Ejercicio 1

a) La frecuencia de la portadora es la frecuencia central de la banda: $f_c = \frac{10+20}{2} = 15$ MHz.

La máxima tasa de símbolo con el ancho de banda dado es

$$R_{s|max} = \frac{B}{1+\alpha} \underset{\alpha=0}{=} B = 10 \text{ Mbaudios}$$

El número mínimo necesario de bits por símbolo, con la restricción de que debe ser un número par (las constelaciones en cruz están descartadas en este caso) es

$$m = \left\lceil \frac{R_b}{R_s} \right\rceil = \left\lceil \frac{45}{10} \right\rceil = \lceil 4.5 \rceil = 6 \text{ bits/símbolo.}$$

Por tanto el orden de la constelación es $M = 2^m = 64$ símbolos. Ahora la tasa de símbolo es

$$R_s = \frac{R_b}{m} = \frac{45 \times 10^6}{6} = 7.5 \text{ Mbaudios.}$$

Como el canal es ideal, la elección más simple para los filtros transmisor y receptor es

$$g(t) = f(t) = h_{RRC}^{\alpha,T}(t) \to p(t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t) \to p[n] = \delta[n]$$

con $\alpha = 0.3333$ y $T = 1/R_s = 0.1333$ μs, ya que el factor de caída para usar todo el ancho de banda disponible es

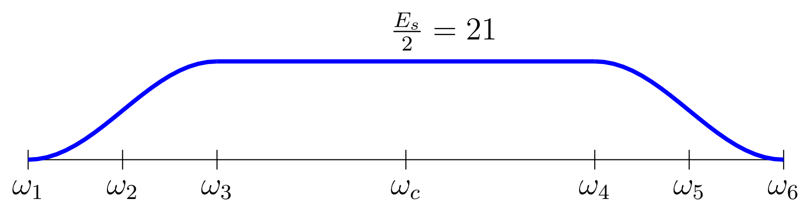
$$\alpha = \frac{B}{R_s} - 1 = \frac{10}{7.5} - 1 = 0.3333$$

La potencia de la señal transmitida, con una secuencia blanca y filtros normalizados es

$$P_X = R_s \times E_s = 315 \text{ MWatts, ya que } E_s = \frac{2(M-1)}{3} = 42 \text{ J.}$$

b) La densidad espectral de potencia de la señal modulada es

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2}\left[S_S(j\omega - j\omega_c) + S_S(j\omega + j\omega_c)\right] \text{ con } S_S(j\omega) = \frac{E_s}{T}|G(j\omega)|^2 = \frac{E_s}{T} H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$$



Las correspondientes frecuencias en MHz son

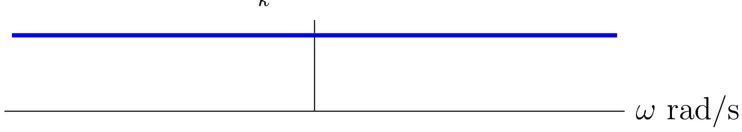
$$f_1 = 10.0,\ f_2 = 11.25,\ f_3 = 12.50,\ f_c = 15.0,\ f_4 = 17.50,\ f_5 = 18.75,\ f_6 = 20.0 \text{ MHz}$$

Al cumplir el filtro receptor que $r_f[n] = \delta[n]$, ya que $r_f(t) = f(t) * f(-t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t)$, se cumple que

$$R_f(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k R_f\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right) = 1$$

y el ruido discreto es por tanto blanco, con densidad espectal de potencia

$$S_z\left(e^{j\omega}\right) = N_0 \frac{1}{T}\sum_k R_f\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right) = N_0$$

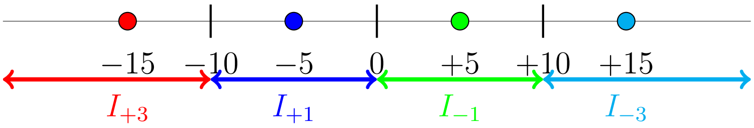


Ejercicio 2

a) El retardo óptimo en este caso es para $d = 3$, ya que el máximo valor en módulo para el canal discreto equivalente está en $n = 3$. El valor del nivel de ISI es

$$\gamma_{ISI} = \frac{D_{pico}}{\eta} = \frac{3}{5} < 1, \quad D_{pico} = \frac{\sum_{n \neq d} |p[n]|}{|p[d]|} = \frac{1}{5}, \quad \eta = \frac{d_{min}/2}{|\mathcal{A}|_{max}} = \frac{1}{3}$$

por lo que las regiones de decisión únicamente se escalan de acuerdo al valor del cursor $p[d] = -5$



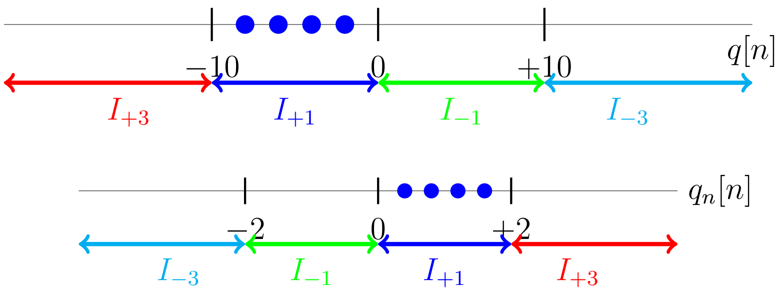
La otra opción de decidir a partir de la observación normalizada

$$q_n[n] = \frac{q[n]}{p[d]} = -\frac{q[n]}{5}, \text{ donde ahora la varianza de ruido es } \sigma^2_{z_n} = \frac{\sigma^2_z}{|p[d]|^2} = \frac{\sigma^2_z}{25} = 0.02,$$

y mantener la regiones 4-PAM: $I_{-3} = (-\infty, -2)$, $I_{-1} = [-2, 0)$, $I_{+1} = [0, +2)$, $I_{+3} = [+2, +\infty)$.
Los valores de la salida sin ruido asociada a $A[n-3] = +1$, teniendo en cuenta que

$$o[n] = A[n] * p[n] = A[n] - 5\, A[n-3]$$

$A[n]$	$A[n-3]$	$o[n]$	$o_n[n]$
-3	$+1$	-8	1.6
-1	$+1$	-6	1.2
$+1$	$+1$	-4	0.8
$+3$	$+1$	-2	0.4



$$\begin{aligned}
P_{e|A[n-3]=+1} =& \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{2}{\sqrt{0.5}}\right) + Q\left(\frac{8}{\sqrt{0.5}}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{4}{\sqrt{0.5}}\right) + Q\left(\frac{6}{\sqrt{0.5}}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{6}{\sqrt{0.5}}\right) + Q\left(\frac{4}{\sqrt{0.5}}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{8}{\sqrt{0.5}}\right) + Q\left(\frac{2}{\sqrt{0.5}}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{2}{\sqrt{0.5}}\right) + Q\left(\frac{4}{\sqrt{0.5}}\right) + Q\left(\frac{6}{\sqrt{0.5}}\right) + Q\left(\frac{8}{\sqrt{0.5}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Si se normalizan las observaciones, la varianza de ruido normalizado es $\sigma^2_{z_n} = \sigma^2_z/|p[d]|^2 = 0.02$, y se llegaría al mismo resultado, ya que

$$Q\left(\frac{2}{\sqrt{0.5}}\right) = Q\left(\frac{0.4}{\sqrt{0.02}}\right) = Q(2.828), \quad Q\left(\frac{8}{\sqrt{0.5}}\right) = Q\left(\frac{1.6}{\sqrt{0.02}}\right) = Q(11.314)\cdots$$

Las decisiones, teniendo en cuenta el retardo son

$$\hat{A}[0] = \text{dec}(q[3] = -5.3) = \text{dec}(q_n[3] = +1.06) = +1$$

$$\hat{A}[1] = \text{dec}(q[4] = +12.7) = \text{dec}(q_n[4] = -2.54) = -3$$

$$\hat{A}[2] = \text{dec}(q[5] = +3.4) = \text{dec}(q_n[5] = -0.68) = -1$$

b) Sin limitación de coeficientes, la solución del igualador se obtiene en el dominio de la frecuencia. En particular, para un igualador MMSE la solución viene dada por

$$W\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{-j\omega d}P^{*}\left(e^{j\omega}\right)}{|P\left(e^{j\omega}\right)|^{2}+\lambda}=\frac{e^{-j\omega d}\left(1-5e^{+j3\omega}\right)}{26.1-10\cos(3\omega)}$$

donde el parámetro d es el retardo, el mínimo valor que hace que la transformadad de Fourier inversa $w[n]$ sea causal, y

$$\lambda=\frac{\sigma_z^2}{E_s}=\frac{0.5}{5}=0.1,\quad E_s=\frac{M^2-1}{3}=\frac{4^2-1}{3}=5\text{ J.}$$

y la respuesta en frecuencia del canal discreto equivalente es

$$P\left(e^{j\omega}\right)=\sum_n p[n]\;e^{-j\omega n}=1-5e^{-j3\omega}$$

En este caso, para calcular el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del canal, una opción es multiplicar esta respuesta por su conjugado

$$\left|P\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=\left(1-5e^{-j3\omega}\right)\times\left(1-5e^{+j3\omega}\right)=26-10\cos(3\omega)$$

La probabilidad de error aproximada es

$$P_e\approx k\;Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_{e_d}}\right)=2\;Q\left(\frac{1}{0.144}\right),\text{ con }\sigma_{e_d}^2=\sigma_z^2\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|P\left(e^{j\omega}\right)\right|^2+\lambda}\;d\omega,$$

ya que para una modulación 4-PAM $d_{min}=2$ (mínima distancia entre símbolos de la constelación), y $k=2$ (máximo número de símbolos a mínima distancia de un símbolo de la constelación), y en este caso

$$\sigma_{e_d}^2=\sigma_z^2\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{26.1-10\cos(3\omega)}\;d\omega=\sigma_z^2\times\frac{1}{\sqrt{(26.1)^2-(10)^2}}=\sigma_z^2\times4.1479\times10^{-2}=2.07\times10^{-2}$$

c) La respuesta conjunta de canal e igualador, $c[n]=p[n]*w[n]$, se puede calcular como

$$\mathbf{c}=\mathbf{P}\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\-5&0&0&1&0\\0&-5&0&0&1\\0&0&-5&0&0\\0&0&0&-5&0\\0&0&0&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-0.2\\0\\0\\+0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c[0]\\c[1]\\c[2]\\c[3]\\c[4]\\c[5]\\c[6]\\c[7]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-0.2\\0\\0\\1.1\\0\\0\\-0.5\end{bmatrix}$$

El retardo óptimo es $d=4$ porque el valor máximo de $|c[n]|$ está en $n=4$, y la probabilidad de error es

$$Pe\approx k\;Q\left(\frac{d_{min}|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2+\sigma_{z'}^2}}\right)=2\;Q\left(\frac{1.1}{\sqrt{1.475}}\right)=2\;Q(0.9057)$$

ya que

$$\sigma_{ISI}^2=E_s\sum_{\substack{n=0\\n\neq d}}^{K_p+K_w}|c[n]|=5\times\left(0.2^2+0.5^2\right)=5\times0.29=1.45$$

$$\sigma_{z'}^2=\sigma_z^2\sum_{n=0}^{Kw}|w[n]|^2=0.5\times\left(0.2^2+0.1^2\right)=0.5\times0.05=0.025$$

Ejercicio 3

a) En un sistema 4-ário, $R_s = R_b/2 = 1$ Mbaudios

I) En la CPFSK las 4 frecuencias deben cumplir:

$$f_i = N_i\ R_s \text{ Hz, con } N_{i+1} = N_i + 1$$

y por tanto

$$f_0 = 3 \text{ MHz},\ f_1 = 4 \text{ MHz},\ f_2 = 5 \text{ MHz},\ f_3 = 6 \text{ MHz}$$

II) Para la modulación MSK las condiciones son

$$\Delta_f = f_{i+1} - f_i = \frac{R_s}{2} = 0.5 \text{ MHz}$$

Y las frecuencias son

$$f_0 = 2.5 \text{ MHz},\ f_1 = 3 \text{ MHz},\ f_2 = 3.5 \text{ MHz},\ f_3 = 4 \text{ MHz}$$

III) El ancho de banda efectivo es

$$\text{CPFSK} : B_{eff} = (M+1)\ R_s = 5 \text{ MHz}.$$

$$\text{MSK} : B_{eff} = (M+3)\ \frac{R_s}{2} = 3.5 \text{ MHz}.$$

b) En este caso se trata la modulación CPM

I) En una CPM de espuesta completa la duración de $g(t)$ está limitada a un intervalo de símbolo (en una modulación de respuesta parcial los pulsos tienen una duración de varios intervalos de símbolo), por lo que

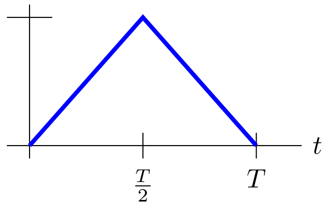
$$B \leq T, \text{ con } T = \frac{1}{R_s} = \frac{m}{R_b} = \frac{2}{2 \times 10^6} = 1\ \mu\text{s}.$$

El valor de A, para que el pulso esté normalizado, es aquel que cumple que

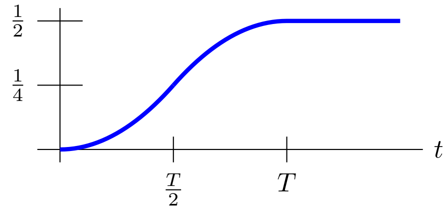
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ dt = \frac{1}{2} \to A \times \frac{B}{2} = A \times \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \to A = \frac{1}{T} = 10^6.$$

II) El árbol de fases requiere el cálculo de la integral de $g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T}\, t, & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ A - \frac{2A}{T}\, \left(t - \frac{T}{2}\right), & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$q_g(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{A}{T}\, t^2 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{4} + A(t - \frac{t}{2}) - \frac{A}{T}\, \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \geq T \end{cases}$$



Fase en $nT \leq t < (n+1)T$:

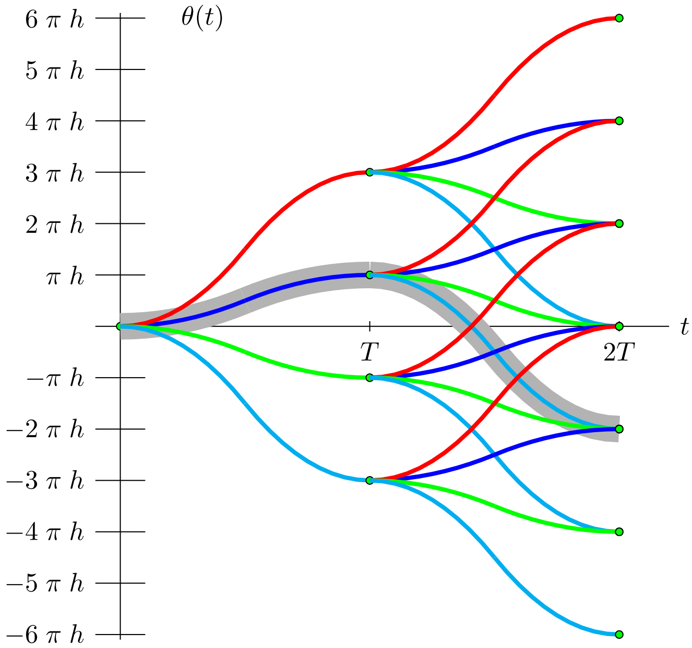
$$\theta(t) = \theta[n] + \theta(t,n)$$

$$\theta[n] = \pi\ h \sum_{m=0}^{n-1} I[m]$$

$$\theta(t,n) = 2\ \pi\ h\ I[n]\ q_g(t - nT)$$

$$\Delta_\theta[n] = \theta[n+1] - \theta[n]$$

$$\Delta_\theta[n] = \pi\ h\ I[n]$$



Ejercicio 4

a) Modulación de espectro ensanchado por secuencia directa

i) Las muestras a tiempo de chip se obtien por bloques de N nuestras, con el bloque de índice n

$$s^{(n)}[m] = A[n] \times x[m], \text{ para } m \in \{0, 1, \cdots, N-1\} \qquad s[m] = \sum_n s^{(n)}[m + nN]$$

Por tanto, las muestras son

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s[m]$	$+1$	-1	-1	$+1$	-3	$+3$	$+3$	-3	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1

El ancho de banda de la señal modulada es

$$B = N \times R_s(1+\alpha) = 4 \times 5000 \times 1.2 = 24 \text{ kHz}.$$

ii) Cada observación a tiempo de símbolo se obtiene procesando N muestras a tiempo de chip

$$q[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[m] \times v[m + nN]$$

por lo que en este caso

$$q[0] = +1 \times +1.1 - 1 \times -0.9 - 1 \times -0.8 + 1 \times +0.7 = 3.5$$

b) Modulación OFDM en el que la tasa por portadora es la total dividida por el número de portadoras $N = 4$, es decir

$$R_s = \frac{R_s^{TOTAL}}{N} = \frac{4}{4} = 1 \text{ baudio, y por tanto } T = \frac{1}{R_s} = 1 \text{ s}$$

i) Sin prefijo cíclico, las muestras se obtienen por bloques de N muestras

$$s^{(n')}[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n']\, e^{j\frac{2\pi k}{N} m}$$

donde $A_k[n']$ para $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ son las secuencias resultantes de la conversión serie/paralelo de $A[n]$. En este caso, $A_n[0] = A[n]$ para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Por tanto

$$s[m] = s^{(0)}[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n']\, e^{j\frac{2\pi k}{N} m} = +1 - 3 \times \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4} m}}_{e^{j\frac{\pi}{2} m}} + 1 \times \underbrace{e^{j\frac{4\pi}{4} m}}_{e^{j\pi m}} - 1 \times \underbrace{e^{j\frac{6\pi}{4} m}}_{e^{j\frac{3\pi}{2} m}}$$

Sustituyendo valores

$$s[0] = +1 \times +1 - 3 \times +1 + 1 \times +1 - 1 \times +1 = -2$$
$$s[1] = +1 \times +1 - 3 \times +j + 1 \times -1 - 1 \times -j = -2j$$
$$s[2] = +1 \times +1 - 3 \times -1 + 1 \times +1 - 1 \times -1 = +6$$
$$s[3] = +1 \times +1 - 3 \times -j + 1 \times -1 - 1 \times +j = +2j$$

m	0	1	2	3
$s[m]$	-2	$-2j$	$+6$	$+2j$

El ancho de banda sin prefijo cíclico es

$$B = N \times R_s = 4 \text{ Hz}$$

ii) Con prefijo cíclico hay que replicar la última muestra al principio de cada bloque

m	-1	0	1	2	3
$\tilde{s}[m]$	$+2j$	-2	$-2j$	$+6$	$+2j$

El ancho de banda con prefijo cíclico es

$$B = (N + C) \times R_s = 5 \text{ Hz}$$

Ejercicio 5

a) Código bloque lineal

i) La matriz de chequeo de paridad tiene tamaño $(n-k) \times n = 4 \times 5$, por lo que la tasa es

$$R = \frac{k}{n} = \frac{1}{5}.$$

Como la distancia mínima es $d_{min} = 5$ (se calcula más tarde) el código puede detectar y corregir, respectivamente

$$d = d_{min} - 1 = 4 \text{ errores}, \; t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = 2 \text{ errores}.$$

ii) El código es sistemático por ambos lados (ver diccionario y matriz generadora más adelante).

iii) Es un código perfecto (es un código de repetición), ya que

$$\sum_{e=0}^{t} \binom{n}{e} = \binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{2} = 1 + 5 + 10 = 16 = 2^{n-k} = 2^4$$

iv) La matriz generadora y el diccionario son

$$\mathbf{G} = [11111] \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} \mathbf{b}_i & \mathbf{c}_i \\ \hline 0 & 00000 \\ 1 & 11111 \end{array} \quad \rightarrow \quad d_{min} = 5$$

v) La tabla de síndromes se obtiene teniendo en cuenta que $\mathbf{s} = \mathbf{e}\,\mathbf{H}^T$:

e	**s**
00000	0000
10000	1111
01000	1000
00100	0100
00010	0010
00001	0001
11000	0111
10100	1011
10010	1101
10001	1110
01100	1100
01010	1010
01001	1001
00110	0110
00101	0101
00011	0011

Decodificación

- Síndrome: $\mathbf{s} = \mathbf{r}\,\mathbf{H}^T = 1\,0\,1\,0$
- Patrón de error: $\mathbf{e} = 0\,1\,0\,1\,0$
- Corrección: $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} = 1\,1\,1\,1\,1$
- Decodificación: $\hat{\mathbf{b}} = 1$

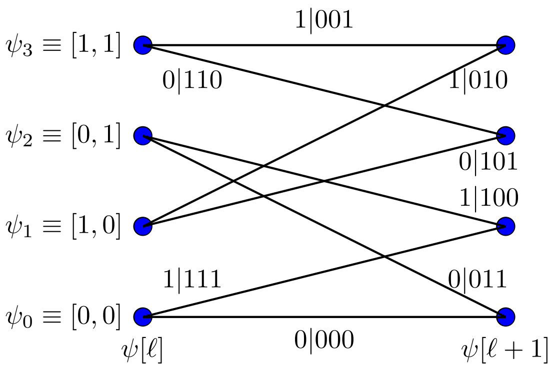
De nuevo se puede ver que el código es perfecto: la tabla de síndomes está completa tras incluir todos los patrones de hasta $t = 2$ errores.

b) Código convolucional

I) La tasa de cofificación es

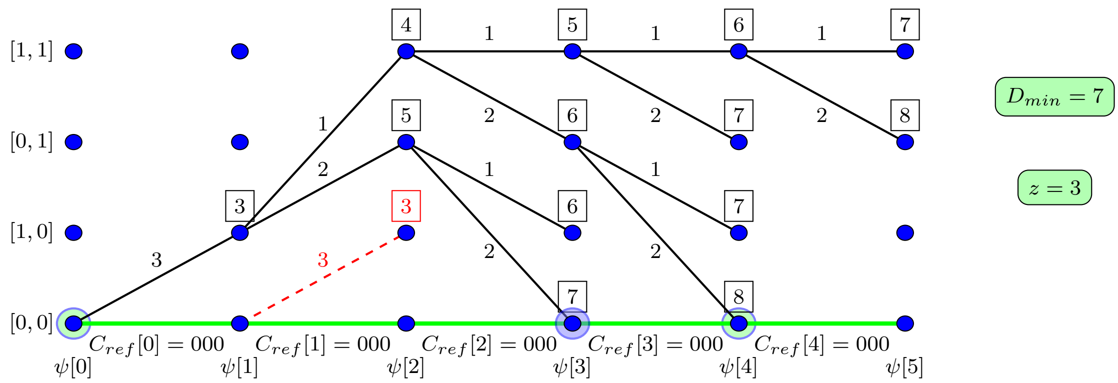
$$R = \frac{k}{n} = \frac{1}{3}$$

Y el diagrama de rejilla



$B^{(0)}[\ell]$	$B^{(0)}[\ell-1]$	$B^{(0)}[\ell-2]$	$C^{(0)}[\ell]$	$C^{(1)}[\ell]$	$C^{(2)}[\ell]$
1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0

II) La mínima distancia de Hamming se calcula utilizando la rejilla



$$P_e \approx c \sum_{e=t+1}^{n\times z} \binom{nz}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{nz-e} = c \sum_{e=4}^{9} \binom{9}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{9-e} \text{ con } \varepsilon = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2/2}}\right) = Q(1)$$

III) Algoritmo de Viterbi: