uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare (OCW)

Comunicaciones Digitales

Capítulo 3

Modulaciones angulares (de fase y frecuencia)

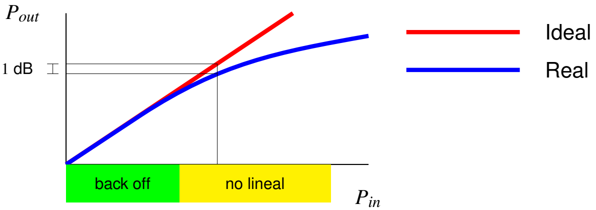
Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice

Características generales de las modulaciones angulares

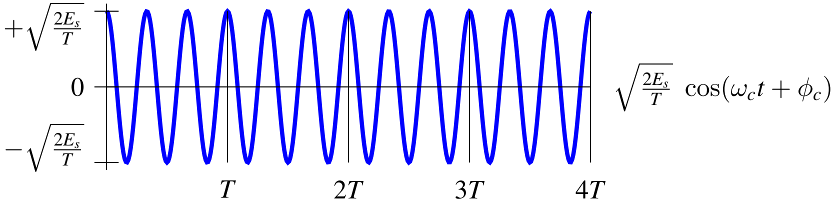
- La información transmitida ($A[n]$) no está impresa en la amplitud de la señal modulada, sino en su información angular
  - Fase de la señal en el intervalo de símbolo
  - Frecuencia de la señal en el intervalo de símbolo
- Adecuadas para la transmisión cuando existe una fuerte distorsión de amplitud
  - Ejemplo: utilización de amplificadores en la zona no lineal



- Inconveniente: ancho de banda más elevado que el de las modulaciones lineales de amplitud

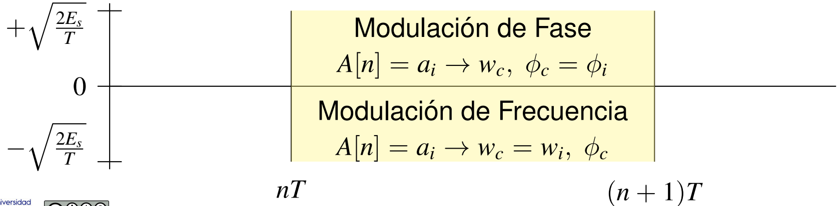
Modulaciones angulares

- Portadora (simusoide) con amplitud constante



  - Dos parámetros: fase ϕ_c / frecuencia ω_c

- Modulación angular: fase / frequencia en un intervalo de símbolo depende del símbolo transmitido en ese intervalo

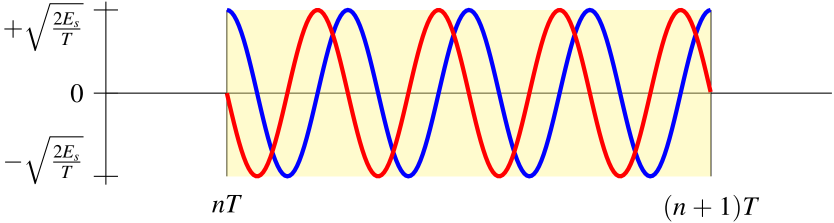


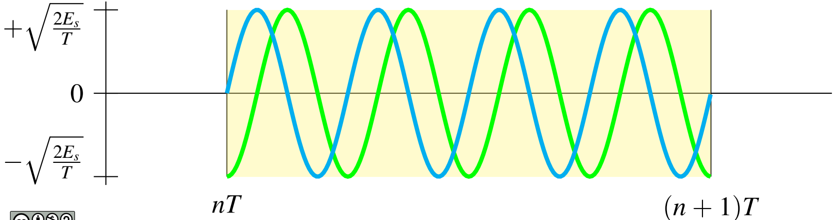
Modulaciones angulares: ejemplo constelaciones 4-árias

$$A[n] \in \{a_0 \text{ (azul)}, a_1 \text{ (rojo)}, a_2 \text{ (verde)}, a_3 \text{ (cyan)}\}$$

$$\boldsymbol{a}_0 \equiv \phi_c = 0 \quad \boldsymbol{a}_1 \equiv \phi_c = 90 \quad \boldsymbol{a}_2 \equiv \phi_c = 180 \quad \boldsymbol{a}_3 \equiv \phi_c = 270$$

- Modulación de fase





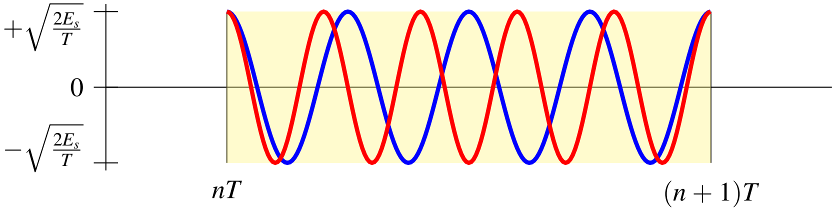
Modulaciones angulares: ejemplo constelaciones 4-árias

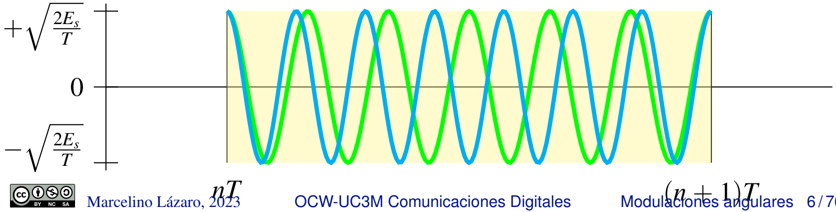
$$A[n] \in \{a_0 \text{ (azul)}, a_1 \text{ (rojo)}, a_2 \text{ (verde)}, a_3 \text{ (cyan)}\}$$

$$a_0 \equiv \omega_c = \frac{8\pi}{T} \quad a_1 \equiv \omega_c = \frac{10\pi}{T} \quad a_2 \equiv \omega_c = \frac{12\pi}{T} \quad a_3 \equiv \omega_c = \frac{14\pi}{T} \text{ rad/s}$$

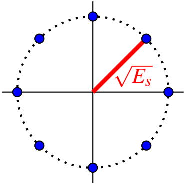
$$a_0 \equiv f_c = 4R_s \quad a_1 \equiv f_c = 5R_s \quad a_2 \equiv f_c = 6R_s \quad a_3 \equiv f_c = 7R_s \text{ Hz}$$

- Modulación de frecuencia





Modulaciones de fase



- Modulación PSK (Phase Shift Keying): lineal (PAM paso banda)
  - Constelaciones de módulo constante - Información en la fase
    - ★ Símbolos

$$\boxed{A[n] = \sqrt{E_s}\; e^{j\phi[n]}}$$

    - ★ Señal compleja banda base

$$s(t) = \sum_n A[n]\; g(t-nT) = \sqrt{E_s} \sum_n e^{j\phi[n]}\; g(t-nT)$$

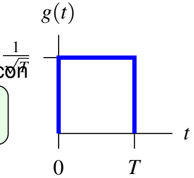
    - ★ Señal modulada paso banda

$$x(t) = \sqrt{2} \mathcal{R}e\left\{s(t)\; e^{j\omega_c t}\right\} = \sqrt{2E_s} \mathcal{R}e\left\{\sum_n g(t-nT)\; e^{j(\omega_c t + \phi[n])}\right\}$$

$$= \underbrace{\sqrt{2E_s} \sum_n g(t-nT)}_{\text{envolvente}}\; \cos(\omega_c t + \phi[n])$$

  - Filtro transmisor : envolvente constante se puede conseguir con

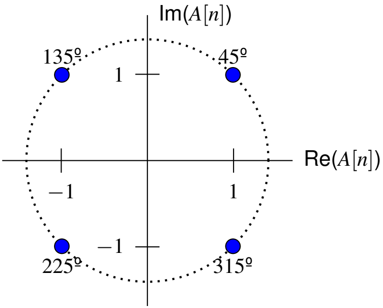
$$\boxed{g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, w_T(t), \qquad w_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$



- Inconveniente: ancho de banda elevado (saltos de fase en $t = nT$)

$$\boxed{S_X(j\omega) = \frac{E_s}{2T}\left[|G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(j\omega + j\omega_c)|^2\right],\; |G(j\omega)| = \sqrt{T}\; \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}$$

Modulación QPSK - $M = 4$ - Constelación



$$\phi[n] = 45: A[n] = +1 + j \equiv \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\phi[n] = 135: A[n] = -1 + j \equiv \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\phi[n] = 225: A[n] = -1 - j \equiv \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\phi[n] = 315: A[n] = +1 - j \equiv \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Saltos de fase en señal QPSK

- Señal PSK

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sqrt{2} s_I(t)\ \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} s_Q(t)\ \mathrm{sen}(\omega_c t) \\
&= \sqrt{2E_s} \sum_n g(t-nT) \cos(\omega_c t + \phi[n])
\end{aligned}
$$

siendo

$$
s_I(t) = \sum_n \mathcal{Re}\{A[n]\} g(t-nT) = \sum_n A_I[n]\ g(t-nT)
$$

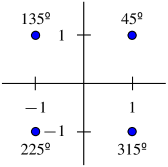
$$
s_Q(t) = \sum_n \mathcal{Im}\{A[n]\} g(t-nT) = \sum_n A_Q[n]\ g(t-nT)
$$

- Saltos de fase
  - $\pm 90^{\text{o}}$: cambia $s_I(t)$ o $s_Q(t)$
  - 180^{o}: cambian $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ simultáneamente

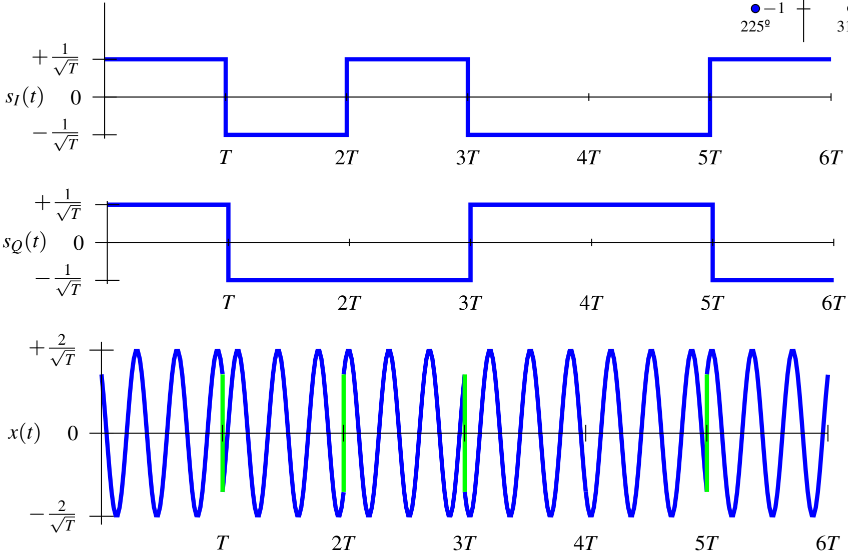
Relaciones trigonométricas

$$
\begin{aligned}
+\cos(\omega_c t) - \mathrm{sen}(\omega_c t) &= \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 45^{\text{o}}) \\
-\cos(\omega_c t) - \mathrm{sen}(\omega_c t) &= \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 135^{\text{o}}) \\
-\cos(\omega_c t) + \mathrm{sen}(\omega_c t) &= \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 225^{\text{o}}) \\
+\cos(\omega_c t) + \mathrm{sen}(\omega_c t) &= \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 315^{\text{o}})
\end{aligned}
$$

Modulación QPSK



$A[0] = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[1] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[2] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[3] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[4] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[5] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$



Modulación QPSK con desplazamiento temporal (OQPSK)

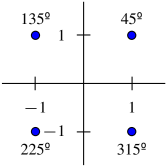
- Se eliminan los saltos de 180°
  - Evitar que coincidan las transiciones de $s_I(t)$ y $s_Q(t)$
- Señal OQPSK
  - Se retarda la componente en cuadratura $T/2$
  - Saltos sólo de $\pm 90^{\circ}$
  - Saltos más frecuentes (cada $T/2$)

$$x(t) = \sqrt{2}\, s_I(t)\ \cos(\omega_c t) - \sqrt{2}\, s_Q(t)\ \operatorname{sen}(\omega_c t)$$

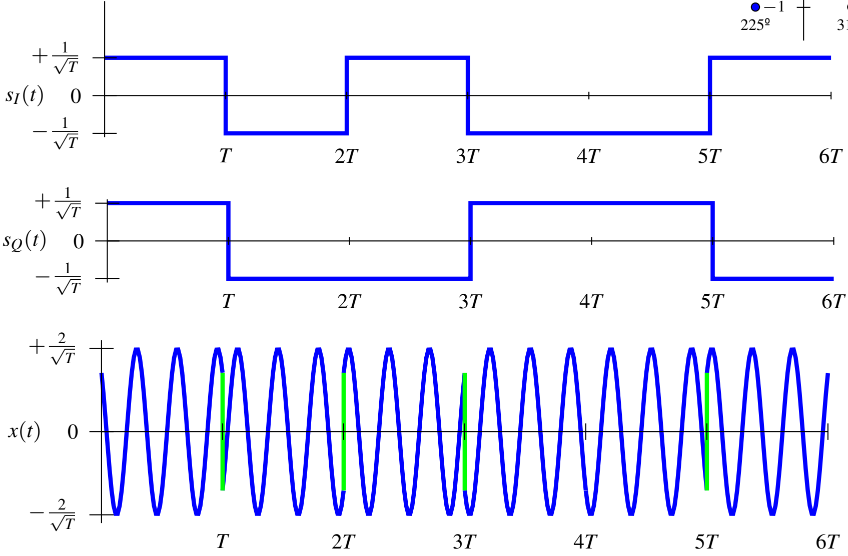
$$s_I(t) = \sum_n A_I[n]\ g(t - nT)$$

$$\boxed{s_Q(t) = \sum_n A_Q[n]\ g(t - nT - T/2)}$$

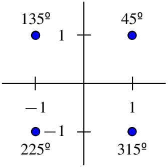
Modulación QPSK



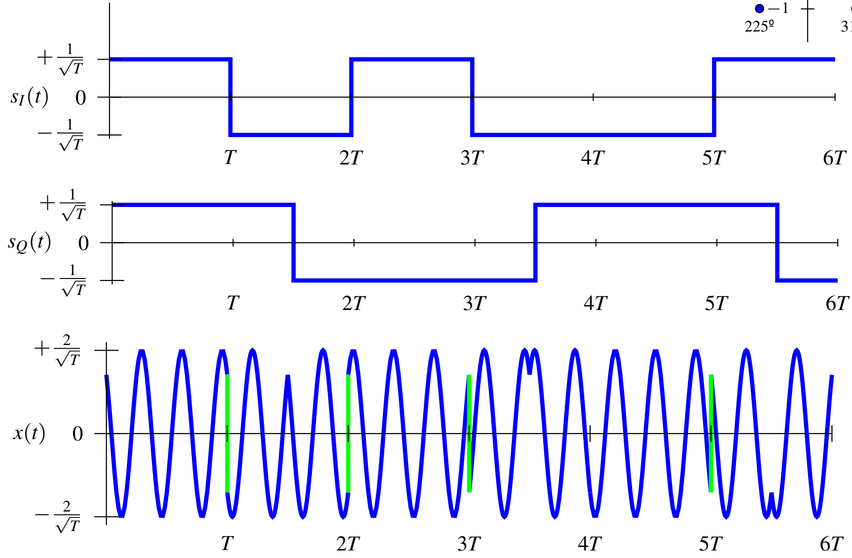
$$A[0] = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[1] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[2] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[3] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[4] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[5] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



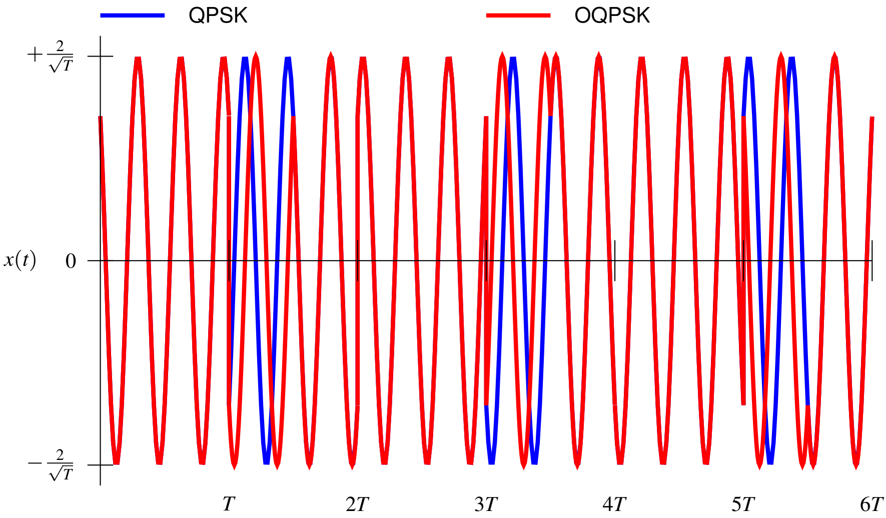
Modulación OQPSK - Retardo de $s_Q(t)$



$A[0] = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[1] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[2] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[3] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[4] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[5] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$



Modulación QPSK vs OQPSK



Espectro de la señal OQPSK

- Definición

$$x_I(t) = \sqrt{2} s_I(t) \cos(\omega_c t),\ x_Q(t) = \sqrt{2} s_Q(t) \operatorname{sen}(\omega_c t)$$

- Espectro de cada componente (s_k, $k \in \{I, Q\}$)

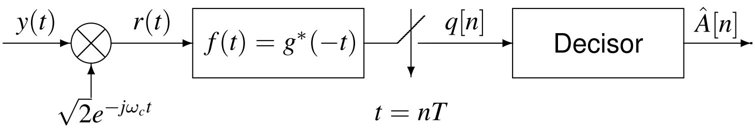
$$S_{x_k}(j\omega) = \frac{1}{2}\left[S_{s_k}(j\omega - j\omega_c) + S_{s_k}^*(-j\omega - j\omega_c)\right]$$

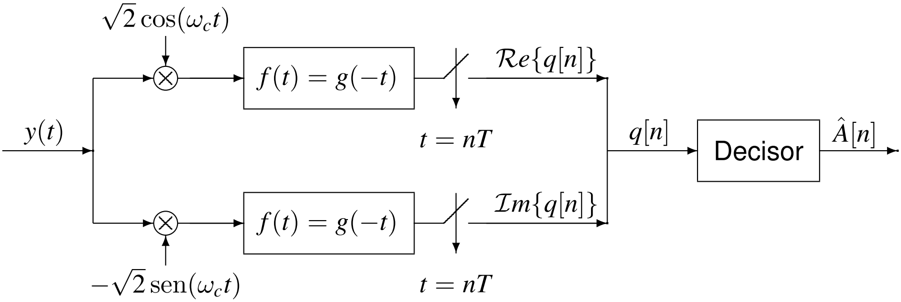
$$S_{s_I}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\mathcal{R}e\{A[n]\}\}}{T}\left|G(j\omega)\right|^2, S_{s_Q}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\mathcal{I}m\{A[n]\}\}}{T}\left|G(j\omega)\right|^2$$

- Espectro OQPSK

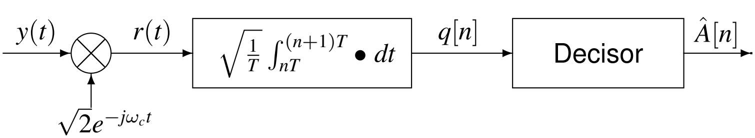
$$\boxed{S_X(j\omega) = \frac{E_s}{2T}\left[\left|G(j\omega - j\omega_c)\right|^2 + \left|G(-j\omega - j\omega_c)\right|^2\right]}$$

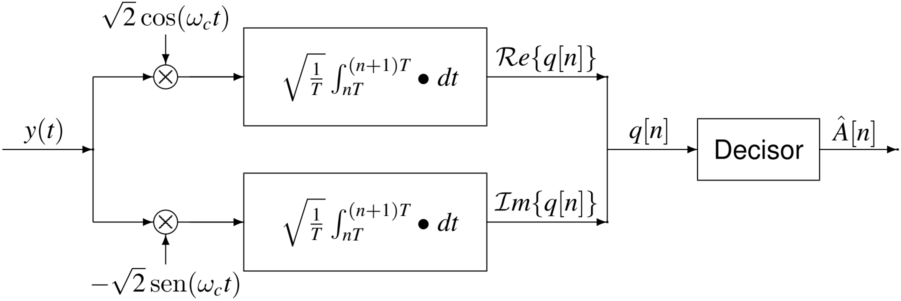
Receptor para modulaciones de fase PSK





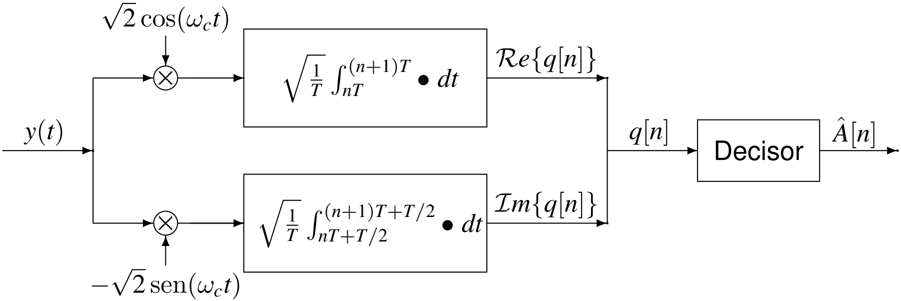
Receptor para modulaciones de fase PSK (II)





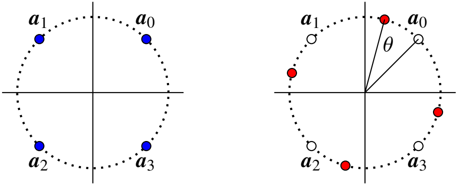
Receptor para modulaciones OQPSK

Hay que tener en cuenta el retardo de $T/2$ en la componente en cuadratura: retardo en el correlador



Efecto de un receptor no coherente en modulaciones PSK

- En un receptor no coherente, las fases de las portadoras usadas para demodular (θ_R) es distinta de la fase de las portadoras utilizadas en el transmisor para modular (θ_T)
  - Diferencia de $\theta = \theta_R - \theta_T$ radianes
- El efecto de esta diferencia de fase es que la constelación recibida está rotada θ radianes



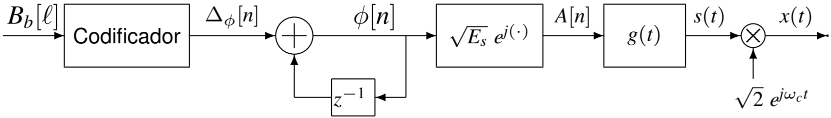
Fase transmitida $\phi[n]$ Fase recibida $\phi_R[n] = \phi[n] + \theta$

  - Este efecto puede afectar seriamente al rendimiento
  - Sin embargo, receptores no coherentes tienen menor coste
    - ★ Modulaciones PSK diferenciales (DPSK) permiten usar receptores no coherentes

Modulación de fase diferencial (DPSK)

- No requieren un receptor coherente
- Modulación PSK con codificación diferencial

$$\boxed{\phi[n] = \phi[n-1] + \Delta_\phi[n]}$$



- Codificador para modulación M-ária (M símbolos)

$$\boxed{\Delta_\phi[n] \in \left\{0, \frac{2\pi}{M}, \cdots, \frac{2\pi(M-1)}{M}\right\} \text{ rad}}$$

Asignación binaria se realiza sobre $\Delta_\phi[n]$

Ejemplo: 4-PSK (Codificación Gray)

$\Delta_\phi[n]$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Bits	00	01	11	10

- Inicialización: selección de un valor arbitrario (conocido) para $\phi[-1]$
  - No hay propagación de errores debido a la inicialización

Demodulación de fase diferencial

- Decodificación de los m bits asociados al instante n
  - Modulación PSK
    - A partir de $\hat{\phi}[n]$ (estima de la fase del símbolo recibido)

$$\boxed{\phi_R[n] = \phi[n] + \theta \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}[n] \quad \Rightarrow \quad m \text{ bits}}$$

El desfase θ en la fase del símbolo recibido puede ser catastrófico!!!

  - Modulación DPSK
    - A partir de $\hat{\Delta}_\phi[n]$ (estima de la diferencia de fases)

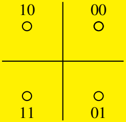
$$\boxed{\phi_R[n] = \phi[n] + \theta, \qquad \phi_R[n-1] = \phi[n-1] + \theta}$$

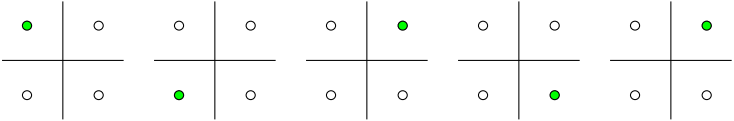
$$\boxed{\Delta_{\phi_R}[n] = \phi_R[n] - \phi_R[n-1] = \phi[n] - \phi[n-1]}$$

$$\boxed{\Delta_{\phi_R}[n] \quad \Rightarrow \quad \hat{\Delta}_\phi[n] \quad \Rightarrow \quad m \text{ bits}}$$

En la diferencia de fases θ es irrelevante

Efecto de un receptor no coherente en modulaciones PSK



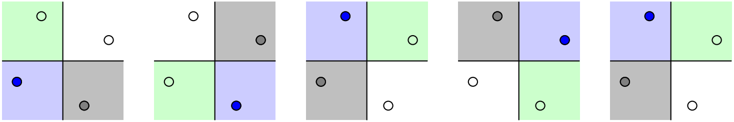


$\phi[0] = 135$	$\phi[1] = 225$	$\phi[2] = 45$	$\phi[3] = 315$	$\phi[4] = 45$
10	11	00	01	00

PSK

$\phi[n]$	Bits
45	00
135	10
225	11
315	01

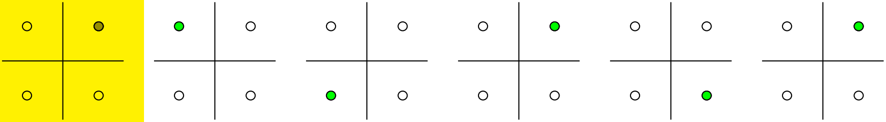
Desfases: $\theta = 70$ (azul) y $\theta = 160$ (gris)



$\hat{\phi}[0] = 225$	$\hat{\phi}[1] = 315$	$\hat{\phi}[2] = 135$	$\hat{\phi}[3] = 45$	$\hat{\phi}[4] = 135$
11	01	10	00	10
$\hat{\phi}[0] = 315$	$\hat{\phi}[1] = 45$	$\hat{\phi}[2] = 225$	$\hat{\phi}[3] = 225$	$\hat{\phi}[4] = 225$
01	00	11	10	11

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_b[\ell]$	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
$\hat{B}_b[\ell]$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
$\hat{B}_b[\ell]$	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1

Efecto de un receptor no coherente en modulaciones DPSK

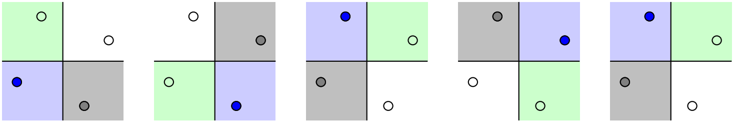


$\phi[-1] = 45$	$\phi[0] = 135$	$\phi[1] = 225$	$\phi[2] = 45$	$\phi[3] = 315$	$\phi[4] = 45$
REF (NO Tx)	$\Delta_\phi[0] = 90 \equiv 10$	$\Delta_\phi[1] = 90 \equiv 10$	$\Delta_\phi[2] = 180 \equiv 11$	$\Delta_\phi[3] = 270 \equiv 01$	$\Delta_\phi[4] = 90 \equiv 10$

DPSK

$\Delta_\phi[n]$	Bits
0	00
90	10
180	11
270	01

Desfases: $\theta = 70$ (azul) y $\theta = 160$ (gris)



	$\phi_R[0] = 205$	$\phi_R[1] = 295$	$\phi_R[2] = 115$	$\phi_R[3] = 385(25)$	$\phi_R[4] = 115$
$\Delta_{\phi_R}[0] = 160 \rightarrow$	$\hat{\Delta}_\phi[0] = 180 \equiv 11$	$\hat{\Delta}_\phi[1] = 90 \equiv 10$	$\hat{\Delta}_\phi[2] = 180 \equiv 11$	$\hat{\Delta}_\phi[3] = 270 \equiv 01$	$\hat{\Delta}_\phi[4] = 90 \equiv 10$
	$\hat{\phi}[0] = 295$	$\phi_R[1] = 385(25)$	$\phi_R[2] = 205$	$\phi_R[3] = 225$	$\phi_R[4] = 205$
$\Delta_{\phi_R}[0] = 250 \rightarrow$	$\hat{\Delta}_\phi[0] = 270 \equiv 01$	$\hat{\Delta}_\phi[1] = 90 \equiv 10$	$\hat{\Delta}_\phi[2] = 180 \equiv 11$	$\hat{\Delta}_\phi[3] = 270 \equiv 01$	$\hat{\Delta}_\phi[4] = 90 \equiv 10$

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_b[\ell]$	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
$\hat{B}_b[\ell]$	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$\hat{B}_b[\ell]$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0

Modulación / Demodulación DPSK - Ejemplo

- Constelación 4-PSK

$$\phi[n] \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\} \qquad \Delta_\phi[n] \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\} \qquad \phi[-1] = \frac{\pi}{4}$$

- Asignación binaria

PSK: Asignación binaria se realiza sobre $\phi[n]$

$\phi[n]$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
Bits	00	01	11	10

(Codificación Gray)

DPSK: Asignación binaria se realiza sobre $\Delta_\phi[n]$

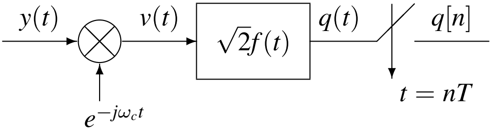
$\Delta_\phi[n]$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Bits	00	01	11	10

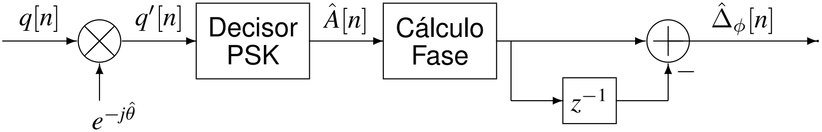
(Codificación Gray)

- Secuencia binaria a trasmitir $B_b[\ell] = 00\ 10\ 01\ 11\ 10 \cdots$

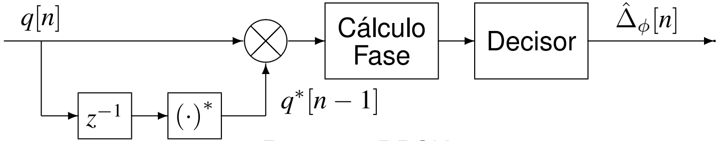
n	0	1	2	3	4
$B[n]$	00	10	01	11	10
PSK: $\phi[n]$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
PSK: $\phi_R[n]$	$\frac{\pi}{4}+\theta$	$\frac{7\pi}{4}+\theta$	$\frac{3\pi}{4}+\theta$	$\frac{5\pi}{4}+\theta$	$\frac{7\pi}{4}+\theta$
DPSK: $\Delta_\phi[n]$	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
DPSK: $\phi[n]$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
DPSK: $\phi_R[n]$	$\frac{\pi}{4}+\theta$	$\frac{7\pi}{4}+\theta$	$\frac{\pi}{4}+\theta$	$\frac{5\pi}{4}+\theta$	$\frac{3\pi}{4}+\theta$
DPSK: $\Delta_{\phi_R}[n]$	θ	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

Demodulador PSK (Diferencial)





Receptor Coherente



Receptor DPSK

Receptor DPSK (no coherente)

- Observación

$$q[n] = \sqrt{E_s} e^{j(\phi[n]+\theta)} + z[n]$$

  - Observación anterior (complejo conjugada)

$$q^*[n-1] = \sqrt{E_s}\, e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} + z^*[n-1]$$

- Multiplicador

$$\boxed{\begin{aligned} q[n] \times q^*[n-1] =& E_s\, e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])} + \sqrt{E_s}\, e^{j(\phi[n]+\theta)}\, z^*[n-1] \\ &+ \sqrt{E_s} e^{-j(\phi[n-1]+\theta)}\, z[n] + z[n]\, z^*[n-1] \end{aligned}}$$

- Decisión

$$\boxed{\hat{\Delta}_{\phi_R}[n] = \angle\{q[n] \times q^*[n-1]\}}$$

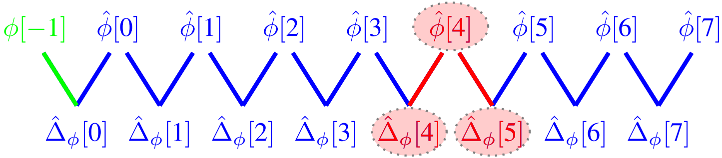
$$\boxed{\hat{\Delta}_{\phi}[n] = \arg \min_{\Delta_\phi[n]} d\left(\hat{\Delta}_{\phi_R}[n], \Delta_\phi[n]\right)}$$

Probabilidad de error para DPSK

- Probabilidad de error usando receptores coherentes

$$\boxed{P_e \approx 2\ P_e^{PSK}}$$

  - Un error en un símbolo decidido $\hat{A}[n]$ (fase $\hat{\phi}[n]$) afecta a dos incrementos de fase $\Delta_\phi[n]$ y $\Delta_\phi[n+1]$



- No tiene mucho sentido utilizar una modulación diferencial si se dispone de receptores coherentes
  - No hay ninguna ventaja en el coste del receptor
  - Las prestaciones son peores que utilizando una PSK convencional (no diferencial)

Probabilidad de error para DPSK (II)

- Probabilidad de error con receptores no-coherentes
  - Para decodificar se procesan dos observaciones $(q[n],\ q[n-1])$
    - Efecto de dos muestras de ruido

$$\boxed{z[n],\ z[n-1]}$$

  - Estadístico para la decisión

$$\frac{q[n] \times q^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} = \underbrace{\sqrt{E_s}\ e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])}}_{\text{Fase } \Delta_\phi[n]} + e^{j(\phi[n]+\theta)}\ z^*[n-1] + e^{-j(\phi[n-1]+\theta)}\ z[n] + \frac{z[n]\ z^*[n-1]}{\sqrt{E_s}}$$

Receptor coherente PSK

$$q[n] = \underbrace{\sqrt{E_s}\ e^{j\phi[n]}}_{\text{Fase } \phi[n]} + z[n]$$

  - Términos de ruido (tres)
    - El último es despreciable para E_s/σ_z^2 alto
    - Los otros dos: independientes, circularmente simétricos
  - Relación señal a ruido: pérdida de 3 dB (energía de ruido $\approx \times 2$)
    - Energía Señal: E_s
    - Energía Ruido: $\approx 2\sigma_z^2$

Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)

- Información: pulsos de frecuencia discreta de una portadora
- M pulsos (para mapear M símbolos)

$$\boxed{g_i(t) = \operatorname{sen}(\omega_i t)\, w_T(t), \quad i = 0, 1, \cdots, M-1}$$

- Codificador: define el índice del pulso transmitido en el instante n

$$A[n] \in \{i = 0, 1, \cdots, M-1\}$$

- Señal FSK en el dominio del tiempo

$$\boxed{x(t) = K \sum_n g_{A[n]}(t - nT)}$$

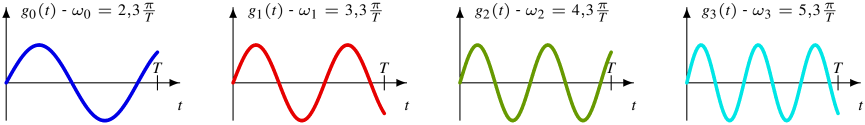
- FSK de fase continua (CPFSK)
  - Continuidad de fase: pulsos con un número entero de períodos en T segundos

$$\boxed{\text{Frecuencias: } \omega_i = \frac{2\pi}{T} \times N_i \text{ rad/s}, \quad f_i = R_s \times N_i \text{ Hz}, \quad N_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, \cdots, M-1}$$

  - Ancho de banda mínimo: N_i consecutivos (espectro de $g_i(t)$ está en torno a ω_i)

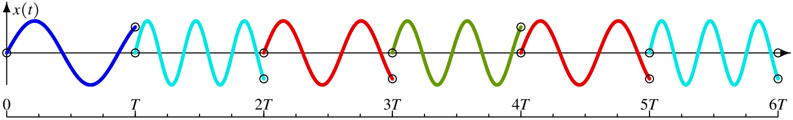
Formas de onda FSK - Ejemplo para $M = 4$ - Saltos de fase

- Ejemplo con frecuencias que no son múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}$ rad/s



- Waveform for data sequence

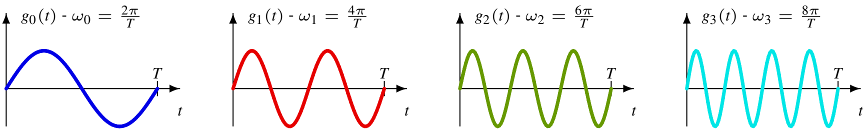
n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



Hay saltos de fase en múltiplos de T (cuando $A[n] \neq A[n-1]$)

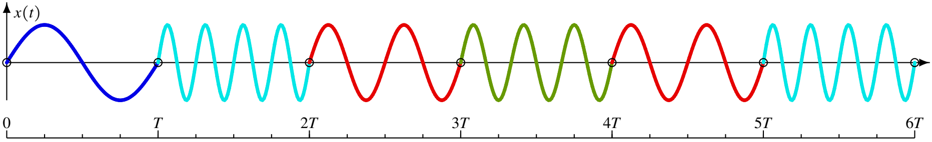
Formas de onda CPFSK - Ejemplo para $M = 4$

- Pulsos CPFSK para $M = 4$ (un posible ejemplo)



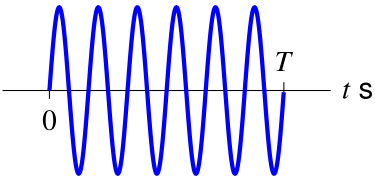
- Forma de onda para secuencia de datos

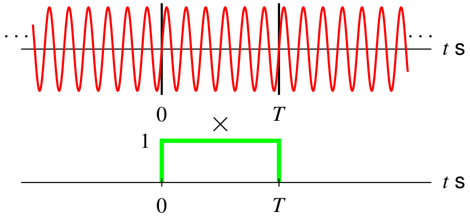
n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



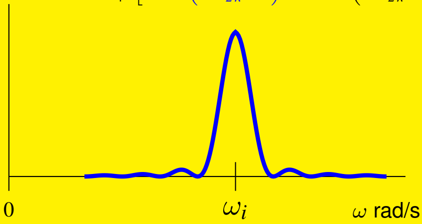
FSK - Respuesta en frecuencia de $g_i(t)$

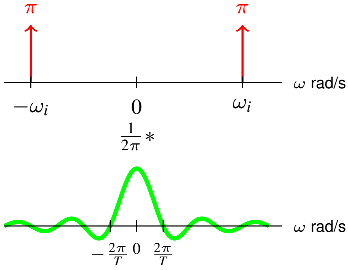
$$g_i(t) = \text{sen}(\omega_i t)\; w_T(t)$$



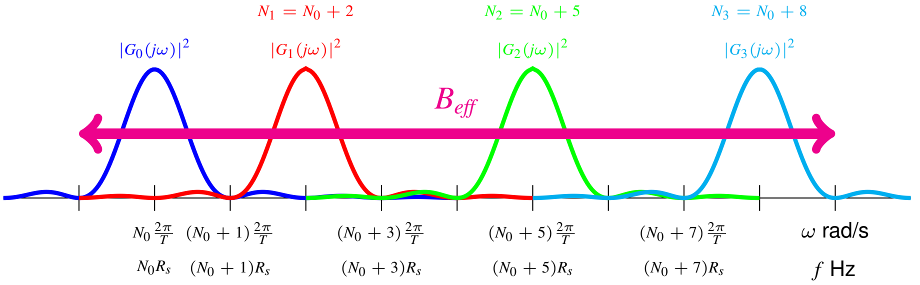


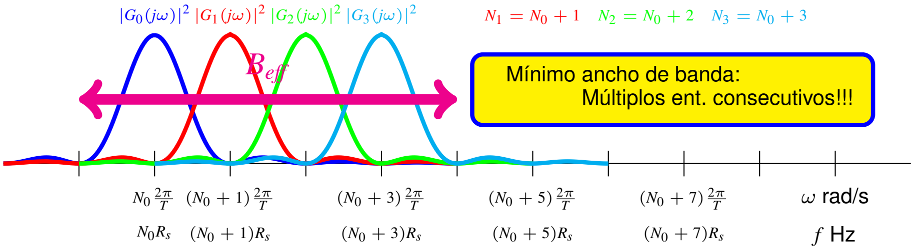
$$|G_i(j\omega)|^2 = \frac{T^2}{4}\left[\text{sinc}^2\left(\frac{(\omega-\omega_i)T}{2\pi}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{(\omega+\omega_i)T}{2\pi}\right)\right]$$





CPFSK - Mínimo ancho de banda





Ortogonalidad de los pulsos CPFSK

- Producto escalar entre dos pulsos

$$\begin{aligned}\langle g_i(t), g_\ell(t)\rangle &= \int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\operatorname{sen}(\omega_\ell t)\, dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \cos(\underbrace{(\omega_i-\omega_\ell)}_{(N_i-N_\ell)\frac{2\pi}{T}}\, t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos(\underbrace{(\omega_i+\omega_\ell)}_{(N_i+N_\ell)\frac{2\pi}{T}}\, t)\, dt\\ &= \frac{T}{2}\delta[i-\ell]\end{aligned}$$

Pulsos CPFSK son ortogonales!!!

- Definición de una base ortonormal (dimensión M)

$$\phi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\operatorname{sen}(\omega_i t)\, w_T(t) \quad i = 0, 1, \cdots, M-1$$

- Señal CPFSK como expansión en la base ortonormal

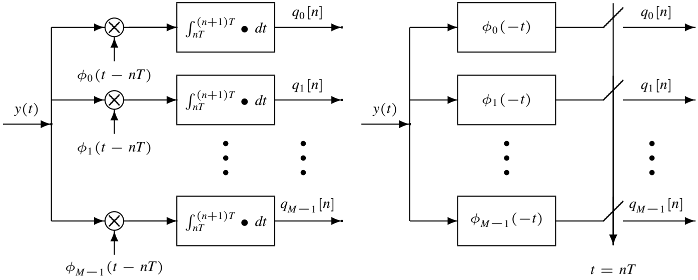
$$x(t) = \sqrt{E_s}\sum_n \phi_{A[n]}(t-nT)$$

Receptor para CPFSK (coherente)

- Base ortonormal (espacio M-dimensional)
  - Constelación ortogonal (dimensión M)

$$A[n]=0\equiv \boldsymbol{a}_0=[\sqrt{E_s},0,0,0,\cdots,0]^T$$
$$A[n]=1\equiv \boldsymbol{a}_1=[0,\sqrt{E_s},0,0,\cdots,0]^T$$
$$A[n]=k\equiv \boldsymbol{a}_k=[\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k\text{ ceros}}\sqrt{E_s},0,\cdots,0]^T$$
$$A[n]=M-1\equiv \boldsymbol{a}_{M-1}=[0,0,\cdots,0,\sqrt{E_s}]^T$$

  - Estructura del receptor



CORRELADORES FILTROS ADAPTADOS

Receptores para CPFSK - Prestaciones

- Receptor coherente con filtros adaptados o correladores

$$\boxed{P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

- Efecto de los errores de fase - Ejemplo: $n = 0$, $A[n] = i$, error de fase θ

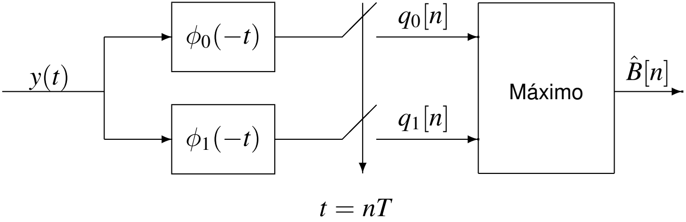
$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\ \mathrm{sen}(\omega_i t + \theta)\ w_T(t)$$

Salida del demodulador de índice ℓ (producto escalar de $y(t)$ con $\phi_\ell(t)$)

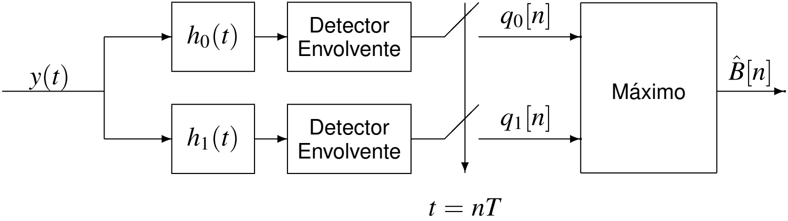
$$\begin{aligned} q_\ell[0] &= \int_0^T y(t)\ \phi_\ell(t)\ dt = \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\ \mathrm{sen}(\omega_i t + \theta)\ \sqrt{\frac{2}{T}}\ \mathrm{sen}(\omega_\ell t)\ dt \\ &= \frac{\sqrt{E_s}}{T} \int_0^T \left[\cos((\omega_i - \omega_\ell)t + \theta) - \cos((\omega_i + \omega_\ell)t + \theta)\right] dt \\ &= \sqrt{E_s}\ \cos(\theta)\ \delta[i - \ell] \end{aligned}$$

  - Valor ideal: $\sqrt{E_s}$
  - Término de atenuación: $\cos(\theta)$
  - Necesidad de receptores coherentes (síncronos)

Receptor coherente/no-coherente FSK binaria ($M = 2$)



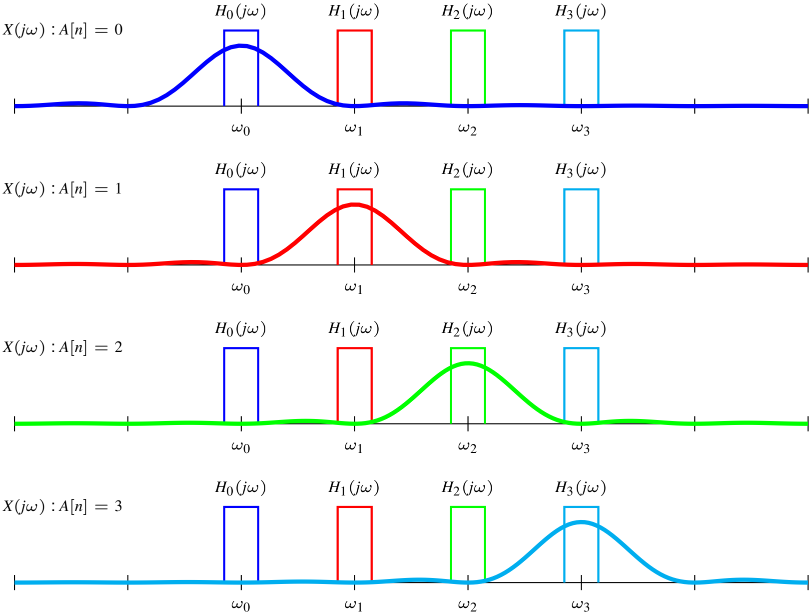
Receptor Coherente



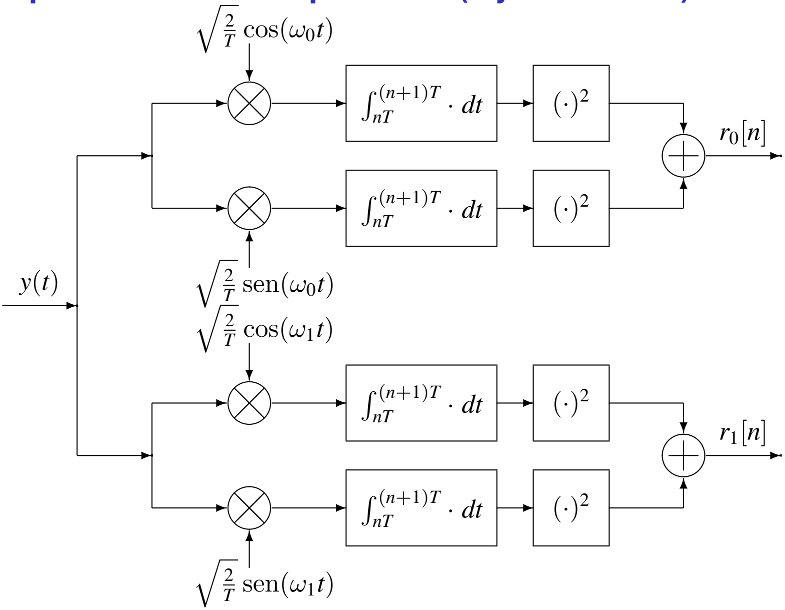
$h_k(t)$: filtro de banda estrecha centrado en ω_k

Receptor no coherente

Detector CPFSK con filtros de banda estrecha ($M = 4$)



Receptor no coherente para FSK (ley cuadrática)



Receptor no coherente para FSK (ley cuadrática)

- Ejemplo: $n=0$, $A[n]=i$, error de fase θ

$$y(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\ \operatorname{sen}(\omega_i t+\theta)\ w_T(t)$$

Salida de los correladores de índice ℓ

$$\begin{aligned}
q_{\ell,0}[0] &= \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\ \operatorname{sen}(\omega_i t+\theta)\ \sqrt{\frac{2}{T}}\ \cos(\omega_\ell t)\ dt \\
&= \frac{\sqrt{E_s}}{T}\int_0^T \left[\operatorname{sen}((\omega_i-\omega_\ell)t+\theta)+\operatorname{sen}((\omega_i+\omega_\ell)t+\theta)\right] dt \\
&= \sqrt{E_s}\ \operatorname{sen}(\theta)\ \delta[i-\ell]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{\ell,1}[0] &= \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\ \operatorname{sen}(\omega_i t+\theta)\ \sqrt{\frac{2}{T}}\ \operatorname{sen}(\omega_\ell t)\ dt \\
&= \frac{\sqrt{E_s}}{T}\int_0^T \left[\cos((\omega_i-\omega_\ell)t+\theta)-\cos((\omega_i+\omega_\ell)t+\theta)\right] dt \\
&= \sqrt{E_s}\ \cos(\theta)\ \delta[i-\ell]
\end{aligned}$$

Salida total de la rama de índice ℓ del demodulador

$$\boxed{r_\ell[0]=\left(q_{\ell,0}[0]\right)^2+\left(q_{\ell,1}[0]\right)^2=E_s\ \delta[i-\ell]}$$

  - El ruido incluye la contribucion de los dos correladores por rama

FSK como desplazamiento en frecuencia

- Definición de frecuencia central

$$\boxed{\omega_c = \frac{\omega_0 + \omega_{M-1}}{2} = \frac{\pi}{T}\, C,\ \ C \in \mathbb{Z},\ \ C \text{ impar}}$$

  - Valor de la frecuencia central ω_c: múltiplo impar de $\frac{\pi}{T}$
  - Frecuencia del pulso del símbolo en el instante discreto n

$$\boxed{\omega_c + I[n]\ \frac{\pi}{T}}$$

- Codificador

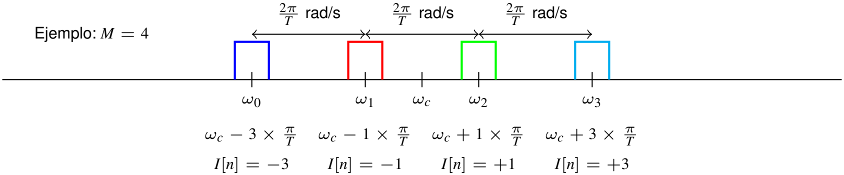
$$\boxed{I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm(M-1)\}}$$

- Expresión FSK como desplazamientos desde ω_c

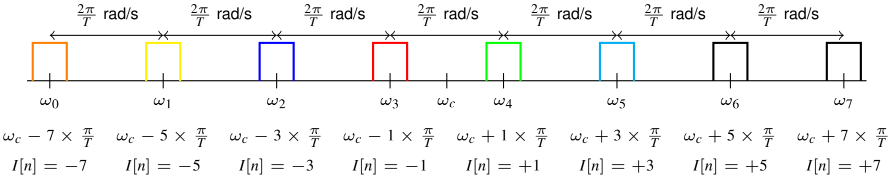
$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\ \sum_n \operatorname{sen}\left(\omega_c t + I[n] \times \frac{\pi}{T}\ t\right) w_T(t-nT)}$$

FSK como desplazamiento en frecuencia (II)

Ejemplo: $M = 4$



Ejemplo: $M = 8$



Espectro de la señal FSK

- La media de la señal es periódica
- Espectro discreto (espectro de la media periódica)

$$S_{X_d}(j\omega) = \frac{2E_s}{T}\frac{1}{(MT)^2}\left|\sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega)\right|^2 \sum_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{t}\right)$$

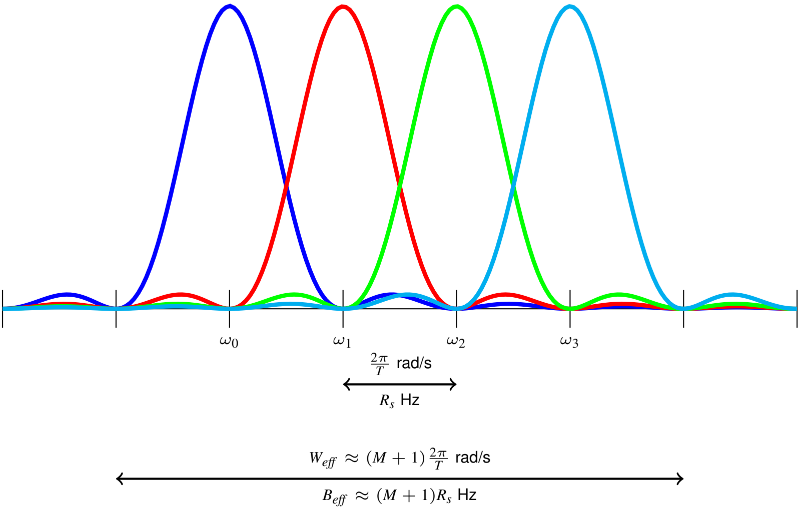
- Espectro continuo

$$S_{X_c}(j\omega) = \frac{2E_s}{T}\frac{1}{MT}\left\{\sum_{i=0}^{M-1} |G_i(j\omega)|^2 - \frac{1}{M}\left|\sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega)\right|^2\right\}$$

- FSK - Densidad espectral de potencia

$$S_X(j\omega) = S_{X_c}(j\omega) + S_{X_d}(j\omega)$$

Espectro CPFSK, ejemplo $M = 4$



Modulación MSK (Minimum shift keying)

- Información: cambios de frecuencia en la frecuencia de una portadora
- Mínima separación de frecuencia entre portadoras (casi) ortogonales
- Producto escalar de pulsos $g_i(t)$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_\ell \rangle &= \int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\ \operatorname{sen}(\omega_\ell t)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \cos[(\omega_i - \omega_\ell)t]\ dt - \frac{1}{2}\cos[(\omega_i + \omega_\ell)t]\ dt \\ &= \frac{T}{2}\frac{\operatorname{sen}[(\omega_i - \omega_\ell)T]}{(\omega_i - \omega_\ell)} - \frac{T}{2}\frac{\operatorname{sen}[(\omega_i + \omega_\ell)T]}{(\omega_i + \omega_\ell)}\end{aligned}$$

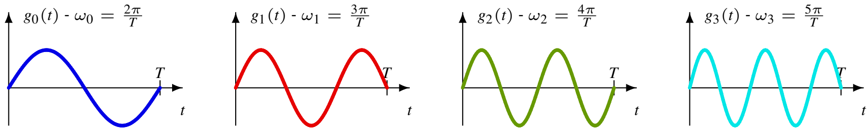
- Separación mínima (sistemas de banda estrecha)
  - Asunción: $\frac{\operatorname{sen}[(\omega_i+\omega_\ell)\ T]}{(\omega_i+\omega_\ell)}$ se puede despreciar (denominador elevado)

$$\boxed{\omega_i - \omega_\ell = \frac{\pi}{T} \times N_{i,\ell} \text{ rad/s}, \ \ \text{con } N_{i,\ell} \in \mathbb{Z}, \quad i,\ell = 0,1,\cdots,M-1, \quad i \neq \ell}$$

$$\boxed{f_i - f_\ell = \frac{R_s}{2} \times N_{i,\ell} \text{ Hz}}$$

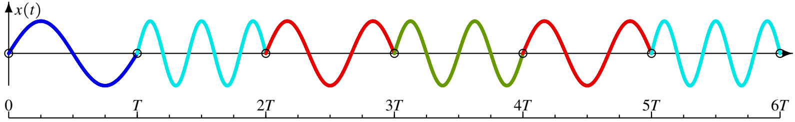
Formas de onda MSK - Ejemplo para $M = 4$

- Pulsos para $M = 4$ (un posible ejemplo)

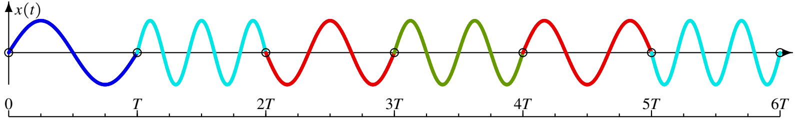


- Forma de onda para

n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



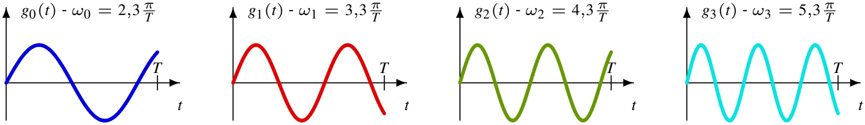
Sin memoria, saltos de fase pueden darse en nT (cuando cambia el símbolo)



Identificación de la fase al final de cada intervalo de símbolo ($\theta[n]$) permite la continuidad

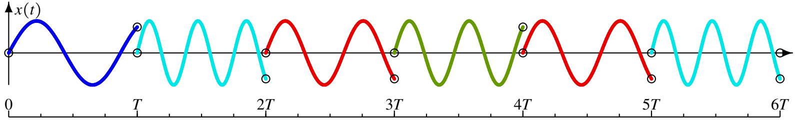
Formas de onda MSK - Ejemplo para $M = 4$ (II)

- Otro ejemplo con frecuencias que no son múltiplos enteros de $\frac{\pi}{T}$

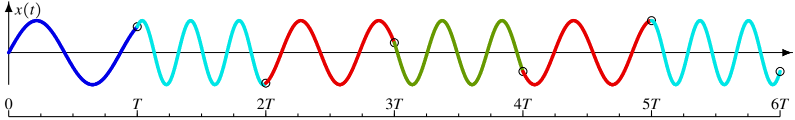


- Forma de onda para

n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



Sin memoria, saltos de fase pueden darse en nT (cuando cambia el símbolo)



Identificación de la fase al final de cada intervalo de símbolo ($\theta[n]$) permite la continuidad

Modulación MSK (II)

- Diferencias clave con la modulación CPFSK
  - Separación entre frecuencias consecutivas es la mitad para MSK
    - MSK: $\Delta_\omega = \omega_i - \omega_{i-1} = \frac{\pi}{T}$
    - CPFSK: $\Delta_\omega = \omega_i - \omega_{i-1} = \frac{2\pi}{T}$
  - Valores para ω_i no restrigidos a múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}$ como en CPFSK (ni tampoco a ser múltiplos de $\frac{\pi}{T}$)
    - Selección de frecuencias no garantiza automáticamente continuidad de fase
    - Es preciso introducir memoria para tener continuidad de fase
- Señal MSK en notación con frecuencia central

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \operatorname{sen}\left(\omega_c t + I[n] \times \frac{\pi}{2T} t + \theta[n]\right) \, w_T(t - nT)}$$

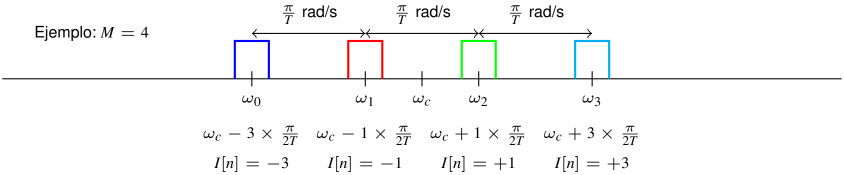
  - Codificador: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm(M-1)\}$
  - Continuidad de fase: se introduce el término de memoria $\theta[n]$

$$\boxed{\theta[n] = \theta[n-1] + \frac{\pi n}{2} \, (I[n-1] - I[n]), \qquad \text{mod } 2\pi}$$

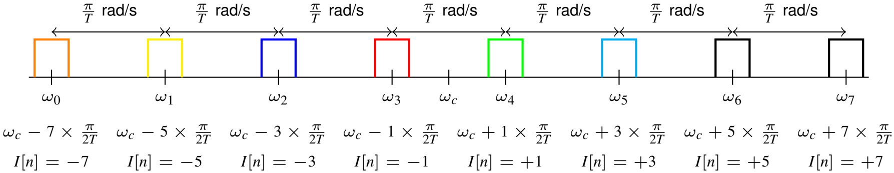
Estimación recursiva de la fase acumulada al final de cada intervalo de símbolo

MSK como desplazamiento en frecuencia

Ejemplo: $M = 4$

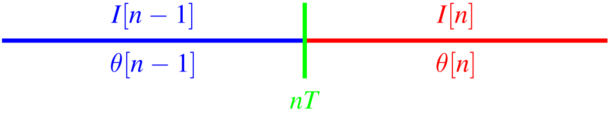


Ejemplo: $M = 8$



Memoria $\theta[n]$: cálculo recursivo

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\omega_c t + I[n]\frac{\pi}{2T}t + \theta[n]\right)\; w_T(t-nT)}$$



- Continuidad de fase en $t = nT$

$$\omega_c nT + I[n-1]\underbrace{\frac{\pi}{2T}nT}_{\frac{\pi n}{2}} + \theta[n-1] = \omega_c nT + I[n]\underbrace{\frac{\pi}{2T}nT}_{\frac{\pi n}{2}} + \theta[n]$$

$$\boxed{\theta[n] = \theta[n-1] + \frac{\pi n}{2}\left(I[n-1] - I[n]\right)}$$

Espectro MSK

- Expresión alternativa para MSK

$$x(t) = \sqrt{2E_s}\cos(\omega_c t)\sum_{n\ par} I[n]\cos(\theta[n])(-1)^{n/2} g(t-nT)$$
$$+ \sqrt{2E_s}\,\mathrm{sen}(\omega_c t)\sum_{n\ par} \cos(\theta[n])(-1)^{n/2} g(t-nT+T)$$

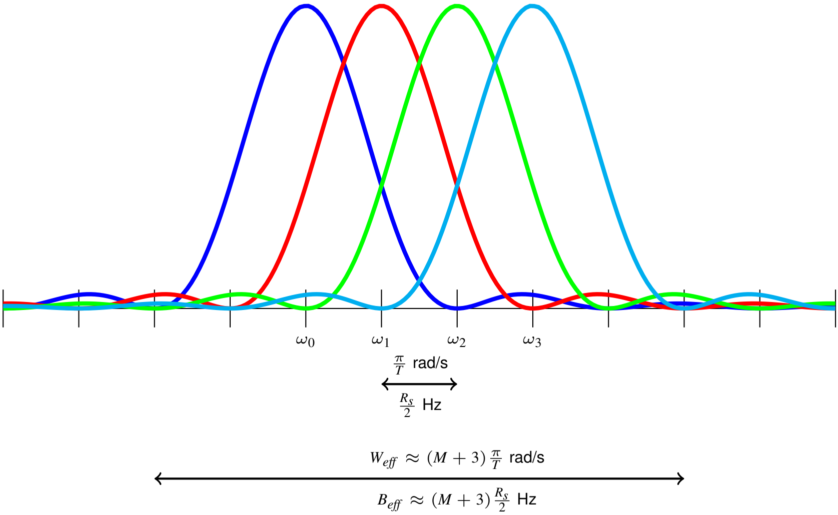
- Similar a OQPSK
  - Nuevos símbolos
  - Pulso:

$$\boxed{g(t) = \sqrt{\frac{1}{T}}\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) w_{2T}(t),\ |G(j\omega)|^2 = 16T\pi^2\left(\frac{\cos(\omega T)}{\pi^2 - 4\omega^2 T^2}\right)^2}$$

- Espectro MSK

$$\boxed{S_X(j\omega) = 8E_s\pi^2\left(\frac{\cos[(\omega-\omega_c)T]}{\pi^2-4(\omega-\omega_c)^2T^2}\right)^2 + 8E_s\pi^2\left(\frac{\cos[(\omega+\omega_c)T]}{\pi^2-4(\omega+\omega_c)^2T^2}\right)^2}$$

Espectro MSK, ejemplo $M = 4$



Receptores para MSK

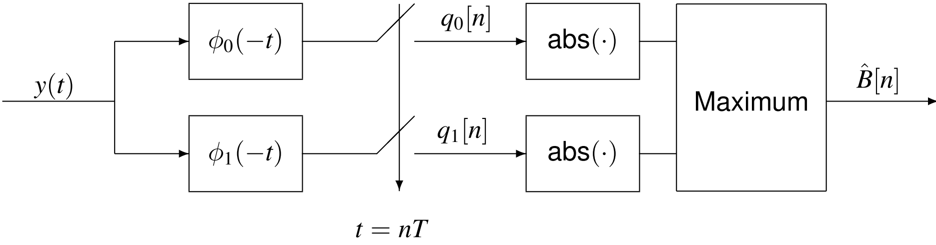
- Demodulador basado en el receptor ML para FSK
- Demodulador basado en el ML para OQPSK
- Probabilidad de error

$$\boxed{P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

  - No se tiene en cuenta la memoria del sistema
  - Demodulador óptimo más complejo

Receptor MSK binario

- Receptor MSK sub-óptimo basado en receptor para FSK donde la evaluación del valor absoluto para cada posible frecuencia se introduce para considerar diferentes fases iniciales



Modulaciones de fase continua (CPM)

- Familia que incluye a la CPFSK y MSK
- Características básicas
  - Envolvente constante
  - Continuidad de fase
  - Reducción del ancho de banda:
    - Suavizando la evolución de la fase instantánea
- Señal CPM: expresión analítica en el dominio temporal

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \operatorname{sen}\left(\omega_c t + \theta_0 + \theta(t, \mathbf{I})\right)}$$

  - $\mathbf{I}$: Secuencia de símbolos transmitidos
  - ω_c: frecuencia nominal de la portadora
  - θ_0: fase inicial de la portadora
  - E_s: energía transmitida durante un período de símbolo

Frecuencia instantánea de una sinusoide

- Señal sinudoidal con argumento variable

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\phi(t)\right)}$$

  - Frecuencia instantánea

$$\boxed{\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \text{ rad/s}} \qquad \boxed{f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt} \text{ Hz}}$$

- Señal con frecuencia $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s + argumento variable

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\omega_c t + \theta_0 + \theta(t)\right)}$$

  - Frecuencia instantánea

$$\boxed{\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \text{ Hz}}$$

Generación de la señal CPM de respuesta completa

- Codificador: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm(M-1)\}$
- Señal PAM en banda base

$$\boxed{s(t) = \sum_n I[n]\; g(t - nT)}$$

- Respuesta completa:
  - Pulso $g(t)$ causal de duración máxima T seg.
    - ★ Habitualmente normalizado

$$\boxed{g(t) = 0 \text{ si } t > T} \qquad \boxed{\text{Normalización: } \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\; dt = \frac{1}{2}}$$

- Señal CPM: frecuencia instantánea $\boxed{\omega_c + 2\,\omega_d\; T\; s(t)}$ rad/s
- Fase instantánea para esa frecuencia (integral de la frecuencia)

$$\boxed{\theta(t, \mathbf{I}) = 2\,\omega_d\; T \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\; d\tau \text{ rad}}$$

  - ω_d: desviación de frecuencia de pico

Expresión CPM en el dominio temporal

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \ \text{sen} \left[\omega_c t + \theta_0 + \overbrace{2\ \omega_d\ T \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\sum_n I[n]\ g(\tau - nT)}_{s(\tau)}\ d\tau}^{\theta(t,\mathbf{I})} \right]$$

- Fase $\theta(t, \mathbf{I})$ en el intervalo $[nT, (n+1)T]$ (intervalo asociado a $I[n]$)

$$\theta(t, \mathbf{I}) = 2\ \omega_d\ T \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\ d\tau = \theta[n] + \theta(t, n) \text{ rad}$$

  - $\theta[n]$: fase acumulada hasta $t = nT$:
    - Debida a los símbolos transmitidos anteriormente (hasta $I[n-1]$)

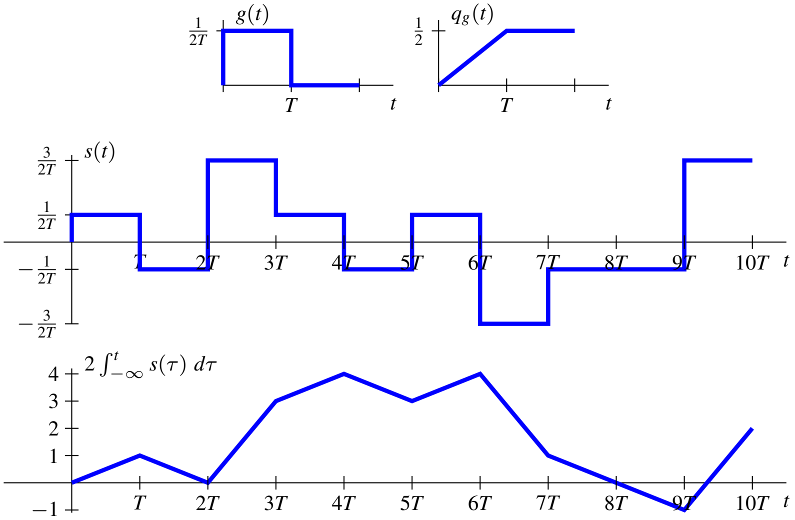
$$\theta[n] = \omega_d\ T \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m] \text{ rad}$$

  - $\theta(t, n)$: fase incremental desde nT hasta t:
    - Debida al símbolo actual $I[n]$

$$\theta(t, n) = 2\ \omega_d\ T\ I[n]\ q_g(t - nT) \text{ rad}, \quad \text{con } q_g(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\ d\tau$$

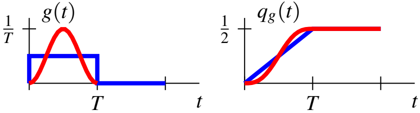
CPM - Un ejemplo de evolución de la fase

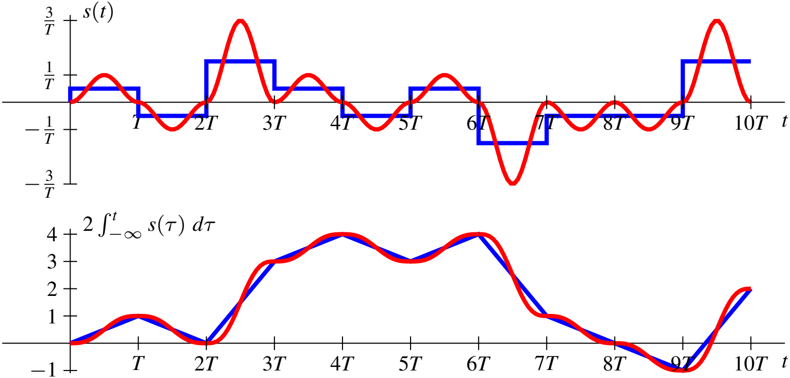
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$I[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-1	$+1$	-3	-1	-1	$+3$



CPM - Un ejemplo de evolución de la fase (II)

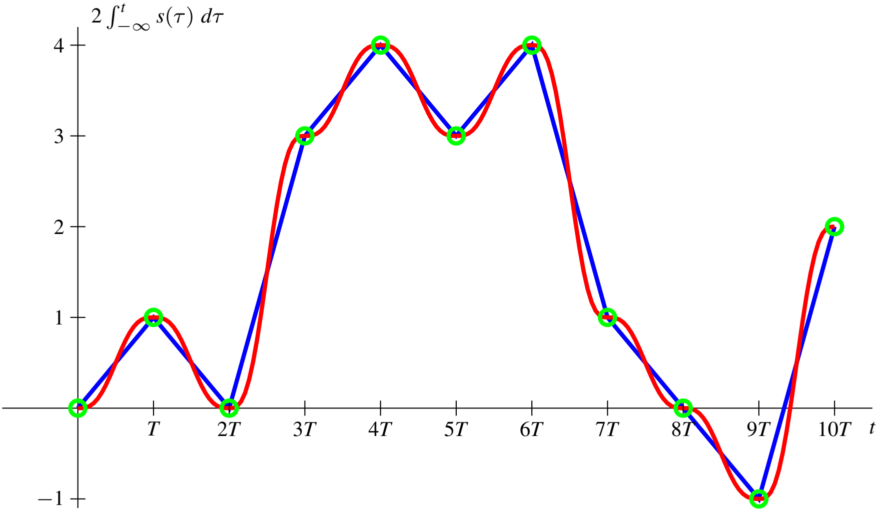
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$I[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-1	$+1$	-3	-1	-1	$+3$





CPM - Un ejemplo de evolución de la fase (III)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$I[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-1	$+1$	-3	-1	-1	$+3$



Expresión CPM en el dominio temporal - Índice de modulación

- Expresión alternativa introduciendo un parámetro diferente (que reemplaza a la desviación de frecuencia de pico)
- Definición del índice de modulación h:

$$\boxed{h = \omega_d \, \frac{T}{\pi}}$$

- Valor de fase asociado al intervalo para $I[n]$:
  - $\theta[n]$: fase acumulada hasta $t = nT$:

$$\boxed{\theta[n] = \pi \, h \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m] \text{ rad}}$$

  - $\theta(t, n)$: incremento de fase desde nT hasta t:

$$\boxed{\theta(t, n) = 2 \, \pi \, h \, I[n] \, q_g(t - nT) \text{ rad}}$$

Identificación de CPFSK binaria como CPM

- Expresión analítica para una CPFSK binaria

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \operatorname{sen}\left(\omega_c t + I[n]\frac{\pi t}{T}\right) w_T(t-nT).$$

- CPFSK binaria como CPM: $\omega_d = \frac{\pi}{T}, \qquad h = 1$
- Considerando $\theta[0] = 0$

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] + 2\pi I[n] \frac{(t-nT)}{2T} = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n] + \frac{\pi t}{T} I[n]$$

  - Considerando que la expresión

$$\pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n] = K\,2\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

  - La fase $\theta(t, \mathbf{I})$ es, en módulo 2π

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \frac{\pi t}{T} I[n] = \pm \frac{\pi t}{T}$$

Identificación de la MSK como una CPM

- Señal MSK

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \operatorname{sen}\left(\omega_c t + I[n]\frac{\pi t}{2T} + \theta[n]\right) w_T(t - nT).$$

- Identificación como CPM

$$\omega_d = \frac{\pi}{2T}, \qquad h = \frac{1}{2}$$

Árbol de fase en modulaciones CPM

- Representa la posible evolución temporal de la fase
  - Un camino para cada posible secuencia de símbolos
- Transición en un intervalo de símbolo
  - Incremento de fase en el intervalo de índice n

$$\boxed{\theta((n+1)T)-\theta(nT)=\theta[n+1]-\theta[n]=\pi\, h\, I[n] \text{ rad}}$$

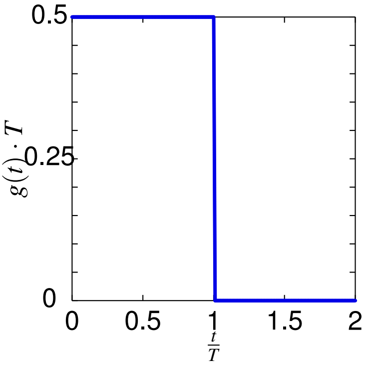
  - Forma para moverse desde el valor de fase en el inicio del intervalo hata el valor de fase al final del intervalo
    - ⋆ Proporcional a la integral del pulso $g(t)$, i.e., $q_g(t)$

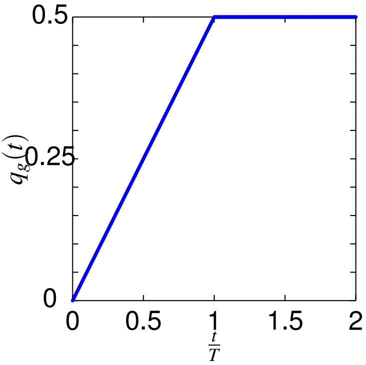
$$\boxed{\theta(t,n)=2\,\pi\, h\, I[n]\, q_g(t-nT) \text{ rad}}$$

Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular

- Ejemplo: pulso rectangular

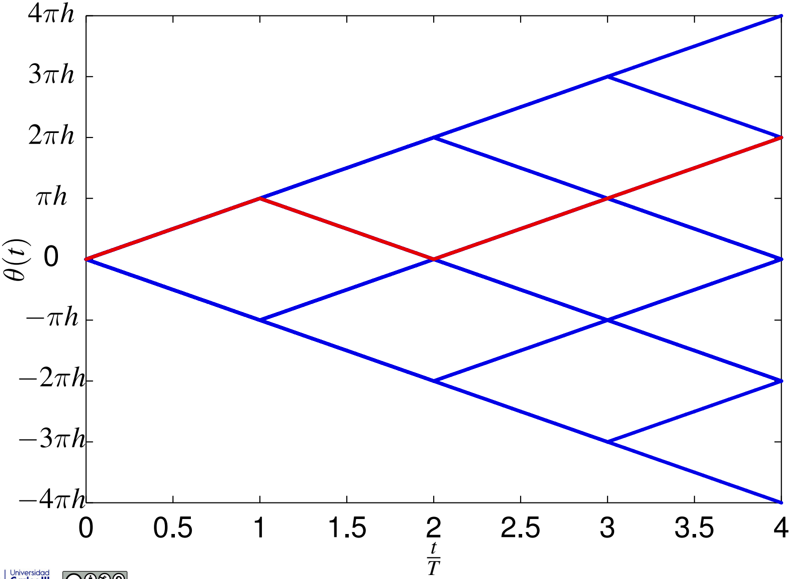
$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2T}, & 0\leq t<T\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases},\quad q_g(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t)\,dt=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{t}{2T}, & 0\leq t<T\\ 1/2, & t\geq T\end{cases}$$





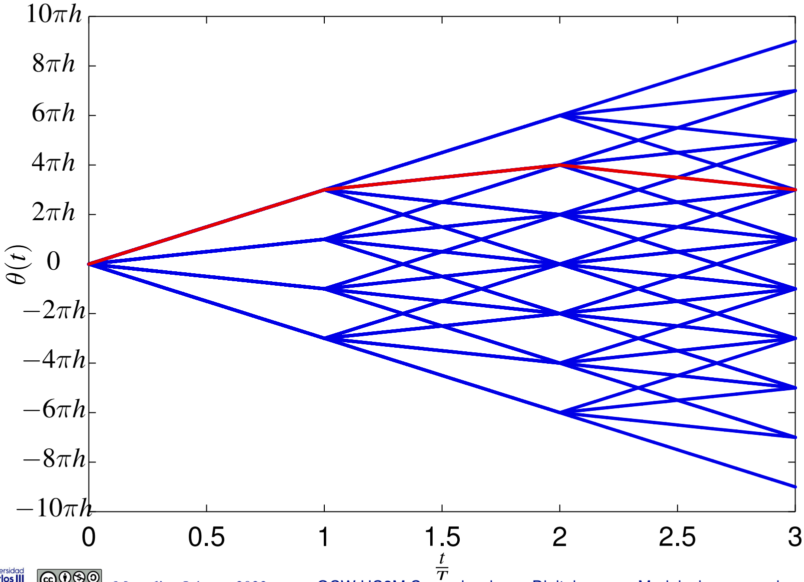
Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular - binario

- Secuencia resaltada: $I[0] = +1,\ I[1] = -1,\ I[2] = +1,\ I[3] = +1$



Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular - cuaternario

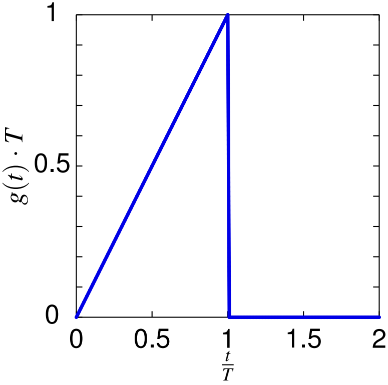
- Secuencia resaltada: $I[0] = +3,\ I[1] = +1,\ I[2] = -1$

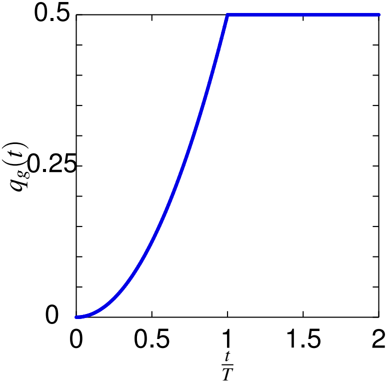


Árbol de fase - Ejemplo - Pulso triangular

- Ejemplo: pulso triangular

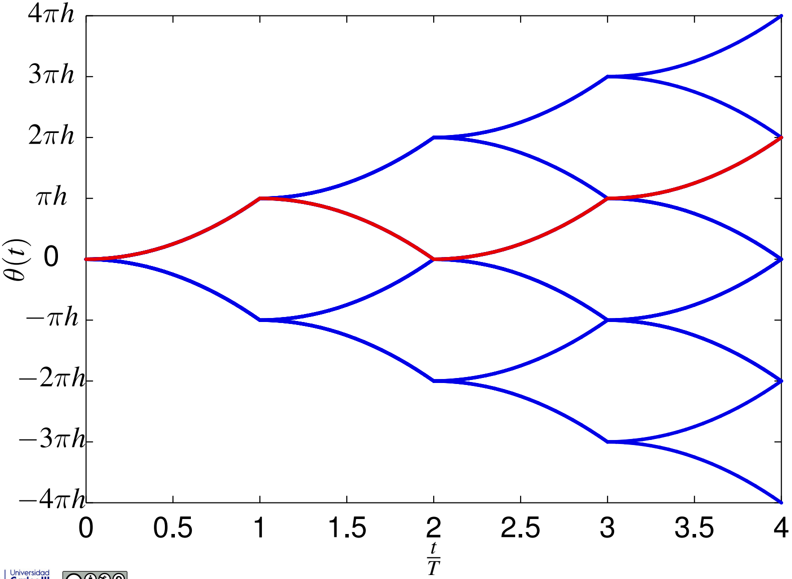
$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{T^2}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t)\, dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2T^2}, & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$





Árbol de fase - Ejemplo - Pulso triangular - binario

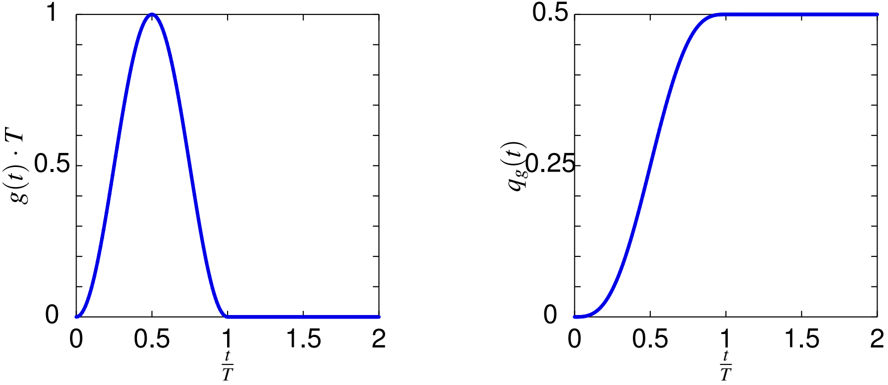
- Secuencia resaltada: $I[0] = +1,\ I[1] = -1,\ I[2] = +1,\ I[3] = +1$



Árbol de fases - Ejemplo - Pulsos más suaves

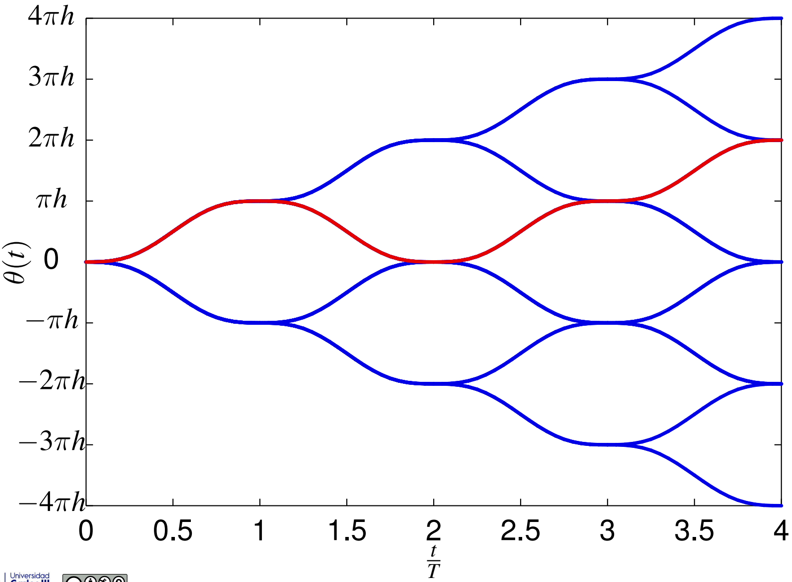
- Ejemplo: pulso en coseno alzado ($L = 1$)

$$g(t) = \frac{1}{2T}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right] w_T(t),\ q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2T}\left[t - \frac{T}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right] & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



Árbol de fases - Ejemplo - Pulsos más suaves - binario

- Secuencia resaltada: $I[0] = +1,\ I[1] = -1,\ I[2] = +1,\ I[3] = +1$



CPM de respuesta parcial

- El pulso $g(t)$ dura L períodos de símbolo ($L > 1$)
- La fase $\theta(t, \mathbf{I})$ en el intervalo $[nT, (n+1)T]$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta(t,\mathbf{I}) =& 2\pi h \sum_{m=-\infty}^{n} I[m]\; q_g(t-mT)\\ =& \theta[n] + \theta(t,n) \text{ rad}\end{aligned}}$$

  - $\theta[n]$: fase acumulada hasta nT debida a los pulsos que han finalizado

$$\boxed{\theta[n] = \pi h \sum_{m=-\infty}^{n-L} I[m] \text{ rad}}$$

  - $\theta(t, n)$: contribución de los pulsos que no han finalizado al inicio del intervalo

$$\boxed{\theta(t,n) = 2\pi h \sum_{m=n-L+1}^{n} I[m]\; q_g(t-mT)}$$

Pulsos para CPM de respuesta parcial

- Pulsos en coseno alzado

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{2LT}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{LT}\right)\right] w_{LT}(t)}$$

  - Suavizan las transiciones de fase

- Gaussian MSK (GMSK)

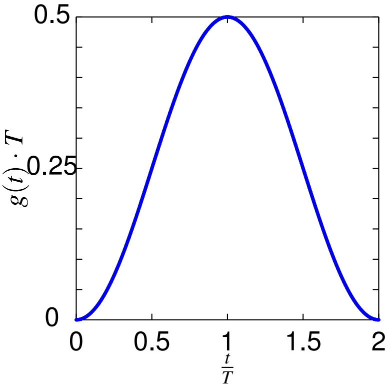
$$\boxed{g(t) = \frac{1}{2T}\left[Q\left(\frac{2\pi\beta(t-T/2)}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(\frac{2\pi\beta(t+T/2)}{\sqrt{\ln 2}}\right)\right]}$$

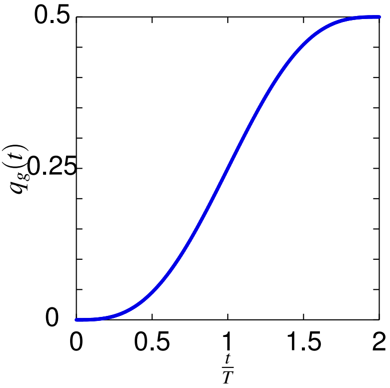
  - Empleado en GSM ($\beta = 0{,}3$) y DECT ($\beta = 0{,}2$)
  - Pulso rectangular filtrado con respuesta gaussiana

Árbol de fases - CPM de respuesta parcial - Ejemplo

- Ejemplo: pulso en coseno alzado ($L = 2$)

$$g(t) = \frac{1}{4T}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{2T}\right)\right] w_{2T}(t),\ \ q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4T}\left[t - \frac{2T}{2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{2T}\right)\right] & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$





Árbol de fases - CPM de fase parcial - Ejemplo - binario

- Secuencia resaltada: $I[0] = +1,\ I[1] = -1,\ I[2] = +1,\ I[3] = +1$