, blanco y gaussiano, media nula y $S_n(j\omega) = N_0/2$

- Filtro receptor $f(t)$

- ▶ Configuración habitual: filtro adaptado al transmisor

$$f(t) = g^*(-t) = g(-t), \text{ ya que } g(t) \text{ es real}$$

- Señal filtrada antes del muestreador

$$q(t) = s(t) * f(t) + n(t) * f(t)$$

Canal discreto equivalente para canal gaussiano

- Señal antes del muestreo

$$q(t) = \underbrace{\left(\overbrace{\sum_k A[k] g(t - kT)}^{s(t)} \right) * f(t)}_{\text{salida sin ruido } o(t)} + \underbrace{n(t) * f(t)}_{\text{ruido filtrado } z(t)}$$

$$o(t) = \sum_k A[k] \left(g(t - kT) * f(t) \right) = \sum_k A[k] p(t - kT)$$

- $p(t) = g(t) * f(t)$: respuesta conjunta transmisor-receptor
 - ▶ Esta respuesta conjunta determina la salida sin ruido en el receptor
- Observación discreta a la salida del demodulador

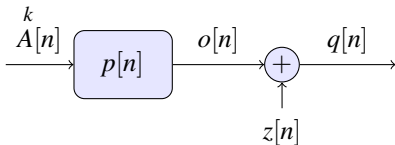
$$q[n] = q(t)|_{t=nT} = q(nT) = \sum_k A[k] p((n - k)T) + z(nT)$$

Canal discreto equivalente para canal gaussiano (II)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT}$$

$$q[n] = \sum_k A[k] p[n - k] + z[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$



- Definición de la respuesta conjunta $p(t)$ (o $P(j\omega)$)

$$p(t) = g(t) * f(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega) F(j\omega)$$

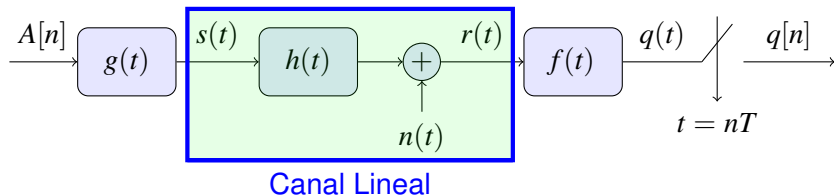
- Utilizando filtros adaptados:

$$f(t) = g(-t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad F(j\omega) = G^*(j\omega)$$

$$p(t) = g(t) * g(-t) = r_g(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega) G^*(j\omega) = |G(j\omega)|^2$$

$r_g(t)$: función de autocorrelación continua de $g(t)$ (o función de ambigüedad temporal de $g(t)$)

Transmisión de señales PAM a través de canales lineales



● Modelo de canal lineal

- ▶ La señal PAM $s(t)$ sufre distorsión lineal durante la transmisión
- ▶ También se añade ruido blanco y gaussiano

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

$h(t)$: respuesta al impulso del sistema que modela la distorsión lineal

$n(t)$: proceso estacionario, blanco, gaussiano, con media nula y $S_n(j\omega) = N_0/2$

● Filtro receptor $f(t)$

- ▶ Configuración habitual: filtro adaptado $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$

● Señal filtrada a la entrada del muestreador

$$q(t) = r(t) * f(t) = s(t) * h(t) * f(t) + n(t) * f(t)$$

Canal discreto equivalente para canal lineal

- Señal antes del muestreo

$$\begin{aligned}q(t) &= \left(\overbrace{\sum_k A[k] g(t - kT)}^{s(t)} \right) * h(t) * f(t) + n(t) * f(t) \\&= \sum_k A[k] \left(g(t - kT) * h(t) * f(t) \right) + n(t) * f(t) \\&= \sum_k A[k] p(t - kT) + z(t)\end{aligned}$$

- $p(t) = g(t) * h(t) * f(t)$: resp. conjunta transmisor-canal-receptor
 - ▶ Si se usa un filtro adaptado en el receptor

$$p(t) = g(t) * h(t) * g^*(-t) = r_g(t) * h(t)$$

$r_g(t)$: autocorrelación temporal de $g(t)$ (función de ambigüedad de $g(t)$)

- Observación discreta a la salida del demodulador

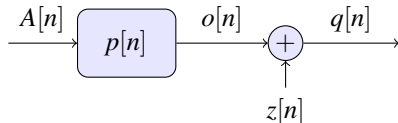
$$q[n] = q(t)|_{t=nT} = q(nT) = \sum_k A[k] p((n - k)T) + z(nT)$$

Canal discreto equivalente para canal lineal (II)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT}$$

$$q[n] = \sum_k A[k] p[n - k] + z[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$



- Mismo modelo básico que para canal gaussiano

- Nueva definición para $p(t)$: incluye el efecto de $h(t)$

$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t) \quad \overset{\mathcal{TF}}{\iff} \quad P(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega) F(j\omega)$$

- Utilizando filtros adaptados: $f(t) = g(-t) \quad \overset{\mathcal{TF}}{\iff} \quad F(j\omega) = G^*(j\omega)$

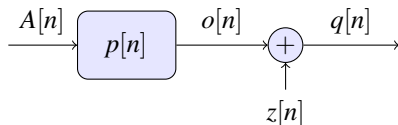
$$p(t) = r_g(t) * h(t) \quad \overset{\mathcal{TF}}{\iff} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2 H(j\omega)$$

Interferencia intersimbólica (ISI)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t)|_{t=nT} \quad q[n] = o[n] + z[n]$$

$$\text{Salida sin ruido } o[n] = \sum_k A[k] p[n - k] = A[n] * p[n]$$



- Ideal

$$p[n] = \delta[n] \rightarrow o[n] = A[n]$$

- Real: Interferencia entre símbolos (ISI)

$$o[n] = A[n] * p[n] = \sum_k A[k] p[n - k] = \underbrace{A[n]}_{\text{Ideal}} \underbrace{p[0]}_{\text{escalado}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n - k]}_{\text{ISI}}$$

Interferencia intersimbólica - Análisis

- Interferencia entre símbolos para el canal discreto $p[n]$

$$o[n] = \underbrace{A[n] p[0]}_{\text{deseado}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n-k]}_{\text{interferencia (ISI)}}$$

- ▶ Efecto de la interferencia entre símbolos

$$\text{ISI} = \sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n-k]$$

Contribución en el instante discreto n de símbolos anteriores y posteriores

$$o[n] = \underbrace{\dots + A[n-2] p[2] + A[n-1] p[1]}_{\text{ISI precursora}} + \underbrace{A[n] p[0]}_{\text{cursor}} + \underbrace{A[n+1] p[-1] + A[n+2] p[-2] + \dots}_{\text{ISI postcursora}}$$

ISI - Efecto : Constelación extendida

- ISI produce una constelación extendida en el receptor

Valores de la salida discreta sin ruido $o[n] = A[n] * p[n]$

- Ejemplo: modulación 2-PAM ($A[n] \in \{\pm 1\}$)

Canal A

$$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$$

Canal B

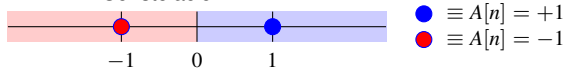
$$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2]$$

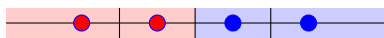
$A[n]$	$A[n-1]$	$o[n]$
+1	+1	$+\frac{3}{2}$
+1	-1	$+\frac{1}{2}$
-1	+1	$-\frac{1}{2}$
-1	-1	$-\frac{3}{2}$

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{7}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{5}{4}$
+1	-1	+1	$+\frac{3}{4}$
+1	-1	-1	$+\frac{1}{4}$
-1	+1	+1	$-\frac{1}{4}$
-1	+1	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{5}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$

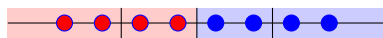
Constelación 2-PAM



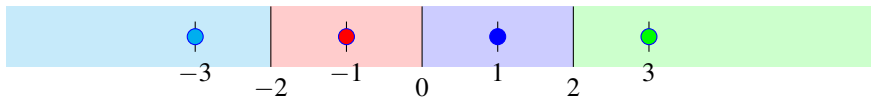
Constelación Extendida (Canal A)



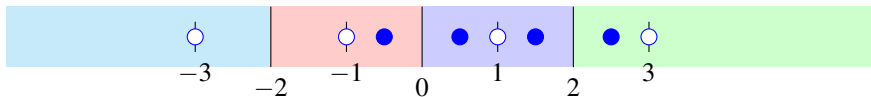
Constelación Extendida (Canal B)



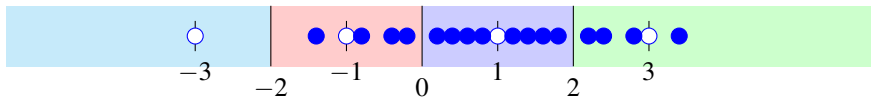
ISI - Efecto : Constelación extendida (II)



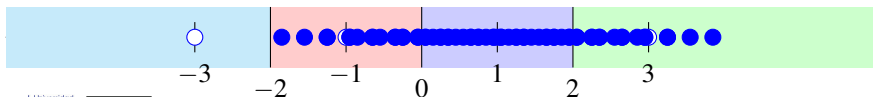
$$A[n] = +1, K_p = 1 : p[n] = \delta[n] + 0,5\delta[n - 1]$$



$$A[n] = +1, K_p = 2 : p[n] = \delta[n] + 0,5\delta[n - 1] + 0,3\delta[n - 2]$$



$$A[n] = +1, K_p = 3 : p[n] = \delta[n] + 0,5\delta[n - 1] + 0,3\delta[n - 2] + 0,15\delta[n - 3]$$



ISI : respuesta conjunta transmisor-canal-receptor $p(t)$

- La respuesta $p(t)$ determina el comportamiento de la ISI
 - ▶ La salida sin ruido depende del valor de $p[n]$
 - ★ Muestreo de la resp. conjunta transmisor-canal-receptor $p(t)$
 - ★ Muestreo a tiempo de símbolo (en nT_s)
- Definición de respuesta conjunta transmisor-canal-receptor
 - ▶ Canal gaussiano

$$p(t) = g(t) * f(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega) F(j\omega)$$

- ▶ Canal lineal

$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega) F(j\omega)$$

- Receptor habitual: filtro adaptado $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$
 - ▶ Canal gaussiano

$$p(t) = r_g(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2$$

- ▶ Canal lineal

$$p(t) = r_g(t) * h(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2 H(j\omega)$$

Criterio de Nyquist para la ausencia de ISI

- Condición para evitar la ISI expresada en tiempo discreto

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT} = \delta[n] \quad (\times C)$$

escala/ganancia

- Condición equivalente en el dominio frecuencial

$$P(e^{j\omega}) = 1 \quad (\times C)$$

- Condiciones equivalentes expresadas en tiempo continuo

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \delta(t) \quad (\times C)$$

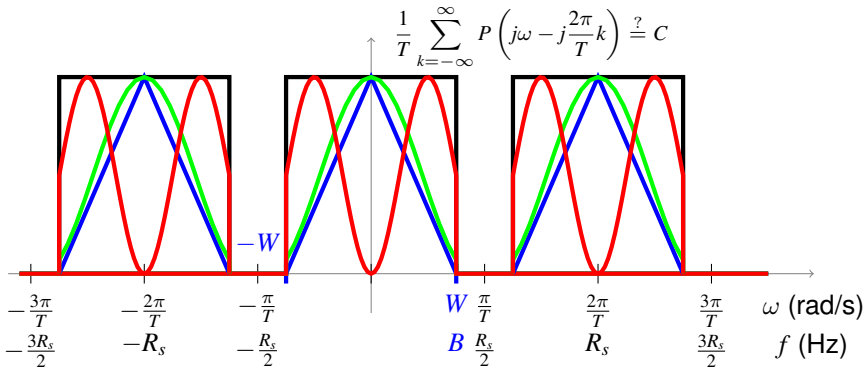
$$\frac{1}{2\pi} P(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = 1 \quad (\times C)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = 1 \quad (\times C)$$

Réplicas de $P(j\omega)$ desplazadas múltiplos de $\frac{2\pi}{T}$ suman una constante

Nyquist en frecuencia: una implicación importante

- Transmisión a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
- $P(j\omega)$: ancho de banda W rad/s, con $W < \frac{\pi}{T} = \pi R_s$ rad/s
 - ▶ Equivalente a ancho de banda $B = \frac{W}{2\pi}$ Hz con $B < \frac{R_s}{2}$ Hz



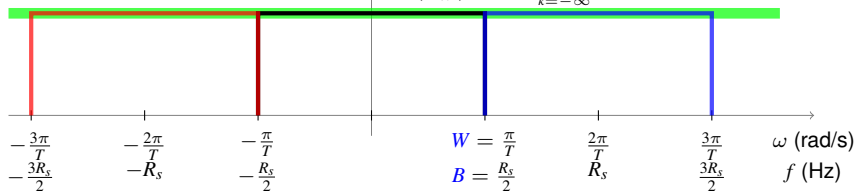
- **NO es posible** cumplir el criterio de Nyquist con ancho de banda

$$W < \frac{\pi}{T} = \pi R_s \text{ rad/s o, equivalentemente, } B < \frac{R_s}{2} \text{ Hz}$$

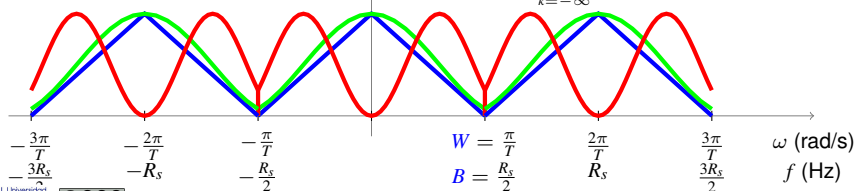
Nyquist en frecuencia: una implicación importante (II)

- Transmisión a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
- $P(j\omega)$: ancho de banda W rad/s, con $W = \frac{\pi}{T} = \pi R_s$ rad/s
 - ▶ Equivalente a ancho de banda $B = \frac{W}{2\pi}$ Hz con $B = \frac{R_s}{2}$ Hz

$$\text{Pulso rectangular } P(j\omega) = a \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = c$$



$$\text{Cualquier otra forma } P(j\omega) \quad \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) \neq c$$

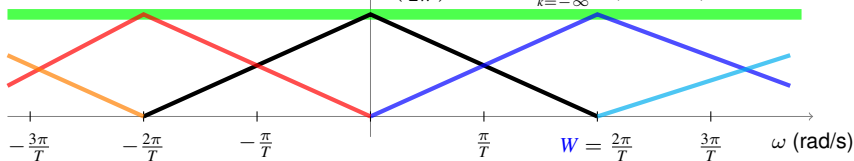


Nyquist en frecuencia: una implicación importante (III)

- Transmisión a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
- $P(j\omega)$: ancho de banda W rad/s, con $W > \frac{\pi}{T} = \pi R_s$ rad/s
 - ▶ Equivalente a ancho de banda $B = \frac{W}{2\pi}$ Hz con $B > \frac{R_s}{2}$ Hz

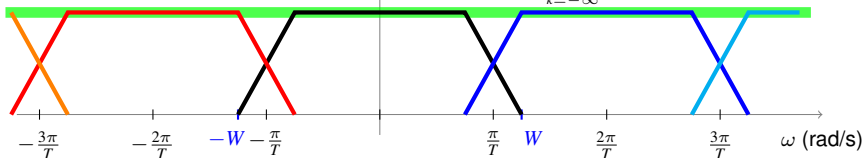
Pulso triangular $P(j\omega) = a \Lambda\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = C$$



Muchas otras formas para $P(j\omega)$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = C$$



Forma optima para $p(t) \stackrel{\mathcal{TF}}{\leftrightarrow} P(j\omega)$ para Tx sin ISI

Mejor compromiso entre ancho de banda y tasa de transmisión

- Mínimo ancho de banda para Tx sin ISI a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios

$$W_{min} = \frac{\pi}{T} = \pi R_s \text{ rad/s} \quad \left(B_{min} = \frac{R_s}{2} \text{ Hz} \right)$$

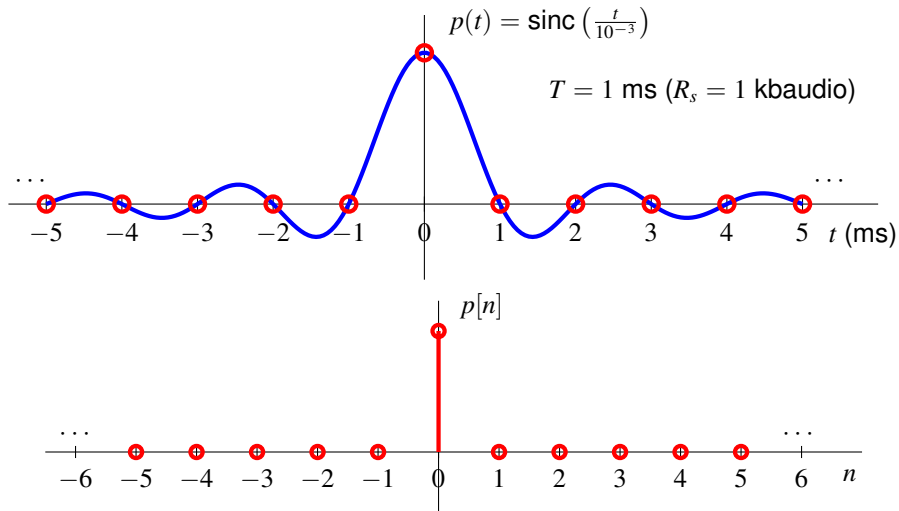
- Máxima tasa sin ISI con un ancho de banda W rad/s (B Hz)

$$R_s|_{max} = \frac{W}{\pi} = 2 B \text{ baudios (symbols/s)}$$

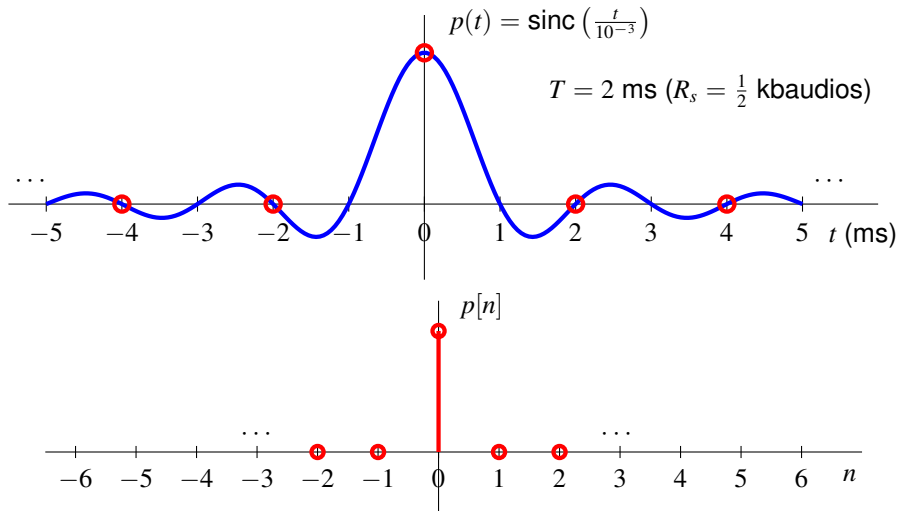
- Respuesta conjunta transmisor-canal-receptor óptima

$$p(t) = \text{sinc} \left(\frac{t}{T} \right) \stackrel{\mathcal{TF}}{\leftrightarrow} P(j\omega) = T \Pi \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right)$$

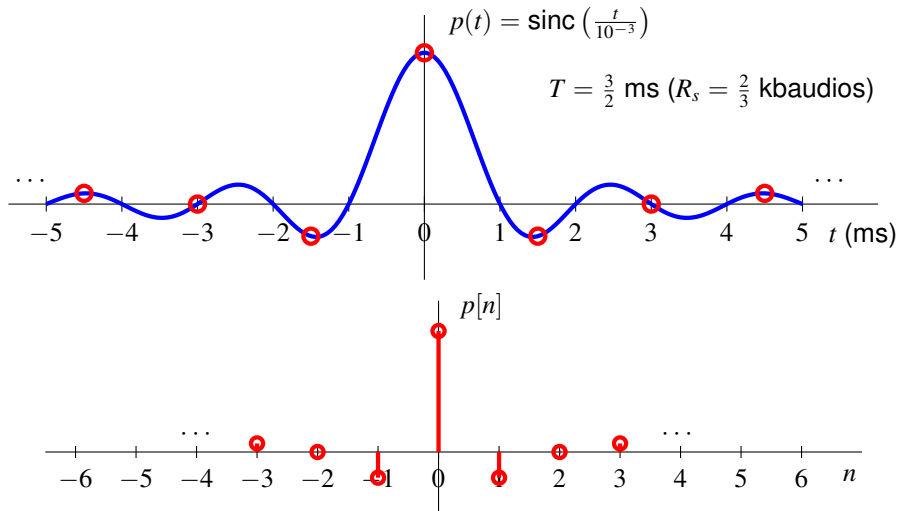
Ejemplo: $p(t)$



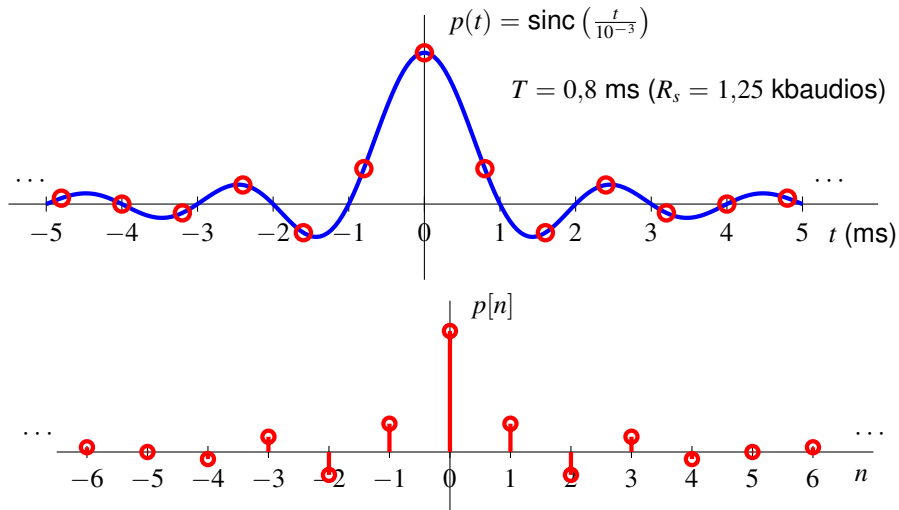
Ejemplo: $p(t)$



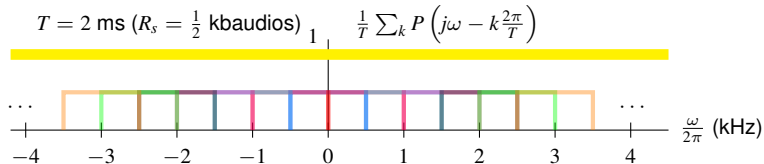
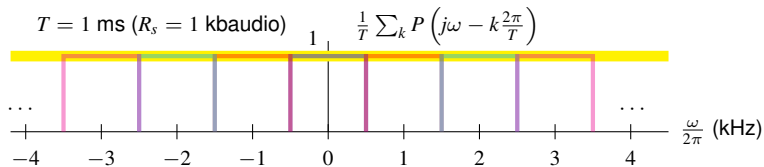
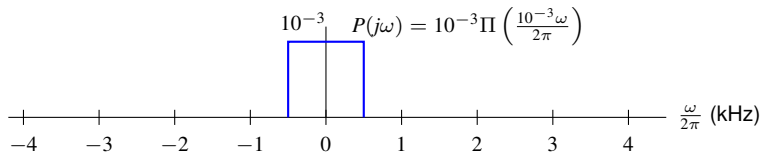
Ejemplo: $p(t)$



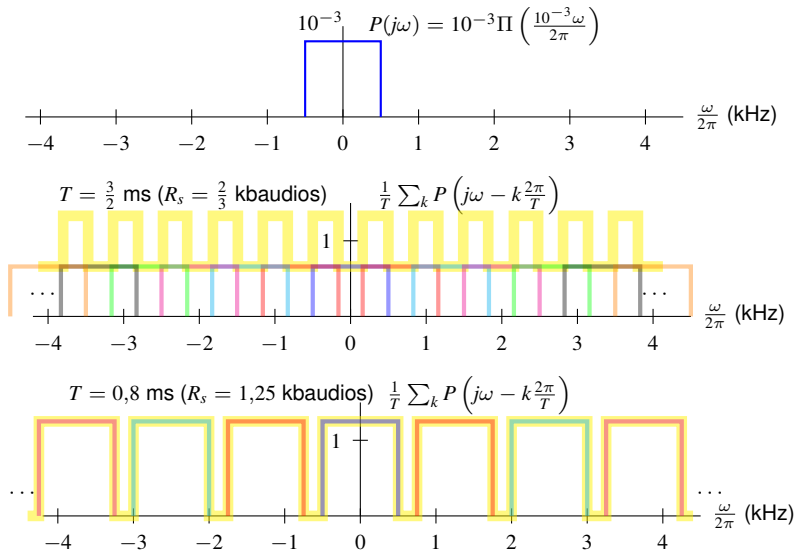
Ejemplo: $p(t)$



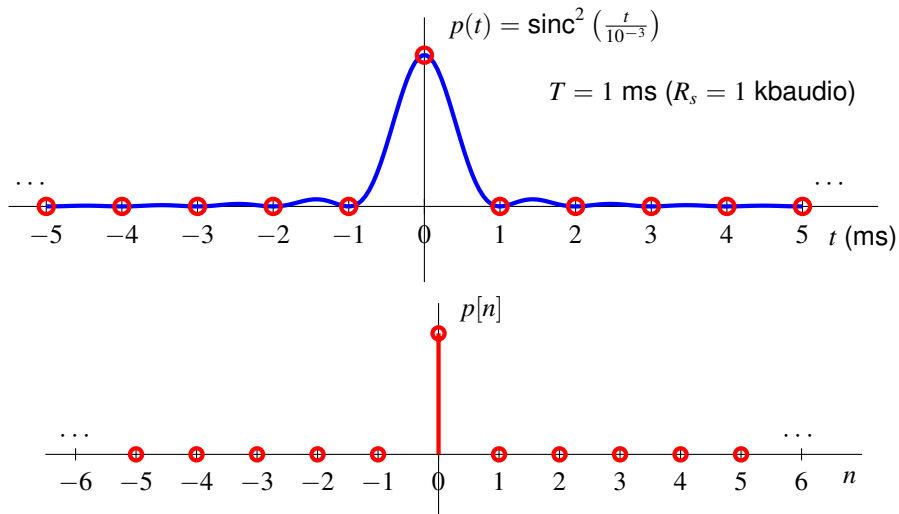
Ejemplo: $P(j\omega)$



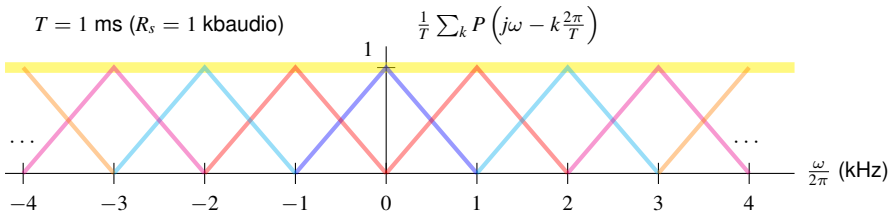
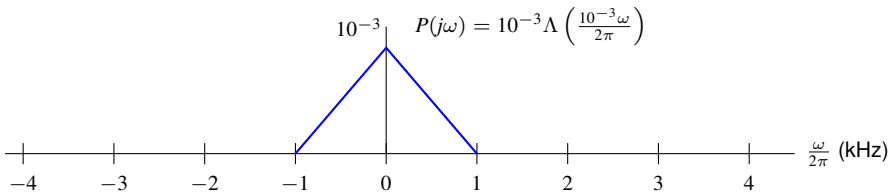
Ejemplo: $P(j\omega)$



Ejemplo: $p(t)$



Ejemplo: $P(j\omega)$



Pulsos o filtros en coseno alzado

- Familia de pulsos con ancho de banda finito
- Parámetros
 - ▶ Tiempo (o tasa) de símbolo: T seg. (o $R_s = \frac{1}{T}$ baudios)
 - ▶ Factor de caída (roll-off): α
 - ★ Rango de valores del factor de caída: $\alpha \in [0, 1]$
 - ★ Caso particular $\alpha = 0$: $h_{RC}^{0,T}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} H_{RC}^{0,T}(j\omega) = T \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
- Expresiones analíticas (en tiempo y frecuencia)

$$h_{RC}^{\alpha,T}(t) = \left(\frac{\text{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T} \right) \left(\frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2} \right)$$

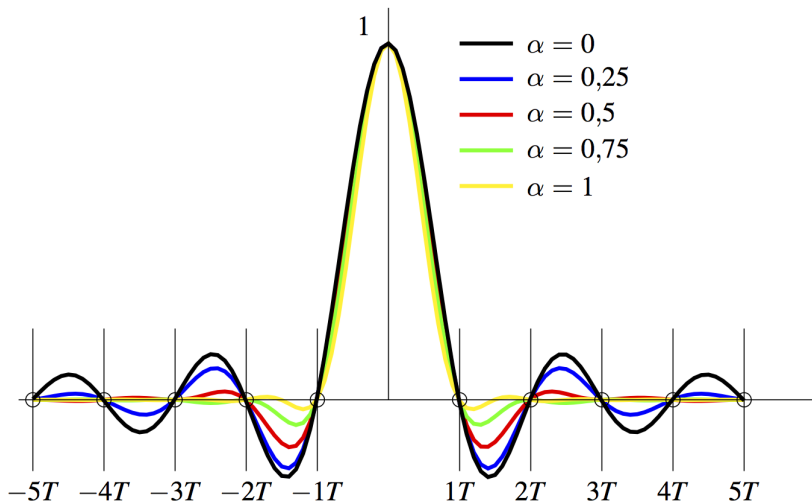
$$H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega) = \begin{cases} T & 0 \leq |\omega| < (1 - \alpha) \frac{\pi}{T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \text{sen} \left(\frac{T}{2\alpha} \left(|\omega| - \frac{\pi}{T} \right) \right) \right] & (1 - \alpha) \frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha) \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha) \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

- Ancho de banda: depende de los dos parámetros

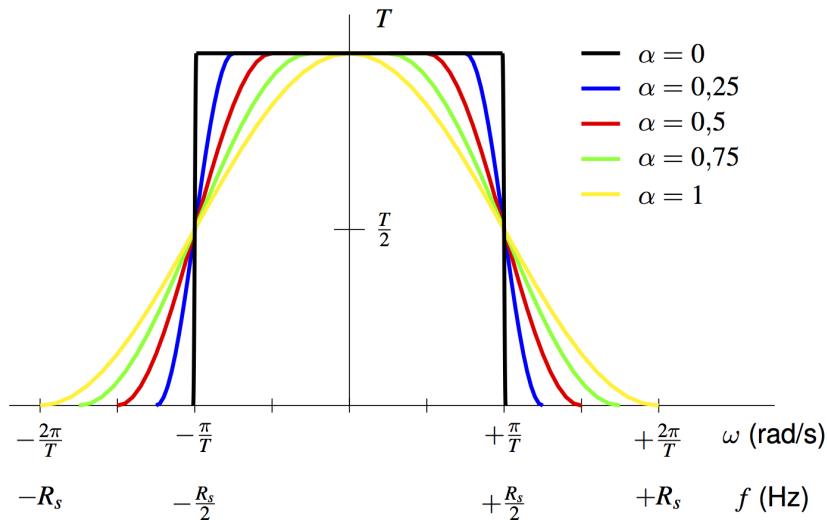
$$W = (1 + \alpha) \times \frac{\pi}{T} \text{ rad/s}, B = (1 + \alpha) \times \frac{R_s}{2} \text{ Hz}$$

Pulsos en coseno alzado $h_{RC}^{\alpha,T}(t)$

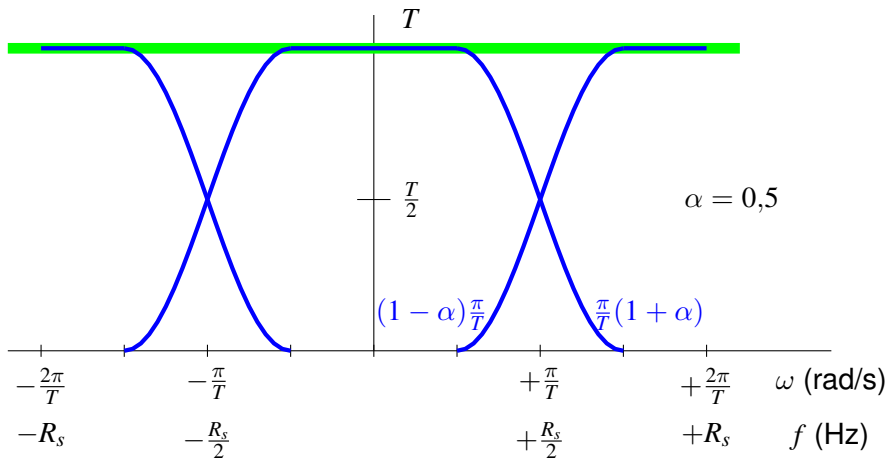
- Cumplen el criterio de Nyquist a T segundos (o a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios)



Cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$



Cosenos alzados: Réplicas de $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$ cada $\frac{2\pi}{T}$ rad/s



- $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$ cumple el criterio de Nyquist a T s (o a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios)

Pulsos en raíz de coseno alzado

- Pulsos respuesta conjunta consigo mismo es un coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) * h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t) \quad H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$$

- Procedimiento general para obtener $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$

- 1 Se parte de la respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$
- 2 Se hace $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = \sqrt{H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)}$
- 3 $h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \mathcal{T}\mathcal{F}^{-1} \left\{ H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega) \right\}$

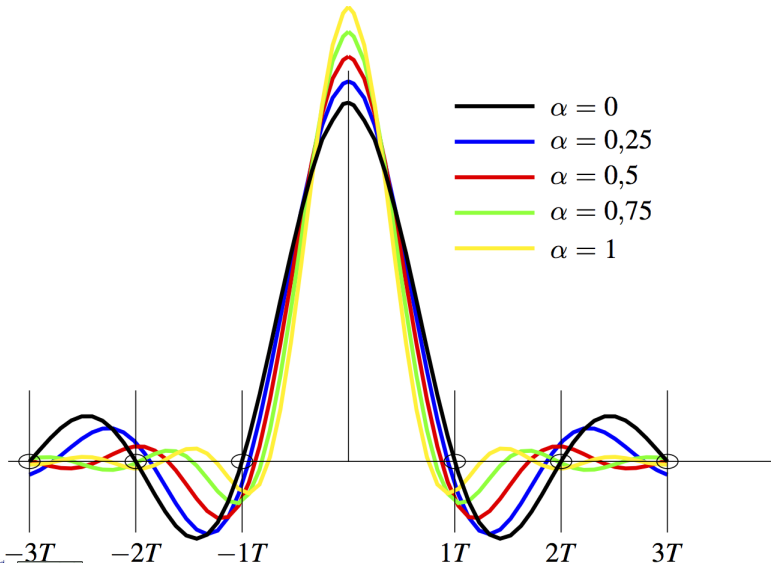
- Pulsos en raíz de coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left(\left(1+\alpha\right)\frac{\pi t}{T}\right) + T \frac{\sin\left(\left(1-\alpha\right)\frac{\pi t}{T}\right)}{4\alpha t}}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2}$$

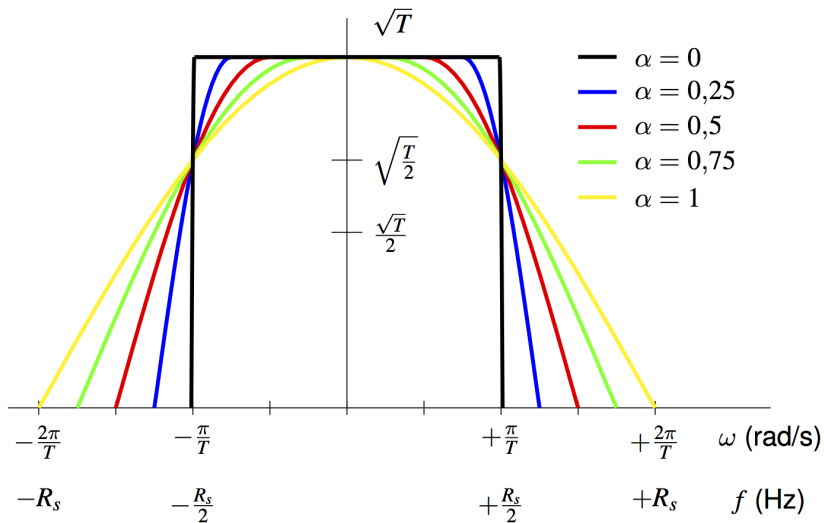
Pulsos en raíz cuadrada de coseno alzado $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$

- **NO cumplen** el criterio de Nyquist a T s (o a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios)

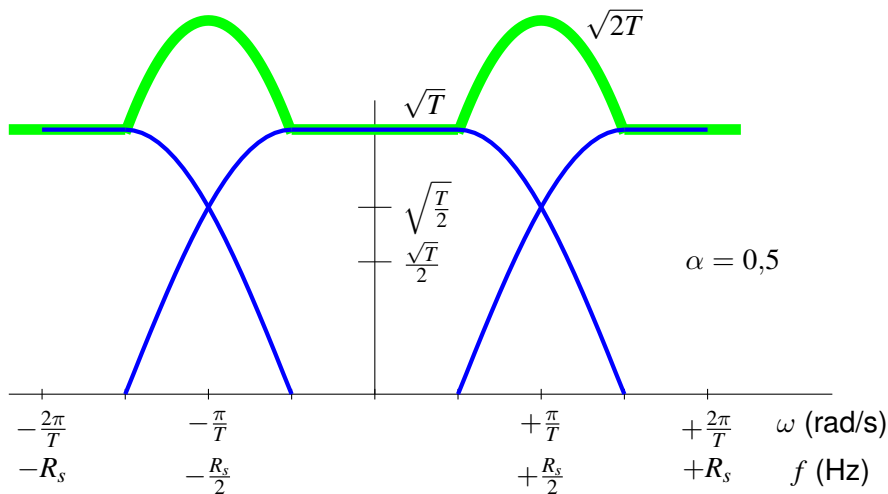
▶ Excepto para $\alpha = 0$, ya que $h_{RRC}^{0,T}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$



Raíz de cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)$

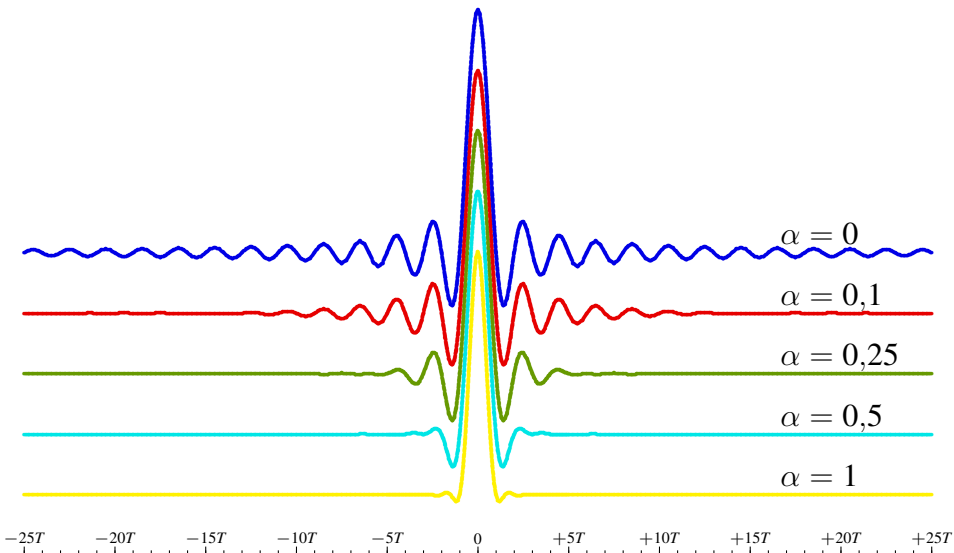


Raíz de coseno alzado: Réplicas de $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)$ cada $\frac{2\pi}{T}$ rad/s



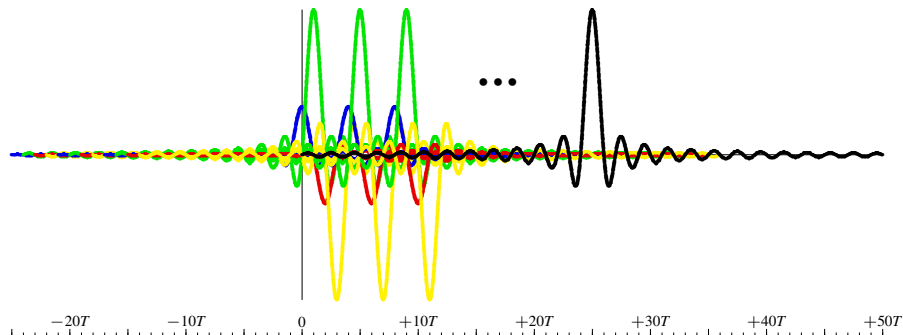
- $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)$ **NO cumple** el criterio de Nyquist a T s (o a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios)
 - ▶ Excepto para $\alpha = 0$, ya que $H_{RRC}^{0,T}(j\omega) = \sqrt{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$ es un pulso rectangular

Cosenos alzados - caída de los lóbulos secundarios



Cosenos alzados - retardo de implementación

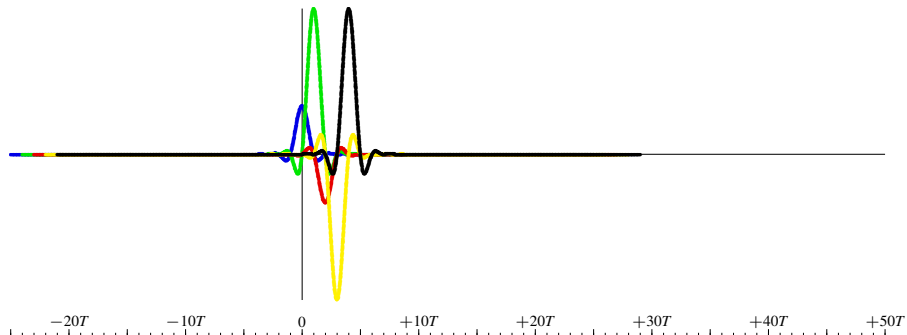
- Un coseno alzado tiene un número de lóbulos secundarios “*relevantes*” (depende de α)
 - ▶ Se pueden despreciar los lóbulos no relevantes para facilitar la implementación (truncar)
- La obtención de la forma de onda requiere un retardo (formas no causales)
 - ▶ El retardo está relacionado con el número de lóbulos que se han considerado relevantes
 - ▶ Menor retardo para valores más altos de α (mayor requerimiento de ancho de banda)
- Ejemplo: generación de una señal 4-PAM con $\alpha = 0$
 - ▶ En el ejemplo, 25 lóbulos se consideran relevantes (y 25 lóbulos se dibujan)
 - ▶ Se precisa un retardo de $25 \times T$ para computar la suma
 - ▶ La señal negra (debida a $A[25]$) es la última con contribución relevante en el primer intervalo de símbolo



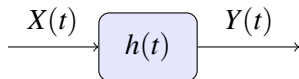
Cosenos alzados - retardo de implementación (II)

- Retardos más bajos pueden obtenerse utilizando factores de caída más altos
 - ▶ El precio a pagar es un mayor ancho de banda
- Ejemplo: generation of a 4-PAM waveform with $\alpha = 0,5$
 - ▶ En el ejemplo, 4 lóbulos se consideran relevantes
 - ▶ Se precisa un retardo de $4 \times T$ para computar la suma
 - ▶ La señal negra (debida a $A[4]$) es la última con contribución relevante en el primer intervalo de símbolo
 - ▶ El retardo ha bajado de $25 \times T$ a $4 \times T$ en este ejemplo (más de 6 veces)
 - ▶ El ancho de banda de ha incrementado un 50 %

NOTA: el número de lóbulos "relevantes" depende de la precisión requerida, esto es sólo un ejemplo (las cifras no deben tomarse como una referencia precisa)



Revisión: procesos aleatorios y sistemas lineales



Teorema: $X(t)$ es estacionario, con media m_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$. El proceso pasa por un sistema lineal e invariante con respuesta $h(t)$. Entonces, *los procesos de entrada y salida, $X(t)$ e $Y(t)$, son conjuntamente estacionarios*, con

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

Además

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

Revisión: expresiones en el dominio frecuencial

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X H(0)$$

- Densidad espectral del proceso de salida

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) |H(j\omega)|^2$$

- Densidades espectrales cruzadas

$$S_{XY}(j\omega) \stackrel{def}{=} \mathcal{TF} \{R_{XY}(\tau)\}$$

$$S_{XY}(j\omega) = S_X(j\omega) H^*(j\omega)$$

$$S_{YX}(j\omega) = S_{XY}^*(j\omega) = S_X(j\omega) H(j\omega)$$

Revisión: espectro de señales en tiempo continuos/discreto

- Señal continua $x(t)$ y discretizada $x[n]$ muestreando cada T seg.

$$x[n] = x(t) \Big|_{t=nT} = x(nT)$$

- Notación habitual

- ▶ $X(j\omega)$: espectro (Transformada de Fourier) de $x(t)$
- ▶ $X(e^{j\omega})$: espectro de $x[n]$

- Relación entre ambas transformadas

- ▶ Paso de tiempo continuo a tiempo discreto

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_k X\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

- ▶ Paso de tiempo discreto a tiempo continuo

$$X(j\omega) = T X(e^{j\omega T}), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

Revisión: propiedades de la función de ambigüedad temporal (función de autocorrelación continua)

- Definición para señales deterministas de energía $x(t)$

$$r_x(t) = x(t) * x^*(-t)$$

Informalmente: mide la similitud entre una función y ella misma con un retardo t

- Expresión en el dominio frecuencial

$$\begin{aligned} R_x(j\omega) &= \mathcal{TF}\{r_x(t)\} = \mathcal{TF}\{x(t)\} \times \mathcal{TF}\{x^*(-t)\} \\ &= X(j\omega) \times X^*(j\omega) = |X(j\omega)|^2 \end{aligned}$$

- Valor máximo en $t = 0$: $|r_x(0)| \geq |r_x(t)|$
- Energía de la señal

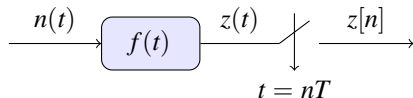
$$\text{Parseval: } \mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Usando la función de ambigüedad temporal

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(j\omega) d\omega \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}\{x(t)\} = r_x(0)$$

Propiedades del ruido en el receptor

- Ruido blanco $n(t)$ ($S_n(j\omega) = N_0/2$) pasa por el filtro receptor $f(t)$



- Análisis en el dominio frecuencial
 - ▶ DEP del ruido filtrado $z(t)$

$$S_z(j\omega) = S_n(j\omega) |F(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |F(j\omega)|^2$$

- ★ Ruido coloreado (respuesta DEP no constante)

NOTA: excepto $|F(j\omega)| = C$, i.e., un filtro paso todo (amplifica/atenua)

- ▶ DEP del ruido en tiempo discreto (muestreado) $z[n]$

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{T} \sum_k \underbrace{\left| F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right) \right|^2}_{R_f \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right)}$$

- ★ El ruido discreto puede ser blanco !!!!

$$\text{Condición: } \frac{1}{T} \sum_k R_f \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right) = \text{constante}$$

Condiciones para que el ruido $z[n]$ sea blanco

- El ruido en tiempo discreto $z[n]$ es blanco si

$$\frac{1}{T} \sum_k R_f \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) = C, \text{ lo que equivale a } R_f(e^{j\omega}) = C$$

- ▶ Condición equivalente en el dominio temporal

$$r_f[n] = r_f(t)|_{t=nT} = C \delta[n], \text{ lo que implica } C = r_f(0) = \mathcal{E}\{f(t)\}$$

- Condición para que $z[n]$ sea blanco

- ▶ $z[n]$ es blanco si la función de ambigüedad temporal del filtro receptor $r_f(t)$ (o $R_f(j\omega)$) satisface las mismas condiciones que $p(t)$ debe satisfacer para eliminar la ISI (criterio de Nyquist)

- NOTA:

- ▶ La condición para que $z[n]$ sea blanco depende únicamente del filtro receptor $f(t)$!!!

- Densidad espectral de potencia de $z[n]$ cuando es blanco

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \times \mathcal{E}\{f(t)\} \rightarrow \text{si } f(t) \text{ es normalizado } S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2}$$

Potencia de ruido y relación señal a ruido (SNR)

- Si se cumple el criterio de Nyquist para la ISI (ISI=0)

$$q[n] = A[n] + z[n]$$

- En este caso, la relación señal a ruido en $q[n]$ es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{E[|A[n]|^2]}{E[|z[n]|^2]} = \frac{E_s}{\sigma_z^2}$$

- σ_z^2 es la potencia (varianza) de la secuencia de ruido $z[n]$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z(e^{j\omega}) d\omega$$

- ▶ Si el ruido $z[n]$ es blanco, con DEP $S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{f(t)\}$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{N_0}{2} \times \mathcal{E}\{f(t)\} d\omega = \frac{N_0}{2} \times \mathcal{E}\{f(t)\} = \frac{N_0}{2} \times r_f(0)$$

- ★ Para un filtro receptor normalizado: $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2}$

Consecuencias del criterio de Nyquist: canal gaussiano

- Se asume que se usa un filtro adaptado en el receptor

$f(t) = g^*(-t) = g(-t)$ ya que $g(t)$ es una función real

- Condición para evitar la ISI

- ▶ Respuesta $p(t) = g(t) * f(t)$ cumple el crit. de Nyquist

- ★ Utilizando filtros adaptados $p(t) = r_g(t)$

- Condición para que el ruido $z[n]$ sea blanco

- ▶ Función de ambigüedad temporal del filtro receptor, $r_f(t)$, cumple las condiciones del criterio de Nyquist

- ★ Utilizando filtros adaptados $r_f(t) = r_g(t)$

- Conclusión: ambas condiciones son equivalentes

$$p(t) = r_f(t) = r_g(t)$$

- ▶ Con un canal gaussiano y utilizando filtros adaptados, si se evita la ISI el ruido muestreado $z[n]$ es blanco

Eliminación de ISI en un canal lineal con filtros adaptados

- $p[n]$ (o $P(j\omega)$) debe cumplir el criterio de Nyquist
 - ▶ Definición de $p(t)$ incluye ahora el efecto del canal lineal $h(t)$
- Diseño de $p(t)|P(j\omega)$ cumplir Nyquist a tiempo de símbolo T
- Diseño utilizando filtros adaptados

Respuesta del filtro transmisor en el dominio frecuencial

- ▶ $P(j\omega) = H(j\omega) |G(j\omega)|^2$
- ▶ Por tanto

$$G(j\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{P(j\omega)}{H(j\omega)}}, & \text{si } H(j\omega) \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si el filtro receptor está adaptado al transmisor, esta elección para el filtro transmisor elimina la ISI

- ▶ $P(j\omega)$ es una opción de diseño
 - ★ Habitualmente, se selecciona un coseno alzado

$$P(j\omega) = H_{RC}^{\alpha, T}(j\omega)$$

Inconvenientes de esta opción de diseño

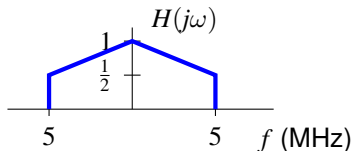
- La respuesta del canal, $H(j\omega)$, debe ser conocida
 - ▶ Puede ser difícil conocerla
 - ▶ El canal puede ser variante en la práctica
- La secuencia de ruido en tiempo discreto, $z[n]$, no es blanca

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{T} \sum_k \underbrace{\left| F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right) \right|^2}_{\left| G(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k) \right|^2} = \frac{N_0}{2} \frac{1}{T} \sum_k \left| \frac{P \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right)}{H \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right)} \right|^2$$

NOTA: Para filtros adaptados $F(j\omega) = G^*(j\omega)$, lo que significa $|F(j\omega)| = |G(j\omega)|$

- ▶ Detector símbolo a símbolo sin memoria no es óptimo
- ▶ Toda la secuencia $q[n]$ debe ser utilizada para estimar el símbolo en un instante discreto determinado $n_0, A[n_0]$
- ▶ El ruido puede ser amplificado
 - ★ Canales con una atenuación severa en alguna(s) frecuencia(s) de la banda
- ▶ Conclusión:
 - ★ Usando filtros adaptados, en general no es posible evitar la ISI y al mismo tiempo tener ruido blanco

Ejemplo: $|S|=0$ con filtros adaptados



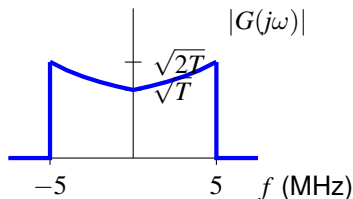
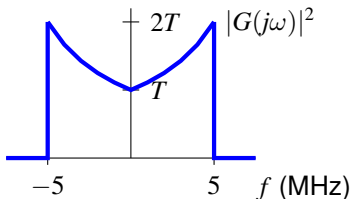
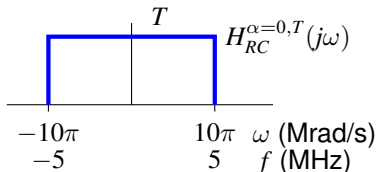
$$P(j\omega) = G(j\omega) F(j\omega) H(j\omega)$$

$$P(j\omega) = |G(j\omega)|^2 H(j\omega)$$

$$P(j\omega) = H_{RC}^{\alpha, T}(j\omega)$$

$$G(j\omega) = \sqrt{\frac{P(j\omega) = H_{RC}^{\alpha=0, T}(j\omega)}{H(j\omega)}}$$

Tasa Max.: $\alpha = 0$

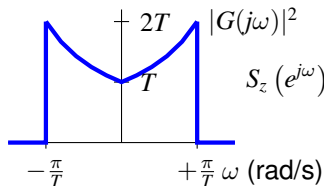


Ejemplo: $|S|=0$ con filtros adaptados (II)

- Densidad espectral de potencia del ruido $z[n]$

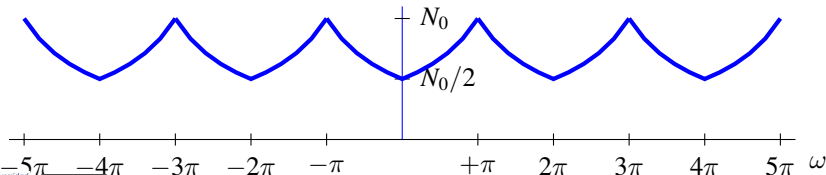
$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \times \frac{1}{T} \sum_k R_f \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right) = \frac{N_0}{2} \times \frac{1}{T} \sum_k \left| F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right) \right|^2$$

Filtros adaptados: $|F(j\omega)|^2 = |G(j\omega)|^2$



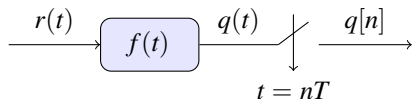
$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \times \frac{1}{T} \sum_k \left| G \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right) \right|^2$$

$S_z(e^{j\omega}) \neq C$, por tanto $z[n]$ **NO** es blanco!!!



Utilizando un filtro receptor genérico

- Receptor genérico, no necesariamente un filtro adaptado



- Definición de la respuesta conjunta $p(t)$

$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t), P(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega) F(j\omega)$$

- Canal discreto equivalente a tasa de símbolo $p[n]$

$$p[n] = p(nT) = (g(t) * h(t) * f(t)) \Big|_{t=nT}$$

- Ruido filtrado

$$z(t) = n(t) * f(t), z[n] = z(nT)$$

- ▶ Densidad espectral de potencia del ruido discreto $z[n]$

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \times \frac{1}{T} \sum_k \left| F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k \right) \right|^2$$

Diseño de $g(t)$ y $f(t)$

- Eliminación de ISI + ruido blanco (precodificación)
 - ▶ Selección de $P(j\omega)$ cumpliendo Nyquist
 - ▶ Selección de $F(j\omega)$ con $R_f(j\omega) = |F(j\omega)|^2$ cumpliendo Nyquist
 - ▶ Entonces, el filtro transmisor viene dado por

$$G(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{H(j\omega) F(j\omega)}$$

- ★ Con frecuencia presenta problemas de implementación

● Elección habitual

- ▶ Respuesta conjunta: $P(j\omega) = H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$
 - ★ Transmisión sin ISI
- ▶ Filtro receptor: $F(j\omega) = H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)$
 - ★ Ruido $z[n]$ blanco (ya que $R_f(j\omega) = H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$)
- ▶ Filtro transmisor

$$G(j\omega) = \frac{H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)}{H(j\omega) H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)} = \frac{H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)}{H(j\omega)}$$

Otros criterios de diseño

- Filtro adaptado a la respuesta conjunta transmisor-canal

$$f(t) = g_h(-t), \text{ con } g_h(t) = g(t) * h(t)$$

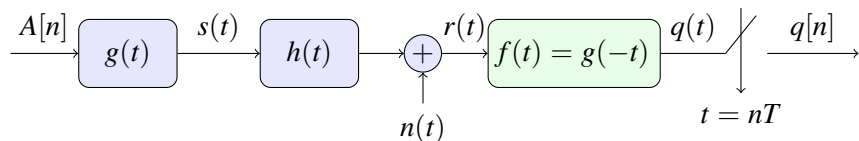
- ▶ Maximiza la relación señal a ruido
- ▶ No elimina la ISI y el ruido $z[n]$ no es blanco

- Minización del error cuadrático medio: maximizar

$$\frac{E \left[|A[n] p[0]|^2 \right]}{E \left[\left| \sum_{k \neq n} A[k] p[n-k] + z[n] \right|^2 \right]}$$

Configuración habitual para canales lineales

- Receptor es un filtro adaptado al transmisor $f(t) = g(-t)$ con $r_f(t) = r_g(t)$ cumpliendo Nyquist



- ▶ Opción habitual: filtros en raíz de coseno alzado

$$g(t) = h_{RRC}^{\alpha, T}(t) \quad \rightarrow \quad f(t) = h_{RRC}^{\alpha, T}(t)$$

$$g(t) * f(t) = r_g(t) = r_f(t) = h_{RC}^{\alpha, T}(t)$$

- Consecuencias:

- ▶ Esto asegura que el ruido en tiempo discreto $z[n]$ es blanco
- ▶ Existe ISI en el sistema (respuesta conjunta $p(t)$ no cumple Nyquist)

- ★ Los receptores puede diseñarse específicamente para tratar con la ISI (como se verá en el Capítulo 2)

Revisión - Cálculo de la probabilidad de error de símbolo (P_e)

- Definición

$$P_e = P(\hat{A}[n] \neq A[n])$$

- Cálculo - Promedio de las probabilidades de error condicionales para cada símbolo

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) P_{e|\mathbf{a}_i}$$

- Calculo de las probabilidades de error condicionales

$$P_{e|\mathbf{a}_i} = \int_{\mathbf{q} \notin I_i} f_{q|A}(q|\mathbf{a}_i) dq$$

Se integra la distribución condicional de la observación para el símbolo \mathbf{a}_i fuera de la región de decisión del símbolo, I_i

Revisión - Cálculo de la probabilidad de error de bit (BER)

- BER: *Bit Error Rate*
- Se promedia la BER condicional para a_i

$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) BER_{a_i}$$

- Cálculo de las BER condicionales

$$BER_{a_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_{e|a_i \rightarrow a_j} \frac{m_{e|a_i \rightarrow a_j}}{m}$$

- ▶ $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$: probabilidad de transmitiendo $A = a_i$, decidir $\hat{A} = a_j$

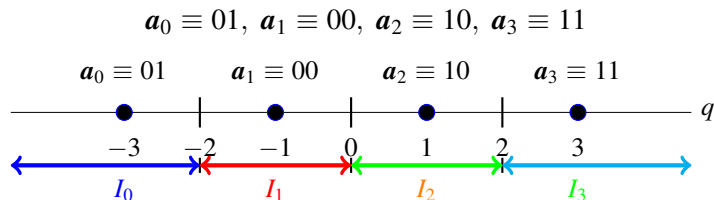
$$P_{e|a_i \rightarrow a_j} = \int_{q_0 \in I_j} f_{q|A}(q_0|a_i) dq_0$$

- ▶ $m_{e|a_i \rightarrow a_j}$: número de errores de bit que conlleva esa decisión
- ▶ m : número de bits por símbolo de la constelación

Ejemplo - Espacio 1-D M -ário

● Ejemplo:

- ▶ $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4}$
- ▶ Constelación: $\mathbf{a}_0 = -3$, $\mathbf{a}_1 = -1$, $\mathbf{a}_2 = +1$, $\mathbf{a}_3 = +3$
- ▶ Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2$, $q_{u2} = 0$, $q_{u3} = +2$
 $I_0 = (-\infty, -2]$, $I_1 = (-2, 0]$, $I_2 = (0, +2]$, $I_3 = (+2, +\infty)$
- ▶ Asignación binaria



- Sin ISI ($p[n] = \delta[n]$), $z[n]$ blanco y gaussiano con $\sigma_z^2 = N_0/2$

$$q[n] = A[n] + z[n]$$

Caso estudiado en “Teoría de la Comunicación”

Ejemplo - Espacio 1-D M -ario (II)

- Probabilidad de error de símbolo

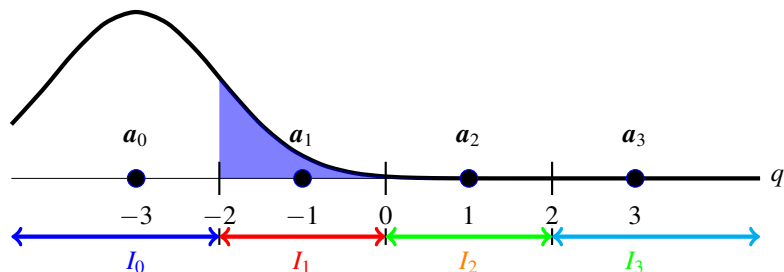
$$P_e = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 P_{e|a_i} = \frac{3}{2} Q \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right)$$

- Probabilidad de error de bit (BER)

$$\begin{aligned} BER &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 BER_{a_i} \\ &= \frac{3}{4} Q \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right) + \frac{1}{2} Q \left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}} \right) - \frac{1}{4} Q \left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}} \right) \end{aligned}$$

- Cálculos detallados a continuación

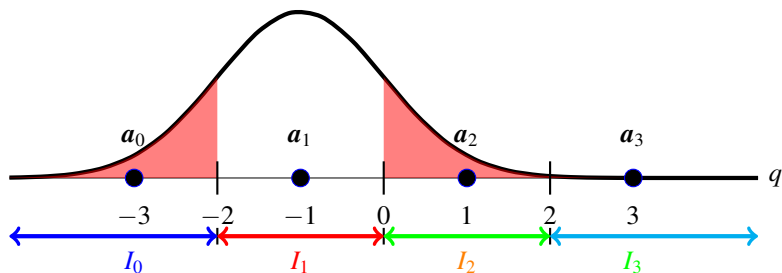
Cálculo $P_{e|a_0}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_0 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_0)$ fuera de I_0

$$P_{e|a_0} = \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

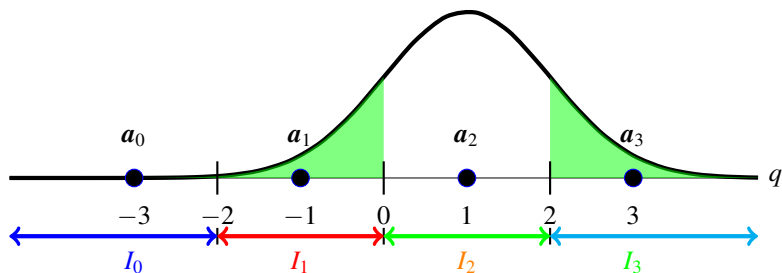
Cálculo $P_{e|a_1}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_1 = -1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_1)$ fuera de I_1

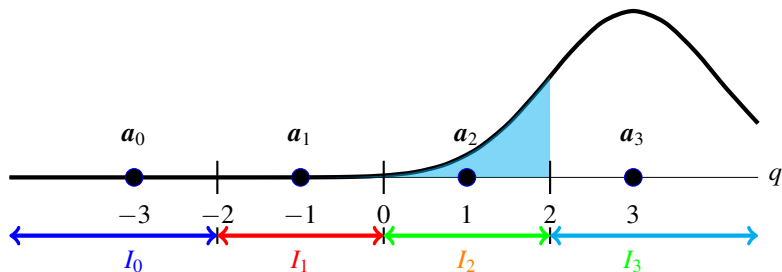
$$P_{e|a_1} = \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cálculo $P_{e|a_2}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_2)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_2 = +1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_2)$ fuera de I_2

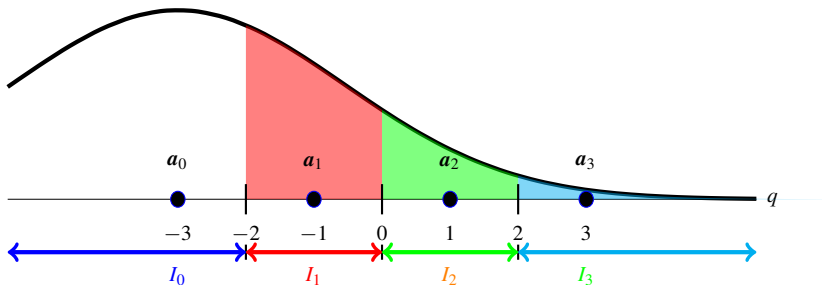
$$P_{e|a_2} = \int_{q \notin I_2} f_{q|A}(q|a_2) dq = 2Q \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right)$$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_3)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_3 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_3)$ fuera de I_3

$$P_{e|a_3} = \int_{q \notin I_3} f_{q|A}(q|a_3) dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

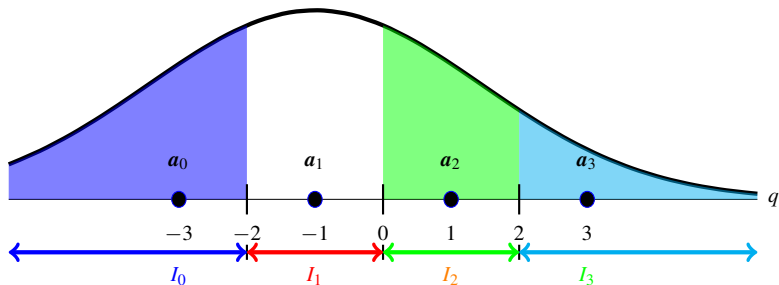
Cálculo de BER_{a_0}



- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$: gaussiana de media a_0 y varianza $N_0/2$

$$\begin{aligned}
 BER_{a_0} = & \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_1}}{m}} \\
 & + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_2}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_3}}{m}}
 \end{aligned}$$

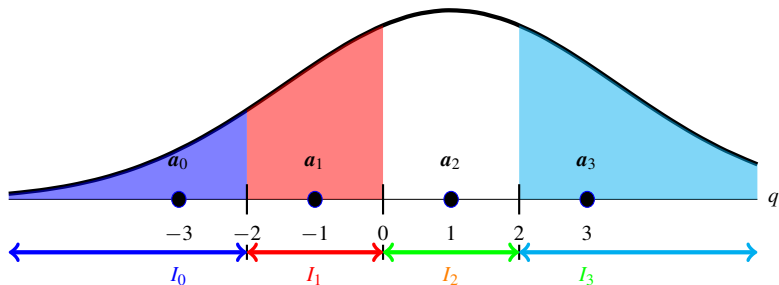
Cálculo de BER_{a_1}



- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$: gaussiana de media a_1 y varianza $N_0/2$

$$\begin{aligned}
 BER_{a_1} = & \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_2}}{m}} \\
 & + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_3}}{m}}
 \end{aligned}$$

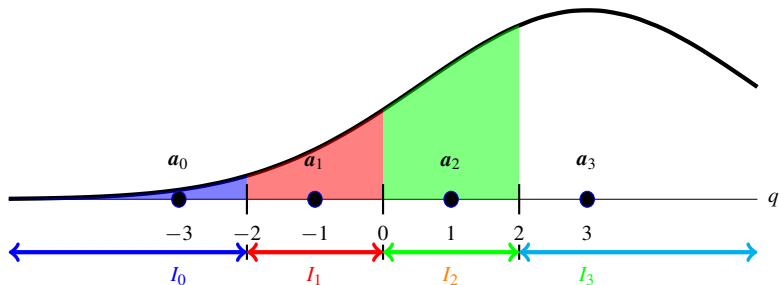
Cálculo de BER_{a_2}



- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_2)$: gaussiana de media a_2 y varianza $N_0/2$

$$\begin{aligned}
 BER_{a_2} = & \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_1}}{m}} \\
 & + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_3}}{m}}
 \end{aligned}$$

Cálculo de BER_{a_3}

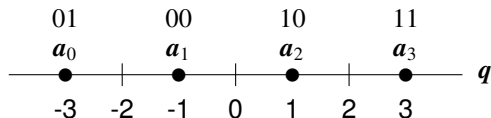


- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_3)$: gaussiana de media a_3 y varianza $N_0/2$

$$\begin{aligned}
 BER_{a_3} = & \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_1}}{m}} \\
 & + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_2}}{m}}
 \end{aligned}$$

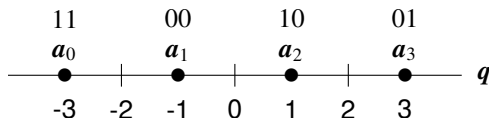
Cambio en la asignación binaria

- Resultado final para constelación anterior



$$BER = \frac{3}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Si se cambia la asignación binaria

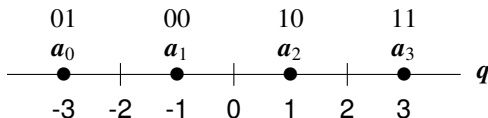


- ▶ No varían los términos $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$
- ▶ Sí varían los términos $m_{e|a_i \rightarrow a_j} \Rightarrow$ Varía la BER !!!

$$BER = \frac{5}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Codificación de Gray

- Los bloques de m bits asignados a símbolos que están a mínima distancia difieren sólo en 1 bit



- ▶ Este tipo de asignación minimiza la BER
- Terminos $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$ dependen de la constelación
 - ▶ Valores dependen de las distancias entre a_i y a_j
 - ▶ Valores más altos para símbolos a mínima distancia
- Terminos $\frac{m_{e|a_i \rightarrow a_j}}{m}$ dependen de la asignación binaria
 - ▶ Estos términos ponderan la contribución de $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$
 - ★ Gray: minimiza el impacto de los valores más altos de $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$
 - ★ Para valores altos de relación señal a ruido (SNR), en la mayor parte de los casos, un error de símbolo produce un único error de bit

$$BER \approx \frac{1}{m} P_e$$

Probabilidad de error sin y con ISI

- Ejemplo: modulación 2-PAM: $A[n] \in \{\pm 1\}$ at $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
- Receptor: raíz de coseno alzado normalizado con factor de caída α

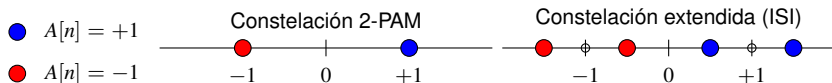
$$f(t) = h_{RRC}^{\alpha,T}(t) \rightarrow r_f(t) = f(t) * f(-t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t)$$

$$z[n] \text{ es blanco con } \sigma_z^2 = \frac{N_0}{2}$$

- Canal discreto equivalente: $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$
- ISI produce una constelación extendida en el receptor

$$o[n] = A[n] * p[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$$

$A[n]$	$A[n-1]$	$o[n]$
+1	+1	$+\frac{3}{2}$
+1	-1	$+\frac{1}{2}$
-1	+1	$-\frac{1}{2}$
-1	-1	$-\frac{3}{2}$

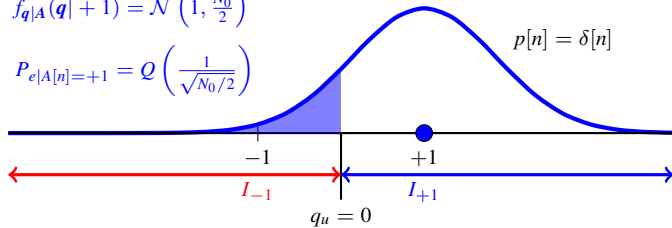


Probabilidad de error sin y con (II)

Probabilidad de error condicional para $A[n] = +1$, i.e., $P_{e|A[n]=+1}$

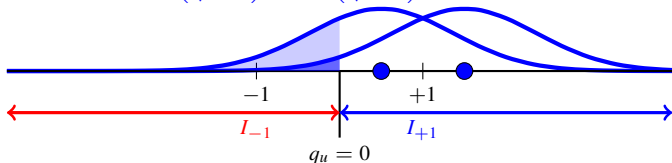
$$f_{q|A}(q|+1) = \mathcal{N}\left(1, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$P_{e|A[n]=+1} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$



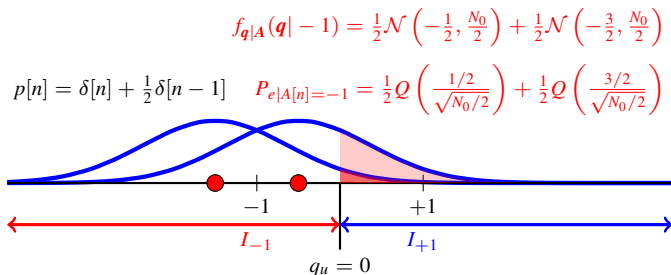
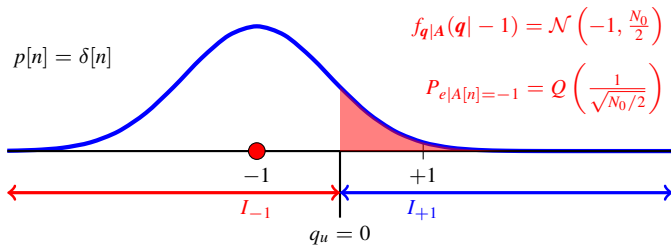
$$f_{q|A}(q|+1) = \frac{1}{2}\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{N}\left(\frac{3}{2}, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$P_{e|A[n]=+1} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$



Probabilidad de error sin y con ISI (III)

Probabilidad de error condicional para $A[n] = -1$, i.e., $P_{e|A[n]=-1}$



Probabilidad de error sin y con ISI (IV)

- Probabilidad de error sin ISI

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|A[n]=+1} + \frac{1}{2}P_{e|A[n]=-1} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error con ISI

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|A[n]=+1} + \frac{1}{2}P_{e|A[n]=-1} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Diagrama de ojo

- Herramienta de monitorización de sistemas digitales
 - ▶ Superposición de fragmentos de la señal en torno a instantes de muestreo
 - ▶ Duración de cada fragmento: $2T$
 - ▶ Obtenida utilizando un osciloscopio
 - ★ Trigger: gobernado por señal de muestreo
 - ★ Base de tiempos: para cubrir $2T$
- Principales características
 - ▶ El centro y los dos laterales (horizontalmente) coinciden con instantes de muestreo
 - ★ Las trazas deberían pasar por los símbolos en los instantes de muestreo
 - ▶ Diversidad de formas de transición entre instantes de muestreo dependen de la forma del filtro transmisor
- Permite detectar múltiples problemas:
 - ▶ Problemas/sensibilidad en el sincronismo
 - ▶ Nivel de ruido
 - ▶ Presencia (y nivel) de ISI

Diagrama de Ojo - $\alpha = 0$

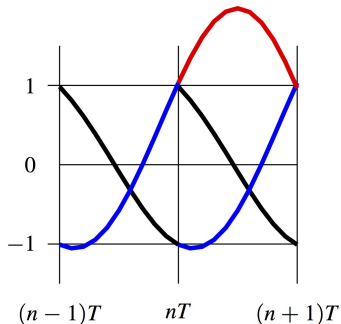
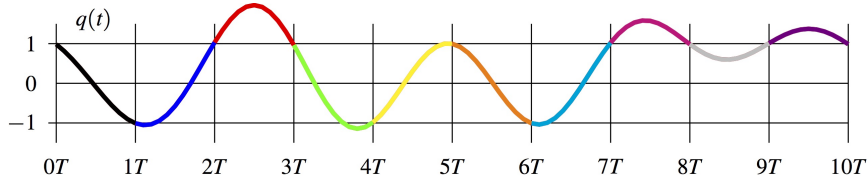


Diagrama de Ojo - $\alpha = 0$

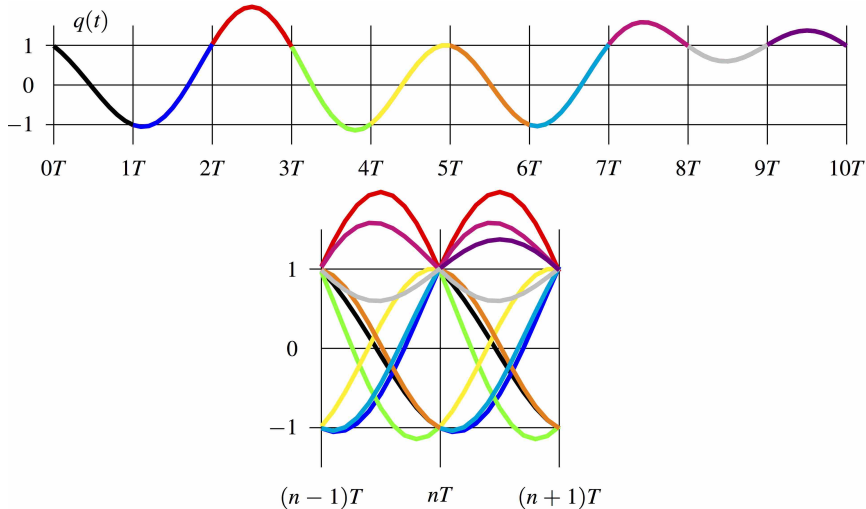
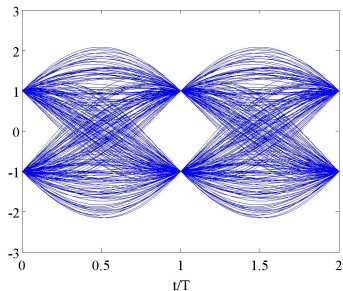
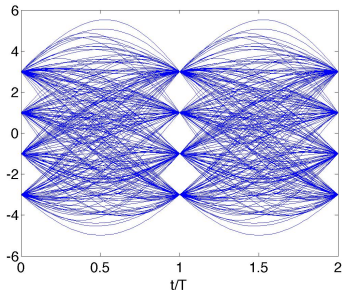


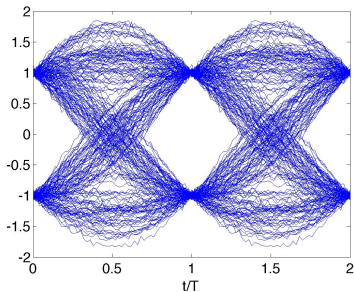
Diagrama de ojo - Ejemplos



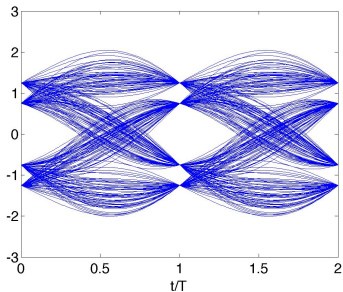
2-PAM $\alpha = 0$



4-PAM $\alpha = 0$



2-PAM $\alpha = 0$ Ruidoso



2-PAM $\alpha = 0$, ISI

Diagrama de Ojo - $\alpha = 1$

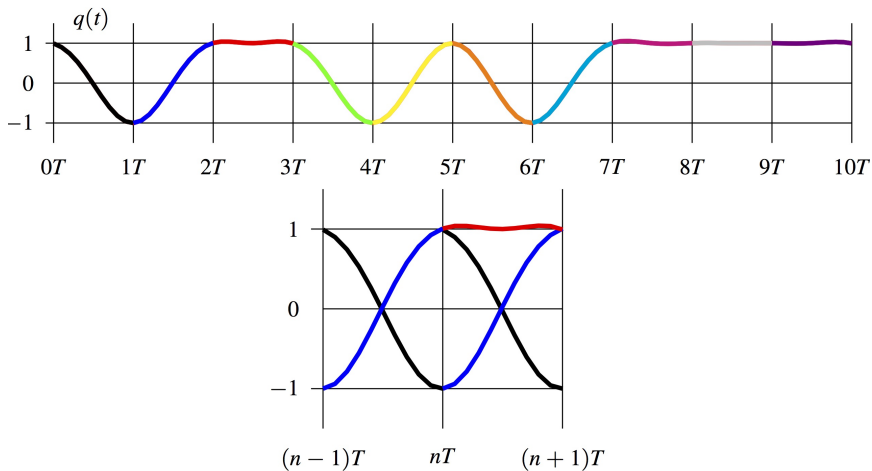
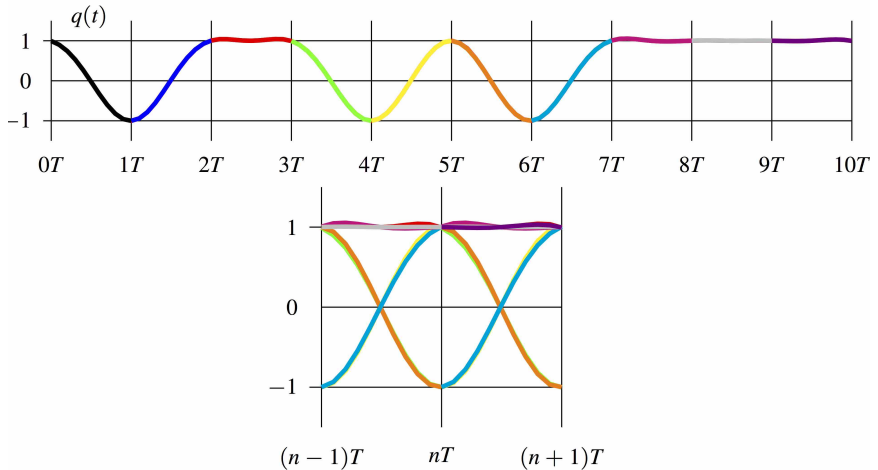


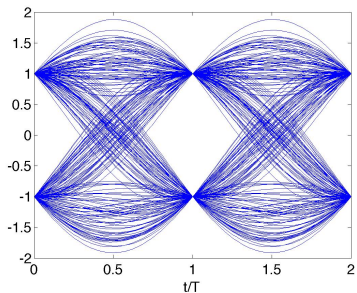
Diagrama de Ojo - $\alpha = 1$



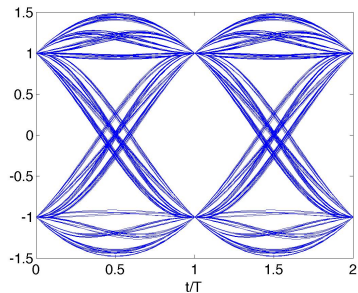
● El ojo se abre a medida que α crece

- ▶ Menor sensibilidad a errores de sincronización y fluctuaciones en el muestreo

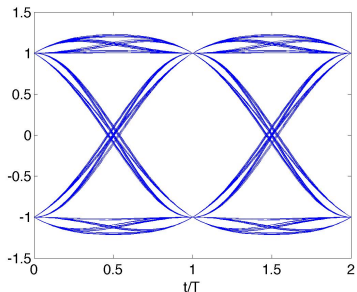
Diagrama de ojo - Ejemplos (II)



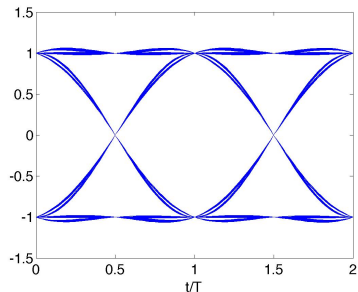
2-PAM $\alpha = 0,25$



2-PAM $\alpha = 0,5$

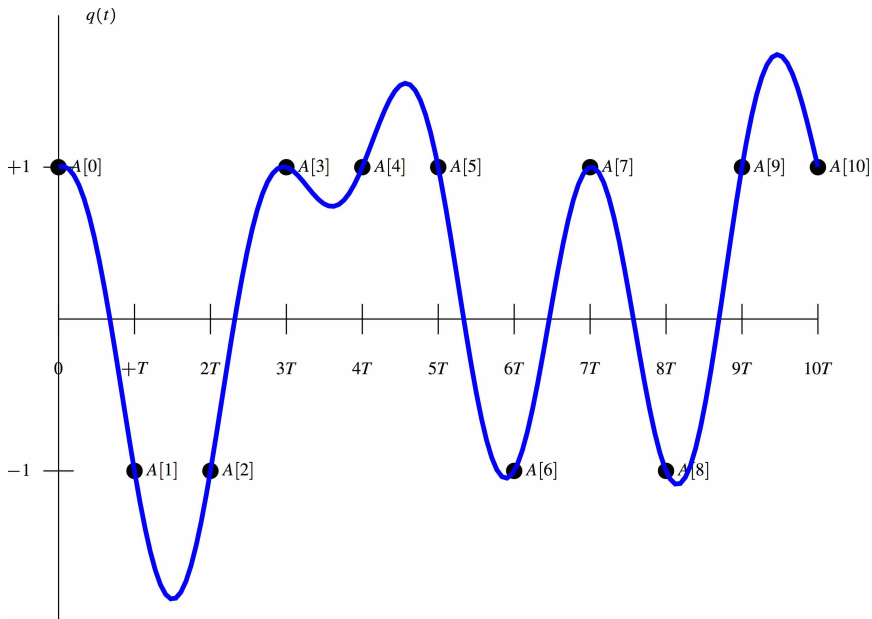


2-PAM $\alpha = 0,75$

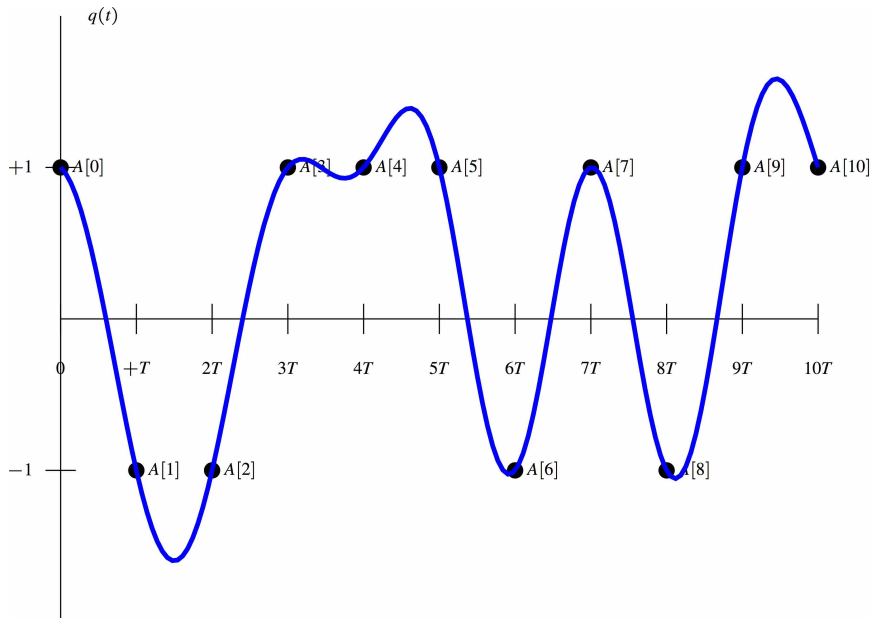


2-PAM $\alpha = 1$

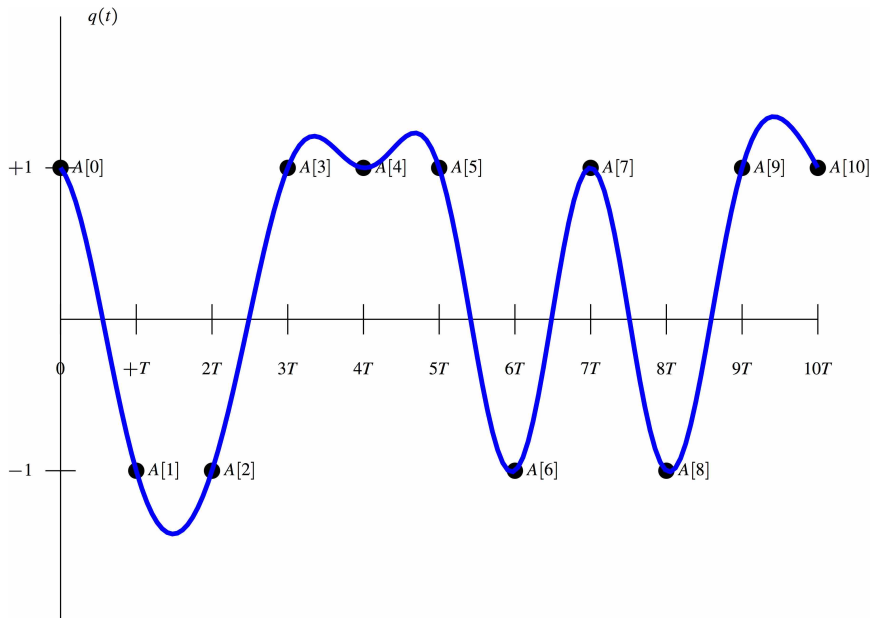
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0$



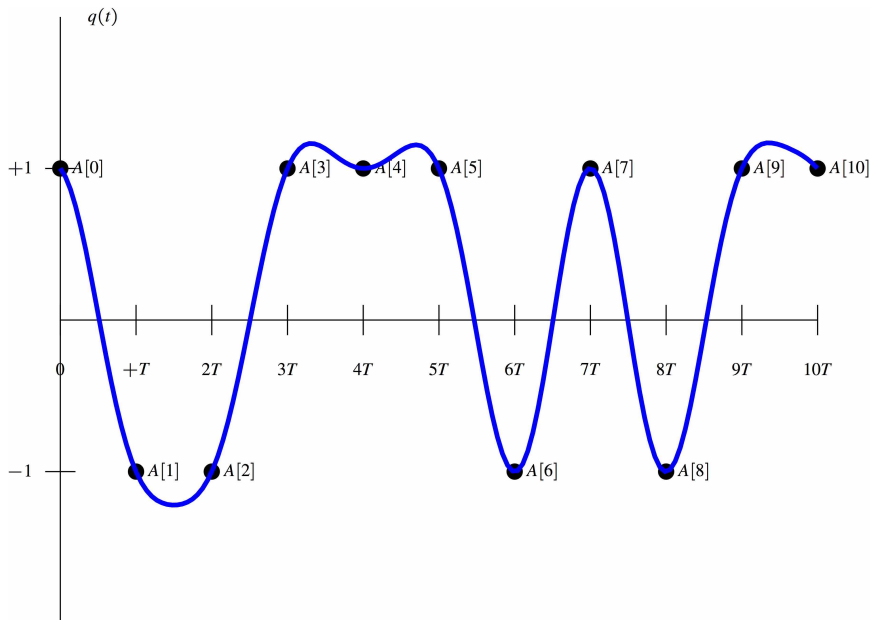
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0,25$



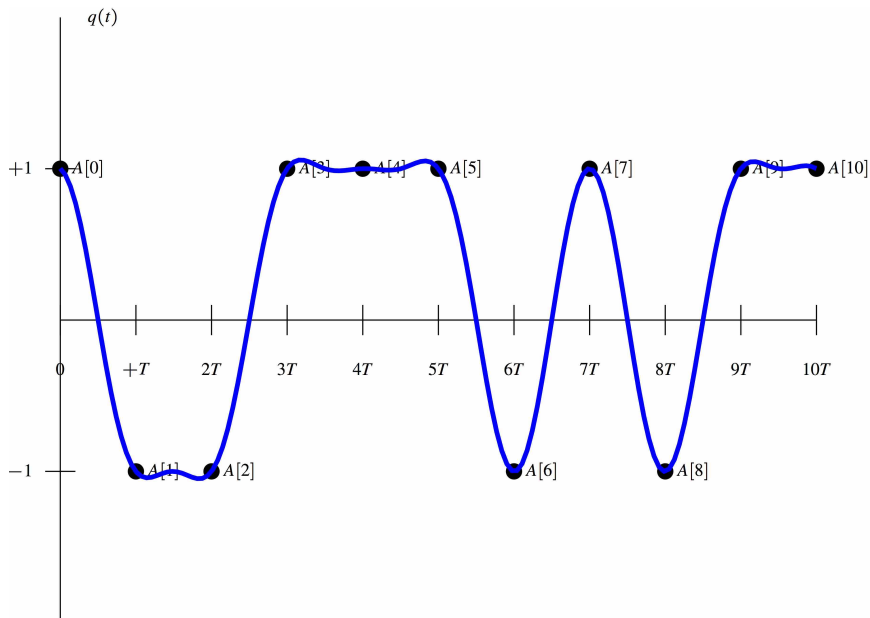
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0,5$



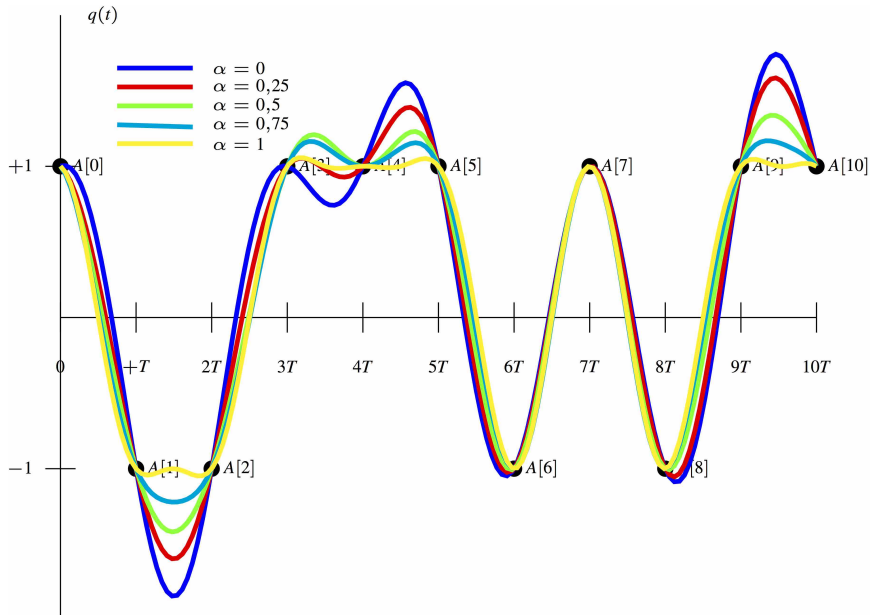
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0,75$



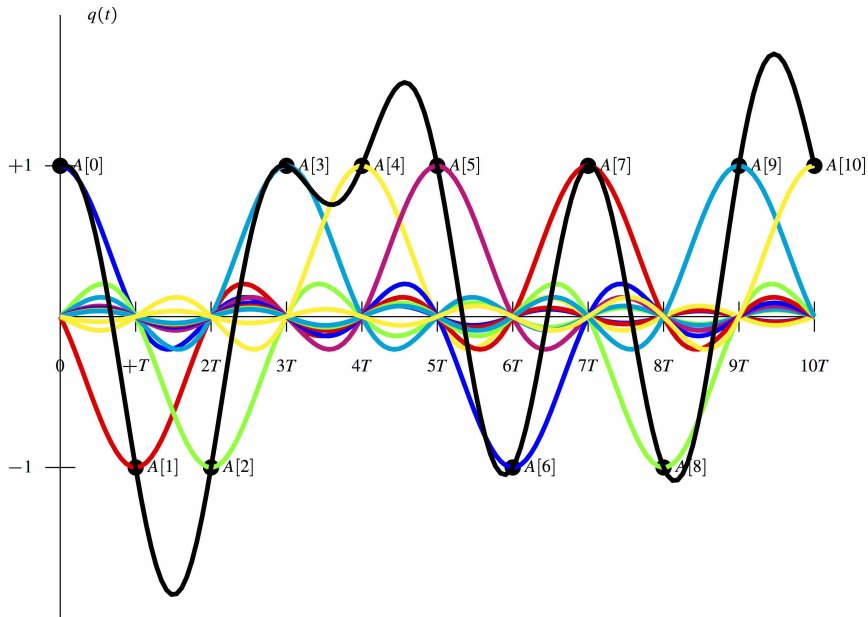
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 1$



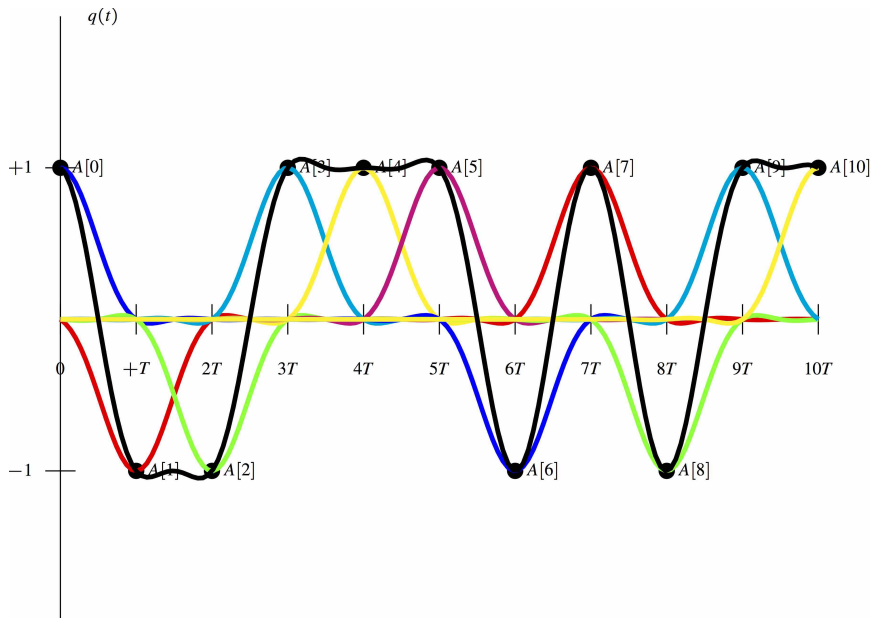
Señales con cosenos alzados (ideales) - Comparación



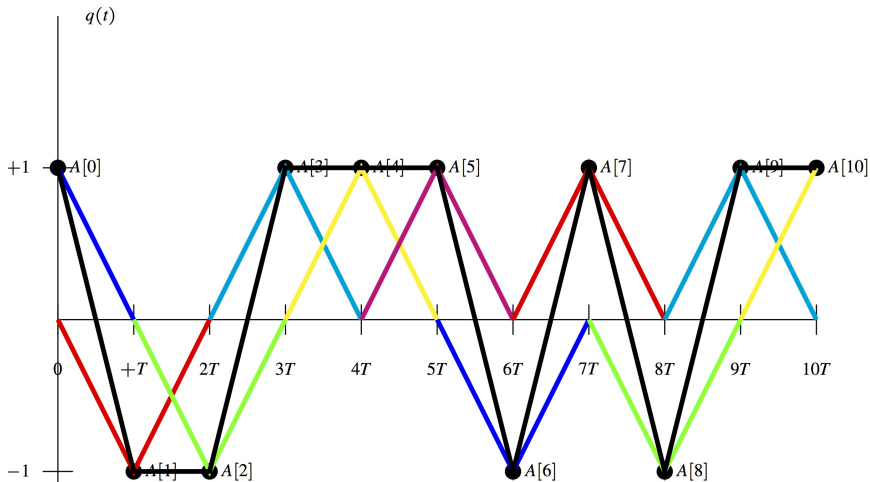
Componentes - $\alpha = 0$



Componentes - $\alpha = 1$

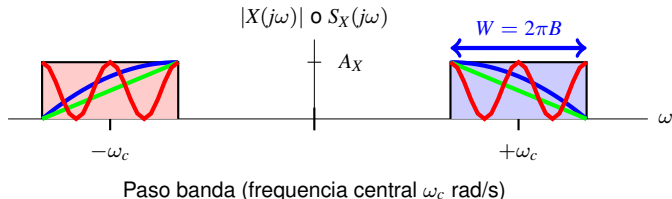


Componentes - $p(t)$ triangular



Modulaciones PAM paso banda

- Objetivo de una modulación PAM paso banda
 - ▶ Generar señales de ancho de banda finito en un rango de frecuencias paso banda
 - ★ Frecuencia central ω_c rad/s (o $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ Hz)
 - ★ Ancho de banda finito W rad/s (o $B = \frac{W}{2\pi}$ Hz)
 - ▶ Señales apropiadas para la transmisión a través de un canal paso banda



PAM paso banda - Generación con modulación AM

- Alternativa más sencilla
- Se genera una señal PAM en banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT)$$

- Esta señal PAM se modula con una modulación de amplitud. Hay distintas variantes
 - ▶ Modulación AM convencional (doble banda lateral con portadora)
 - ▶ Doble banda lateral (sin portadora)
 - ▶ Banda lateral única
 - ★ Banda lateral inferior
 - ★ Banda lateral superior
 - ▶ Banda lateral vestigial
 - ★ Banda lateral inferior
 - ★ Banda lateral superior

Inconvenientes de una modulación AM

- AM convencional y doble banda lateral
 - ▶ Eficiencia espectral se reduce a la mitad (doble ancho de banda)
- Modulación de banda lateral única
 - ▶ Requiere filtros ideales en el transmisor
 - ★ Filtros reales introducen distorsión
- Banda lateral vestigial
 - ▶ Requiere filtros de banda lateral vestigial
 - ★ Características restrictivas
 - ▶ Se reduce (ligeramente) la eficiencia espectral
 - ★ El ancho de banda se incrementa en el tamaño del vestigio

Modulación con dos portadoras en cuadratura

- Dos secuencias de símbolos (no necesariamente independientes) se transmiten simultáneamente (tasa $R_s = \frac{1}{T}$ para ambas)

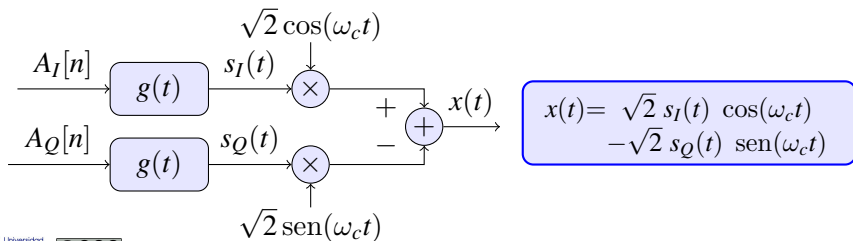
$$A_I[n] \quad A_Q[n]$$

- Dos señales PAM banda base con filtro transmisor $g(t)$

$$s_I(t) = \sum_n A_I[n] g(t - nT) \quad s_Q(t) = \sum_n A_Q[n] g(t - nT)$$

$s_I(t)$: in-phase component, $s_Q(t)$: quadrature component

- Generación de la señal paso banda, $x(t)$, con $s_I(t)$ y $s_Q(t)$



Notación compleja para PAM paso banda

- Secuencia compleja de símbolos

$$A[n] = A_I[n] + jA_Q[n]$$

▶ $A_I[n] = \mathcal{Re}\{A[n]\}$, $A_Q[n] = \mathcal{Im}\{A[n]\}$

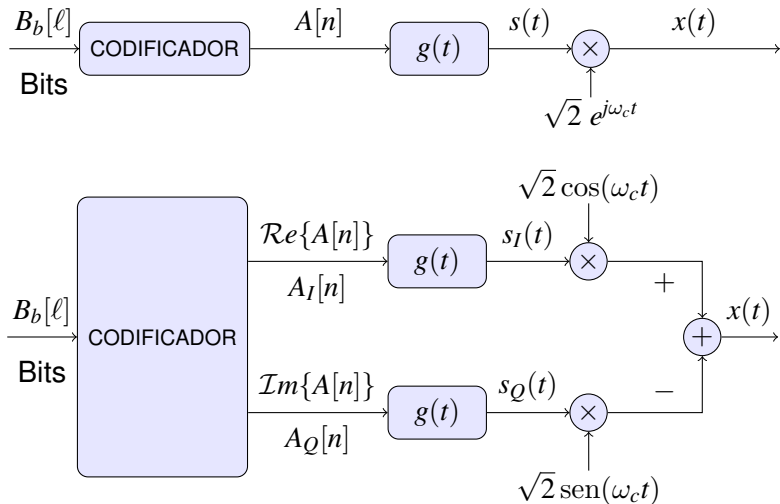
- Señal compleja en banda base, $s(t)$:

$$s(t) = s_I(t) + js_Q(t) = \sum_n A[n] g(t - nT)$$

- La señal PAM modulada paso banda se escribe como

$$x(t) = \sqrt{2} \mathcal{Re} \{ s(t) e^{j\omega_c t} \} = \sqrt{2} \mathcal{Re} \left\{ \sum_n A[n] g(t - nT) e^{j\omega_c t} \right\}$$

Modulador PAM paso banda



Relación con un espacio de señales 2D

- Señal en espacio de señales bidimensional se escribe

$$x(t) = \sum_n A_0[n] \phi_0(t - nT) + \sum_n A_1[n] \phi_1(t - nT)$$

- ▶ $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$ son señales ortonormales

- Formulación PAM paso banda sólo es equivalente si

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} \times k, \quad \text{with } k \in \mathbb{Z}$$

En este caso

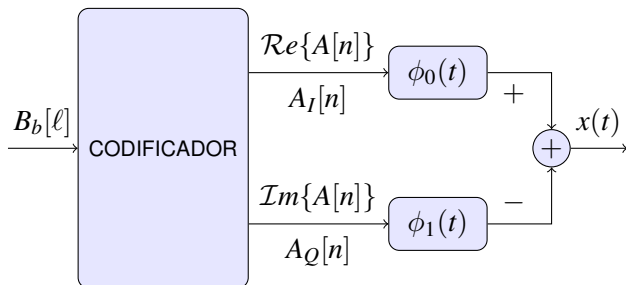
$$A_0[n] = A_I[n], \quad A_Q[n] = A_1[n]$$

$$\phi_0(t) = g(t) \cos(\omega_c t), \quad \phi_1(t) = -g(t) \sin(\omega_c t)$$

$$\phi_0(t - nT) = g(t - nT) \cos(\omega_c(t - nT)) = g(t - nT) \cos(\omega_c t)$$

$$\phi_1(t - nT) = -g(t - nT) \sin(\omega_c(t - nT)) = -g(t - nT) \sin(\omega_c t)$$

Modulador en espacio de señales 2D



Constelaciones PAM paso banda

- Representación 2D de los posibles valores de $A_I[n]$ vs $A_Q[n]$
- Constelaciones más frecuentes
 - ▶ Constelaciones QAM (Quadrature Amplitude Modulation)
 - ★ $M = 2^m$ símbolos, con m par
 - ★ Símbolos en una retícula cuadrada ($2^{m/2} \times 2^{m/2}$ niveles)
 - $A_I[n]$ y $A_Q[n]$ usan constelaciones PAM banda base
 - Asignación binaria, codificación, y reglas de decisión independientes en cada componente

$$E_s = \frac{2(M-1)}{3} J$$

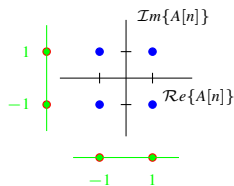
- ▶ Constelaciones QAM en cruz
 - ★ $M = 2^m$ símbolos, con m impar
 - ★ Símbolos en una rejilla cuadrada no completa
 - Asignación binaria, codificación y reglas de decisión no son independientes

$$E_s = \frac{2}{3} \left(\frac{31}{32} M - 1 \right) J$$

- ▶ Constelaciones PSK (Phase Shift Keying)
 - ★ Símbolos equiespaciados sobre un círculo (radio $\sqrt{E_s}$)
 - Energía constante para todos los símbolos

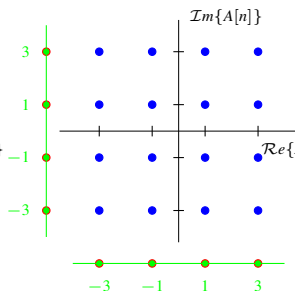
$$E_s = |A[n]|^2$$

Constelaciones QAM



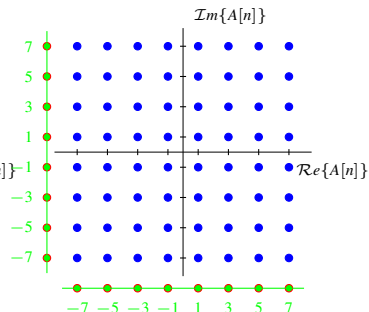
4-QAM

(2-PAM) × (2-PAM)



16-QAM

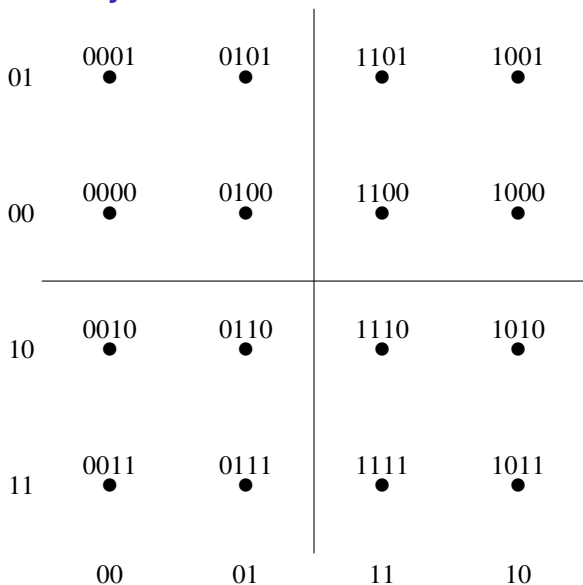
(4-PAM) × (4-PAM)



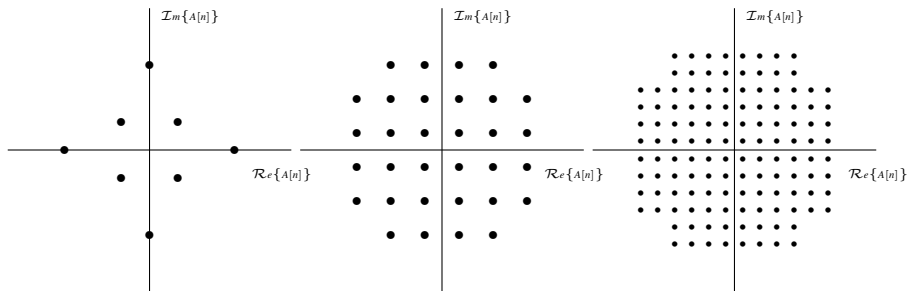
64-QAM

(8-PAM) × (8-PAM)

Codificación Gray QAM



Constelaciones QAM en cruz



Constelaciones 8-QAM, 32-QAM y 128-QAM

Constelación PSK (Phase shift keying)

- Constelación PSK

$$A[n] = \sqrt{E_s} e^{j\varphi[n]}$$

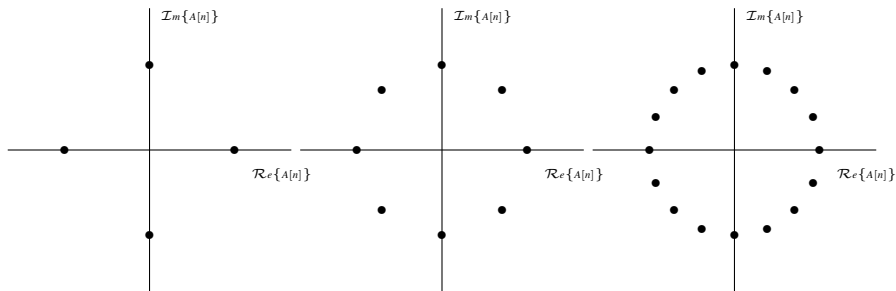
- ▶ Módulo constante
- ▶ La información está en la fase del símbolo

- Forma de onda para modulaciones con constelaciones PSK

$$\begin{aligned}x(t) &= \sqrt{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \sum_n g(t - nT) e^{j(\omega_c t + \varphi[n])} \right\} \\ &= \sqrt{2E_s} \sum_n g(t - nT) \cos(\omega_c t + \varphi[n])\end{aligned}$$

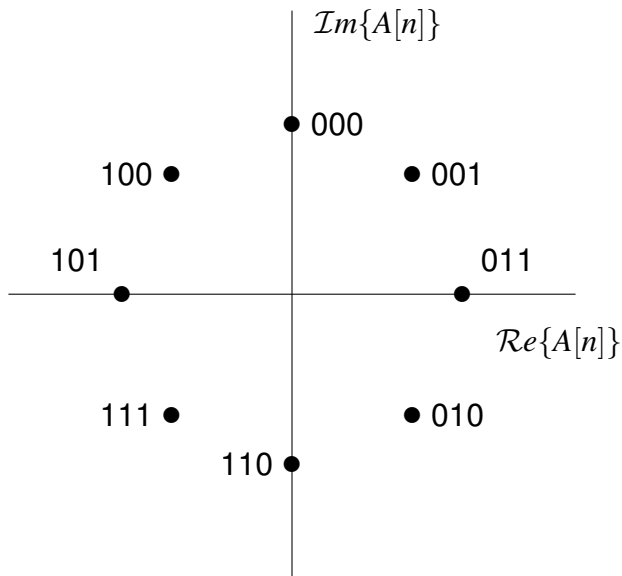
- ▶ Saltos de fase en las transiciones entre símbolos

Constelaciones PSK

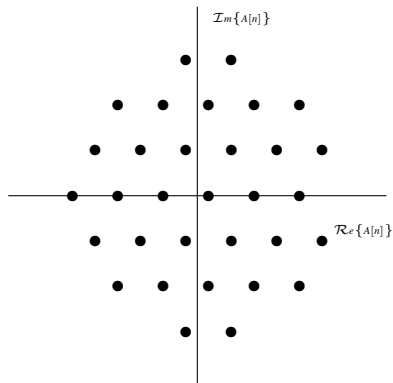
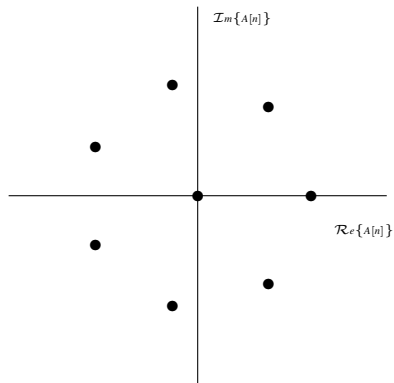


Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

Codificación Gray PSK



Otras constelaciones



Constelaciones 1-7-AM-PM y 32-hexagonal

Espectro de modulaciones PAM paso banda

- Condiciones para cicloestacionariedad de $x(t)$:

$$E [A[k + m] A[k]] = 0, \text{ para todo } k, m, m \neq 0$$

- ▶ Condiciones para constelaciones QAM
 - ★ Secuencias de símbolos $A_I[n]$ y $A_Q[n]$ son mutuamente independientes
 - ★ Funciones de autocorrelación idénticas para $A_I[n]$ y $A_Q[n]$
- ▶ Condiciones para constelaciones PSK
 - ★ Valores de $\varphi[n]$ son independientes

- Bajo ciclostationariedad la densidad espectral de potencia es

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2} [S_S(j\omega - j\omega_c) + S_S^*(-(j\omega + j\omega_c))]$$

$$S_S(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2$$

NOTA: $A[n]$ es una secuencia compleja en una PAM paso banda

Espectro de modulaciones PAM paso banda (II)

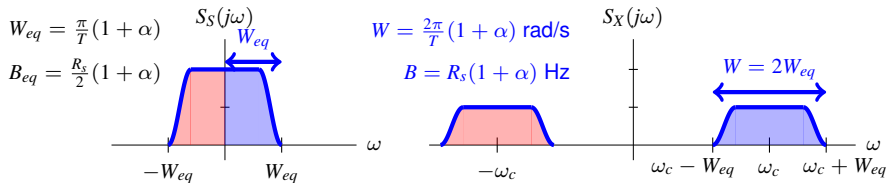
- Para secuencias de símbolos blancas: $S_A(e^{j\omega}) = E_s$

$$S_S(j\omega) = \frac{E_s}{T} |G(j\omega)|^2$$

- ▶ $G(j\omega)$ es responsable de la forma del espectro
 - ★ $S_S(j\omega)$ es real y simétrica

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{E_s}{T} \left[|G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(j\omega + j\omega_c)|^2 \right]$$

- Ejemplo usando filtros de la familia del coseno alzado



- ★ Ancho de banda paso banda, W , es el doble que el equivalente en banda base W_{eq}
- ★ Misma eficiencia espectral: se transmiten dos secuencias simultáneamente

Potencia transmitida

- La potencia media transmitida es

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) d\omega$$

- Si la secuencia $A[n]$ es blanca

$$S_A(e^{j\omega}) = E_s, \quad S_S(j\omega) = \frac{E_s}{T} |G(j\omega)|^2$$

- ▶ Potencia para una secuencia blanca

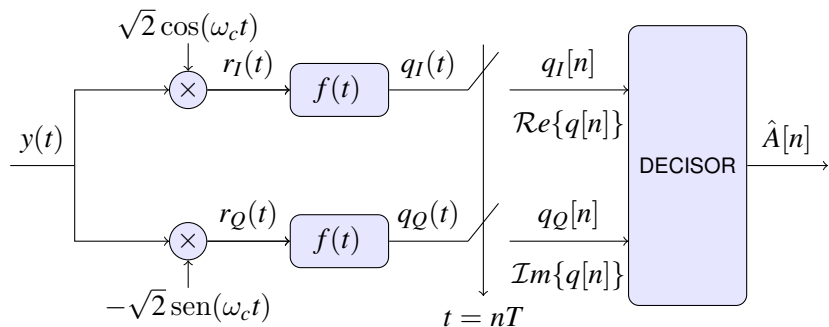
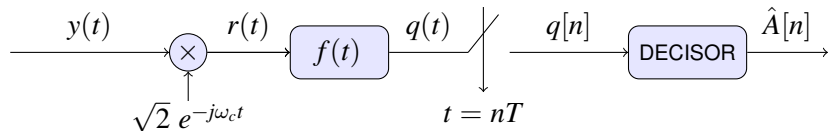
$$P_X = \frac{E_s}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{E_s}{T} \times \mathcal{E}\{g(t)\}$$

- ★ Para filtros normalizados (con energía unidad)

$$P_X = \frac{E_s}{T} = E_s \times R_s \text{ Watts}$$

Demodulador PAM paso banda

- Demodulación y filtrado en banda base puede ser utilizada
 - Notación compleja e implementación por componentes se muestran en las figuras



Demodulador equivalente (alternativo)

- Señal antes del muestreador (utilizando notación compleja)

$$q(t) = (y(t) e^{-j\omega_c t}) * (\sqrt{2} f(t))$$

- Expresión de la convolución

$$q(t) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) y(t - \tau) e^{j\omega_c \tau} e^{-j\omega_c t} d\tau$$

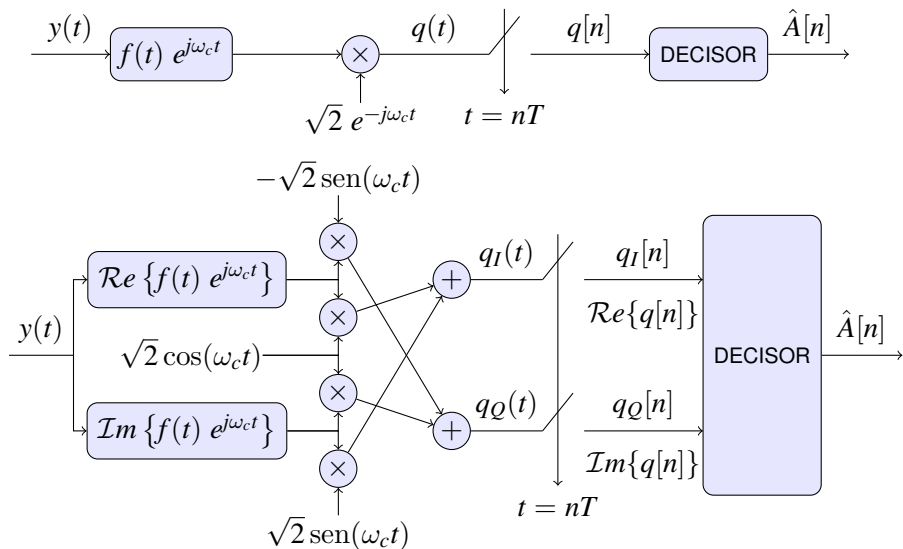
- Reordenando términos, se obtiene un esquema de demodulación alternativo

$$q(t) = e^{-j\omega_c t} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} f(\tau) e^{j\omega_c \tau} y(t - \tau) d\tau$$

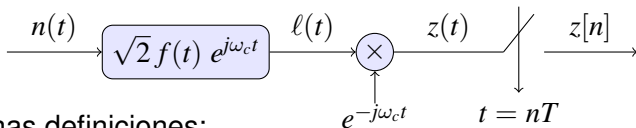
$$q(t) = e^{-j\omega_c t} \left(y(t) * \left(\sqrt{2} f(t) e^{j\omega_c t} \right) \right)$$

Filtrado paso banda y luego demodulación

Demodulador equivalente (II)



Características de ruido en el receptor



- Algunas definiciones:

$$f_c(t) = \sqrt{2} f(t) e^{j\omega_c t}, F_c(j\omega) = \sqrt{2} F(j\omega - j\omega_c)$$

- Propiedades:

- 1 $z(t)$ es estacionario si $\ell(t)$ es circularmente simétrico

NOTA: Un proceso complejo $X(t)$ es circularmente simétrico si las partes real e imaginaria, $X_r(t)$ y $X_i(t)$, son conjuntamente estacionarios, y sus correlaciones cumplen

$$R_{X_r}(\tau) = R_{X_i}(\tau), R_{X_r, X_i}(\tau) = -R_{X_i, X_r}(\tau)$$

- 2 $\ell(t)$ es circularmente simétrico si ω_c es mayor que el ancho de banda del filtro $f_c(t)$ (sistema de banda estrecha)

$$S_\ell(j\omega) = 2 S_n(j\omega) |F(j\omega - j\omega_c)|^2$$

Señal de ruido $z(t)$ en el receptor

$$z(t) = z_I(t) + j z_Q(t)$$

- $z(t)$ es circularmente simétrico y su densidad espectral de potencia es

$$S_z(j\omega) = 2 S_n(j\omega + j\omega_c) |F(j\omega)|^2$$

- ▶ Si el proceso es simétrico, sus partes real e imaginaria, $z_I(t)$ y $z_Q(t)$, tienen la misma varianza y son independientes para cualquier instante t
- ▶ In general, $z_I(t_1)$ and $z_Q(t_2)$, for $t_1 \neq t_2$ are not independent
- ▶ Si el espectro es hermítico, $S_z(j\omega) = S_z^*(-j\omega)$, $z_I(t_1)$ y $z_Q(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$ son también independientes
 - ★ Si $n(t)$ es blanco, esto se cumple si $f(t)$ es real

Secuencia de ruido discreto $z[n]$ en el receptor

$$z[n] = z_I[n] + j z_Q[n]$$

- $z[n]$ es circularmente simétrico

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{2}{T} \sum_k S_n \left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{\omega_c}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) \left| F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) \right|^2$$

Para ruido blanco $n(t)$

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow S_z(e^{j\omega}) = N_0 \frac{1}{T} \sum_k \left| F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) \right|^2$$

El ruido muestreado $z[n]$ puede ser blanco

- Ocurre si la función de ambigüedad de $f(t)$, $r_f(t) = f(t) * f^*(-t)$, cumple las condiciones del criterio de Nyquist a tasa de símbolo

$$S_z(j\omega) = N_0 \times \mathcal{E} \{f(t)\}$$

- $z_I[n]$ y $z_Q[n]$ son independientes para cada instante n
- $z_I[n_1]$ y $z_Q[n_2]$, para $n_1 \neq n_2$, son independientes

$$S_{z_I}(j\omega) = S_{z_Q}(j\omega) = \frac{N_0}{2} \times \mathcal{E} \{f(t)\}$$

Varianza y distribución de $z[n]$

- La varianza del ruido complejo es

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z(e^{j\omega}) d\omega$$

- Si $n(t)$ es blanco, con $S_n(j\omega) = N_0/2$ W/Hz, y si $r_f(t)$ es normalizado y cumple las condiciones del criterio de Nyquist a R_s (T)

$$\sigma_z^2 = N_0 \quad \left(\sigma_{z_I}^2 = \sigma_{z_Q}^2 = \frac{N_0}{2} \right)$$

NOTA: recuerde que $z[n] = z_I[n] + j z_Q[n]$

- Si el ruido es circularmente simétrico
 - ▶ Partes reales e imaginaria ($z_I[n]$ y $z_Q[n]$) son independientes y ambos tienen varianza $N_0/2$
 - ▶ Función densidad de probabilidad

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{|z|^2}{N_0}}$$

NOTA: Si el filtro receptor no está normalizado, la varianza se multiplica por $\mathcal{E}\{f(t)\}$

Canal discreto equivalente

- Señal muestreada a la salida del filtro receptor

$$q[n] = q(t)|_{t=nT} = q(nT), \text{ con } q(t) = \sum_n A[n] p(t - nT) + z(t)$$

- Canal discreto equivalente paso banda:

$$p[n] = p(t)|_{t=nT} = p(nT)$$

$$q[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$

- Definición del canal complejo equivalente en banda base, $h_{eq}(t)$

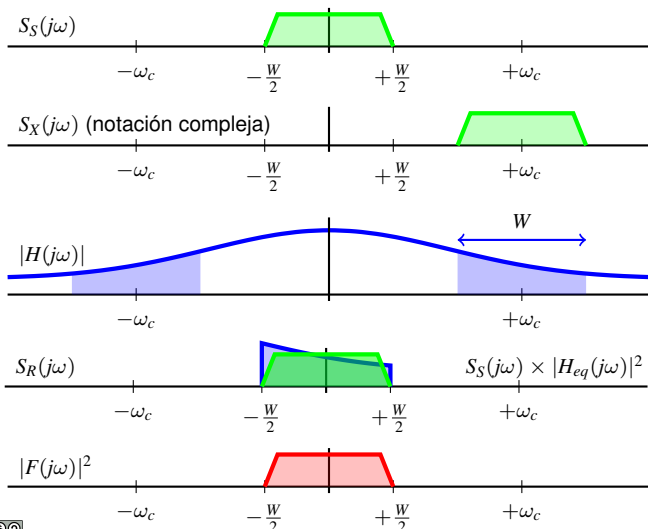
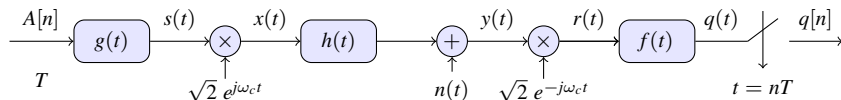
$$h_{eq}(t) = e^{-j\omega_c t} h(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad H_{eq}(j\omega) = H(j\omega + j\omega_c)$$

Comportamiento del canal en torno a la frecuencia ω_c se traslada a banda base

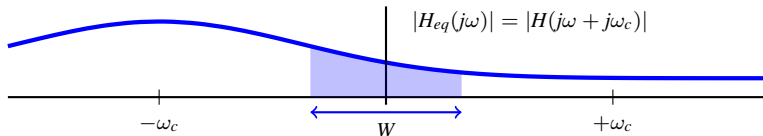
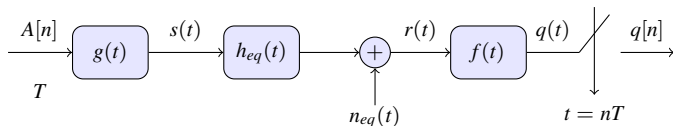
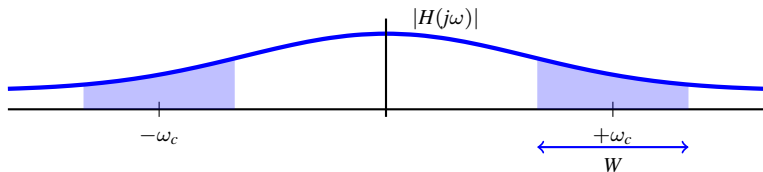
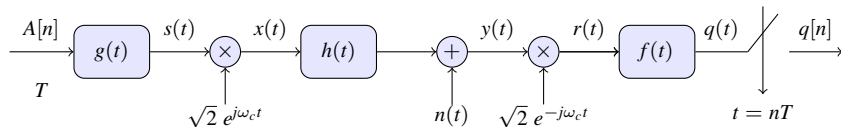
- Respuesta conjunta transmisor-canal-receptor

$$p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) \quad \overset{\mathcal{T}\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega) H_{eq}(j\omega) F(j\omega)$$

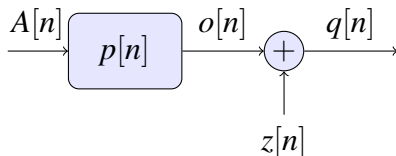
Canal complejo equivalente en banda base



Canal complejo equivalente en banda base (II)

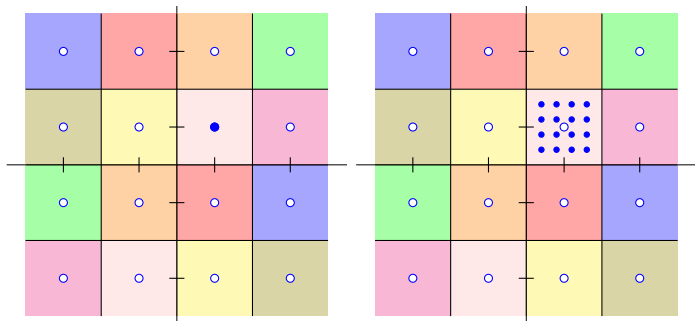


Canales discretos equivalentes - PAM banda base y paso banda



- Identificación de PAM banda base y paso banda
 - ▶ Símbolos $A[n]$
 - ▶ Canal discreto equivalente $p[n]$
 - ▶ Ruido discreto $z[n]$
 - ★ Son reales en PAM banda base
 - ★ Son complejos en PAM paso banda

ISI: Constelación extendida

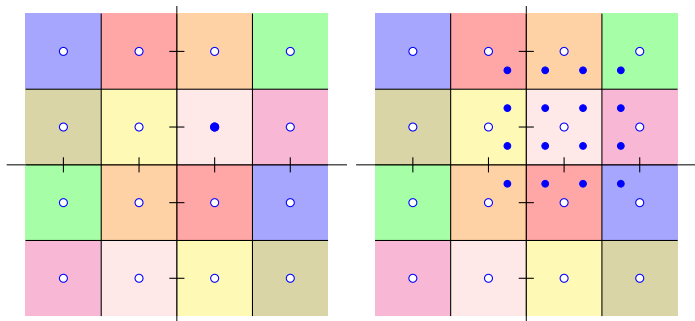


- Ejemplo de ISI (memoria de $p[n]$, $K_p = 1$)

$$p[n] = \delta[n] + a \delta[n - 1], \quad o[n] = A[n] + a A[n - 1]$$

- ▶ Transmisión de un símbolo en $A[n]$
 - ★ En el receptor se observa una constelación extendida alrededor de dicho símbolo (un punto en cada instante que dependerá del valor del símbolo anterior (M posibilidades))
 - ★ Habrá luego que añadir el efecto del ruido

ISI: Constelación extendida (II)



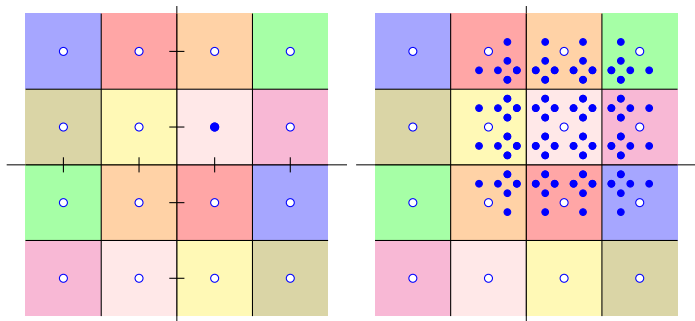
- Ejemplo de ISI (memoria de $p[n]$, $K_p = 1$)

$$p[n] = \delta[n] + a \delta[n - 1], \quad o[n] = A[n] + a A[n - 1]$$

- ▶ Si aumenta a los puntos de la constelación extendida para cada símbolo se separan más de este
- ▶ Si aumenta la memoria de $p[n]$ el tamaño de la constelación aumenta exponencialmente

M^{K_p} posibles valores por cada símbolo

ISI: Constelación extendida (III)



- Ejemplo de ISI (memoria de $p[n]$, $K_p = 2$)

$$p[n] = \delta[n] + a \delta[n - 1] + b \delta[n - 2]$$

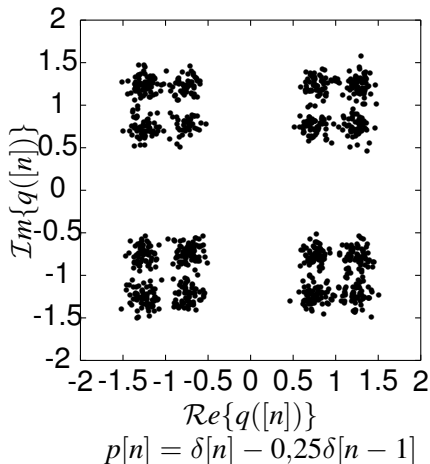
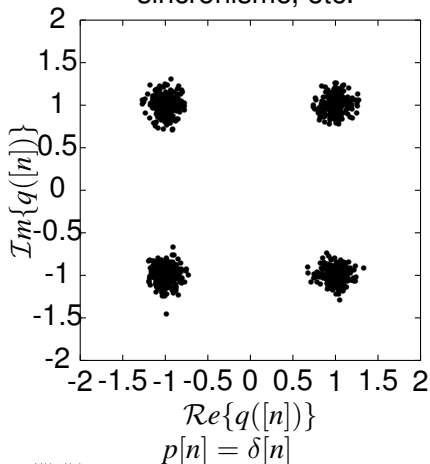
$$o[n] = A[n] + a A[n - 1] + b A[n - 2]$$

- ▶ Si aumenta la memoria de $p[n]$ el tamaño de la constelación aumenta exponencialmente

M^{K_p} posibles valores por cada símbolo

Diagrama de dispersión

- Herramienta de monitorización para sistemas paso banda
 - ▶ Representación de $\mathcal{R}e\{q[n]\}$ versus $\mathcal{I}m\{q[n]\}$
 - ▶ Ideal: debe aparecer la constelación transmitida
 - ▶ Permite visualizar el nivel de ruido, nivel de ISI, errores de sincronismo, etc.

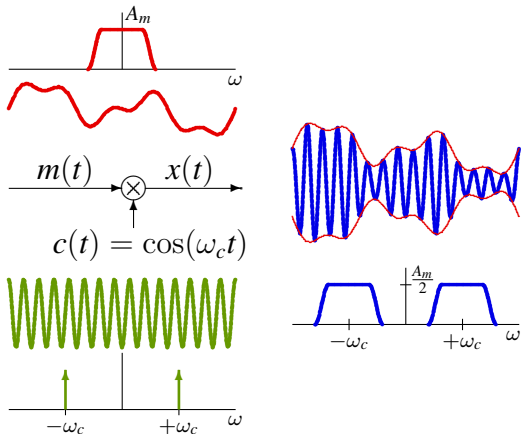


Revisión - Producto con una senoide

- Multiplicar por una senoide de frecuencia ω_c genera, espectralmente, dos réplicas del espectro de la señal, desplazadas $\pm\omega_c$

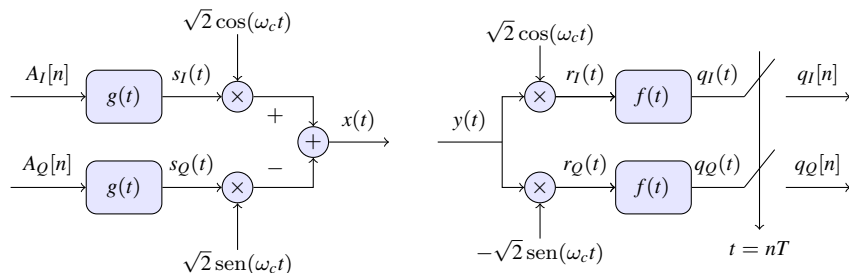
$$x(t) = m(t) \times \cos(\omega_c t) \quad \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega) = \frac{1}{2}M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}M(j\omega + j\omega_c)$$

$$\text{Densidad espectral de potencia: } S_X(j\omega) = \frac{1}{4}S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_M(j\omega + j\omega_c)$$



Análisis de la modulación / demodulación

- Digrama de bloques de transmisor y receptor



- Transmisor: modula dos señales en banda base con portadoras ortogonales
- Receptor: demodula cada componente y filtra con $f(t)$
 - ▶ Filtro receptor $f(t)$ con respuesta banda base (paso bajo)
 - ▶ Configuración típica: filtro en raíz de coseno alzado

Análisis de la modulación / demodulación (II)

- La señal recibida sin distorsión (señal modulada) tiene la forma

$$y(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

- En el receptor, la señal se procesa dividiéndola en dos componentes

$$q_I(t) \equiv \text{filtrar } [A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)] \times \cos(\omega_c t)$$

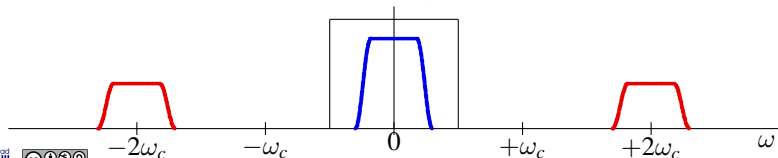
$$q_Q(t) \equiv \text{filtrar } [A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)] \times \sin(\omega_c t)$$

- Identidades trigonométricas y eliminación (filtrado) de términos paso banda

$$X \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2}}_{\text{Deseado}} + \underbrace{\frac{X}{2} \cos(2\omega_c t)}_{\text{Paso banda en } 2\omega_c}$$

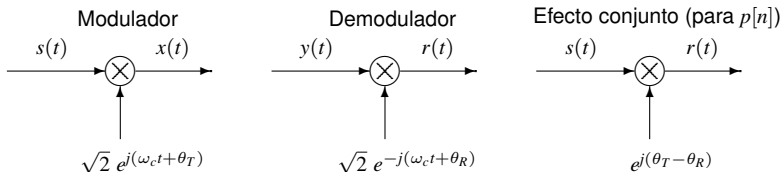
$$X \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2} \sin(2\omega_c t)}_{\text{Paso banda en } 2\omega_c}$$

$$X \sin(\omega_c t) \sin(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2}}_{\text{Deseado}} - \underbrace{\frac{X}{2} \cos(2\omega_c t)}_{\text{Paso banda en } 2\omega_c}$$



Análisis de la modulación / demodulación (III)

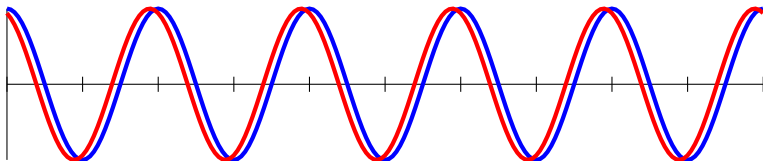
- El producto de dos portadoras permite recuperar las señales banda base transmitidas
 - ▶ Productos $\cos(\omega_c t) \times \cos(\omega_c t)$ o $\sin(\omega_c t) \times \sin(\omega_c t)$ introducen un factor $\frac{1}{2}$
 - ★ Los factores $\sqrt{2}$ se introducen en transmisor y receptor para compensarlo
 - ▶ La notación compleja equivalente falla al representar esta atenuación
 - ★ Hay que tenerlo en cuenta cuando se usa la representación



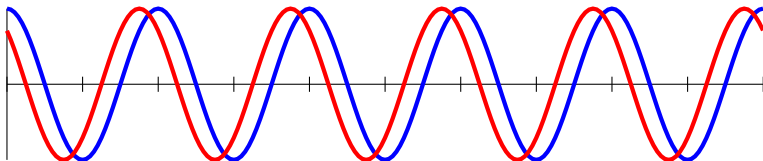
- Receptores no coherentes (no síncronos)
 - ▶ Receptor cuyo demodulador tiene portadoras con fase diferente a la fase de las portadoras del modulador
 - ▶ Produce como efecto una rotación en la constelación recibida
 - ▶ Un receptor coherente necesita recuperar la fase de la señal recibida (con un PLL)
 - ★ Coste adicional del PLL (*Phase Locked Loop*)

Sinusoides con distintas fase o frecuencia

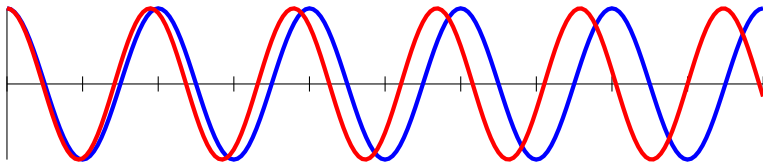
Portadoras con misma frecuencia y desfase de 20°



Portadoras con misma frecuencia y desfase de 45°



Portadoras con frecuencias distintas: desfase "variable"



Tasa de transmisión binaria (R_b bits/s)

- La tasa binaria se obtiene a partir de $R_b = m \times R_s$ bits/s
 - ▶ Tasa de símbolo: R_s baudios (símbolos/s)
 - ▶ Número de bits por símbolo de la constelación: m

$$m = \log_2(M)$$

M : número de símbolos de la constelación

- Limitación en la máxima tasa binaria alcanzable
 - ▶ Limitación sobre R_s : ancho de banda disponible (B Hz)
Utilizando filtros de la familia coseno alzado

$$\frac{\text{BANDA BASE}}{R_{s|max}} = \frac{2B}{1+\alpha}}{\quad} \quad \frac{\text{PASO BANDA}}{R_{s|max}} = \frac{B}{1+\alpha}}$$

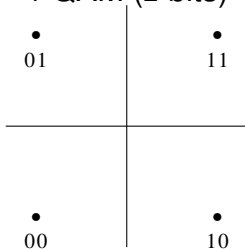
- ▶ Limitación en el número de símbolos M (y por tanto en m)
 - ★ Limitación en potencia: limita la energía media por símbolo $E_s = E \left[|A[n]|^2 \right]$
 - Esto limita el máximo módulo de los puntos de la constelación
 - ★ Las prestaciones requeridas limitan la mínima distancia entre símbolos

$$P_e \approx k Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$

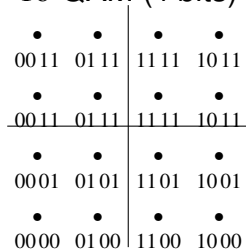
- ★ E_s y P_e determinan una densidad máxima para la constelación

Densidad de las constelaciones - Ejemplo - QAM

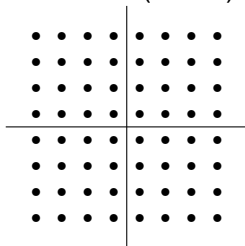
4-QAM (2 bits)



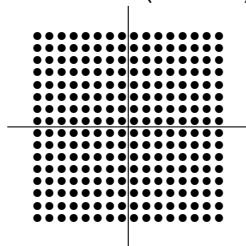
16-QAM (4 bits)



64-QAM (8 bits)



256-QAM (16 bits)



Densidad de las constelaciones - Ejemplo - QAM

- Aumento del tamaño de la constelación (M símbolos):
 - ▶ Aumento en la tasa binaria
 - ★ Aumenta el número de bits por símbolo $m = \log_2 M$
 - ▶ Reducción de prestaciones para una E_s dada
 - ★ Reducción de la distancia entre puntos de la constelación

Ejemplo para constelaciones M -QAM

M (símbolos)	m (bits/símbolo)	E_s con niveles normalizados ($d_{min} = 2$)	d_{min} con $E_s = 2$
4	2	2	2
16	4	10	0,8944
64	8	42	0,4364
256	16	170	0,2169

