uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía I (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Introducción:

Números reales

material disponible también en:

https://www.eco.uc3m.es/docencia/matematicasi/

CC BY NC SA

Tema 1

La recta real. Funciones de una variable

1.1 Desigualdades en la recta real

Trabajaremos en el campo de los números reales, $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales es un conjunto totalmente ordenado para lo cual utilizamos las desigualdades. Geométricamente, $x < y$ significa que x está la izquierda de y.

Propiedades:

1. $a < b \Longleftrightarrow a + K < b + K$,
2. Si $K > 0: \ a < b \Longleftrightarrow aK < bK$. Si $K < 0: \ a < b \Longleftrightarrow aK > bK$
3. $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d; \ 0 \leq a < b, 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$
4. $ab > 0 \Longleftrightarrow [a > 0, b > 0$ o $a < 0, b < 0]; \ ab < 0 \Longleftrightarrow [a > 0, b < 0$ o $a < 0, b < 0]$
5. si n es par: $x^n > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$; si n es impar: $x^n > 0 \Longleftrightarrow x > 0$.

Definición 1.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ es un Intervalo $\Longleftrightarrow [\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, \ x < z < y \Rightarrow z \in I]$ y Cardinal$(I) > 1$.

Es decir, un intervalo contiene al menos dos puntos y todos los puntos intermedios están contenidos en él.

Los intervalos pueden ser cerrados (si contienen todos los puntos frontera) o abiertos (si no contienen ninguno de los puntos frontera).

Pueden ser acotados (si no se acercan a $\pm\infty$) o no acotados (si se acercan a $\pm\infty$).

1.2 Valor Absoluto

Para el estudio de las propiedades de las funciones necesitamos el concepto de valor absoluto de un número real.

Definición 1.2.1. Sea a un número real. Entonces el valor absoluto de a es el número real $|a|$ definido por

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{si } a < 0 \\ a, & \text{si } a \geq 0 \end{cases}.$$

El valor absoluto $|a|$ se puede interpretar como la distancia del punto a al origen en la recta real.

1.2.1 Propiedades

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|a| \geq 0$, y $|a| = 0$ si, y solo si $a = 0$.
2. $-|a| \leq a \leq |a|$.
3. $|ab| = |a||b|$.
4. $|a| = \sqrt{a^2}$
5. If $a^2 \leq b^2$, entonces $|a| \leq |b|$.
6. (Desigualdad Triangular)
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$
7. Sea p un número positivo. Entonces
   (a) $|a| \leq p$ si, y solo si $-p \leq a \leq p$.
   (b) $|a| \geq p$ si, y solo si $a \geq p$ o $a \leq -p$.

Ejemplo 1.2.2. Demostrar la desigualdad triangular.

SOLUCIÓN:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

de donde concluímos que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Ejemplo 1.2.3. Hallar el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad

$$5 < |2x - 1| \leq 9$$

SOLUCIÓN: De (6b) tenemos que, $5 < |2x-1|$ si, y solo si $2x-1 > 5$ o $2x-1 < -5$; por lo que, $x > 3$ o $x < -2$, esto es, $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. De(6a) tenemos que, $|2x-1| \leq 9$ si, y solo si $-9 \leq 2x - 1 \leq 9$; por lo que $-4 \leq x \leq 5$, esto es, $x \in [-4, 5]$. Ambas desigualdades se verifican simultáneamente si, y solo si x pertenece a $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ y a $[-4, 5]$. En consecuencia, el conjunto solución es $[-4, -2) \cup (3, 5]$.

MATEMÁTICAS I: CONJUNTOS ORDENADOS.

Definición 1: (X, $\preceq$) es un conjunto ordenado cuando la relación $\preceq$ cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. A saber:

i) reflexiva ($a \preceq a$);
ii) antisimétrica ($[a \preceq b$ y $b \preceq a] \Rightarrow a=b$);
iii) transitiva $[a \preceq b$ y $b \preceq c\,] \Rightarrow a \preceq c$.

Definición 2: (X, $\preceq$) es un orden total si $\forall x, y \in X \Rightarrow [x \preceq y \; o \; y \preceq x]$.

Ejemplos: (R, $\leq$) es un orden total. $(R^2, \preceq_P)$ es un orden parcial definido por: $(x_1, y_1) \;\preceq_P (x_2, y_2) \Leftrightarrow [x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2]$.

Geométricamente, esto significa que (x_1, y_1) está a la izquierda y debajo respecto a (x_2, y_2). Por ello, (0,1) y (1,0) no son comparables.

Definición 3: si (X, $\preceq$) es un conjunto totalmente ordenado, definimos, para cualquier $A \subset X, A \neq \emptyset$:

a) Máximo(A)=M$\Leftrightarrow[\forall a \in A \Rightarrow a \preceq M$ y $M \in A]$.
b) mínimo(A)=m$\Leftrightarrow[\forall a \in A \Rightarrow m \preceq a$ y $m \in A]$.

Ejemplos: en R, A finito y A = [0,1] tienen máximo, pero no A=[0,1) ni A=[0, ∞).

Observación 1: análogamente, se puede definir máximo y mínimo en (X, $\preceq$), un conjunto parcialmente ordenado, pero es un concepto poco útil. Ejemplo: A={(x , y): x ≥ 0, y ≥0, x+ y ≤1} no tiene máximo. Para resolver esta carencia, introducimos:

Definición 4: si (X, $\preceq$) es un conjunto parcialmente ordenado, para cualquier $A \subset X, A \neq \emptyset$, definimos:

a) Elementos maximales(A)=$\{a \in A: \nexists a' \in A, a' \neq a$ y $a \preceq a'\}$.
b) Elementos minimales(A)=$\{a \in A: \nexists a' \in A, a' \neq a$ y $a' \preceq a\}$.

De esta forma, el conjunto A={(x , y): x ≥ 0, y ≥0, x+ y ≤1} tiene como Elementos maximales(A)=$\{(x, y) \in A$: x+y=1}.

Observación 2: véase que, si existe máximo M, ese es el único maximal. Lo mismo es cierto para el mínimo y los elementos minimales.
Pero el recíproco no es cierto: el conjunto A={(x,y): x=0, 0≤y≤1}U{0<x<1, y=0} tiene un único elemento maximal, el punto (0,1), pero no tiene máximo.

Observación 3: un elemento maximal se conoce como óptimo de Pareto en el lenguaje económico. Es un concepto fundamental desde principios del s. XX.