
OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía I (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Ejemplo de examen final

Junio de 2022



Duración: 2 horas.

APELLIDOS:

NOMBRE:

ID:

GRADO:

GRUPO:

(1) Sea $C(x) = b + 16x + 4x^2$ la función de costes y $p(x) = a - x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $a, b > 0$. Se pide:

- (a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 5$, calcular el valor del parámetro a .
- (b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio medio es $x^{**} = 4$, calcular el valor del parámetro b .

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

- (a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (a - x)x - (b + 16x + 4x^2) = -5x^2 + (a - 16)x - b$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$$B'(x) = -10x + a - 16; B''(x) = -10 < 0$$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \frac{a - 16}{10}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

$$\text{Luego } x^* = 5 = \frac{a - 16}{10} \implies a - 16 = 50 \implies a = 66$$

- (b) Como la función de beneficio medio es $\frac{B(x)}{x} = -5x + (a - 16) - \frac{b}{x}$,

$$\text{su derivada será: } \left(\frac{B(x)}{x}\right)' = -5 + \frac{b}{x^2} = 0 \iff x^2 = \frac{b}{5}.$$

Como $\left(\frac{B(x)}{x}\right)'' = -\frac{2b}{x^3} < 0$, la función es cóncava y el punto crítico será maximizador global.

$$\text{Luego } x^{**} = 4 = \sqrt{\frac{b}{5}} \implies b = 80$$

(2) Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $e^{x+y} + xy^2 = e$ en un entorno del punto $x = 1, y = 0$, se pide:

- (a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 1$.
- (b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 1, y = 0$.
- (c) Calcular aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, $f(0,9)$ y $f(1,2)$.

Mediante dicho polinomio, comparar $f(1)$ con $\frac{2}{3}f(0,9) + \frac{1}{3}f(1,2)$.

Sugerencia para b y c: utilizar que $f''(1) < 0$.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

- (a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$e^{x+y}(1 + y') + y^2 + 2xyy' = 0$$

sustituyendo $x = 1, y(1) = 0$ se deduce que $y'(1) = f'(1) = -1$.

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = -(x - 1)$ o $x + y = 1$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$e^{x+y}[(1 + y')^2 + y''] + 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 0$$

sustituyendo $x = 1, y(1) = 0, y'(1) = -1$ se deduce que $y''(1) = f''(1) = -2/e$.

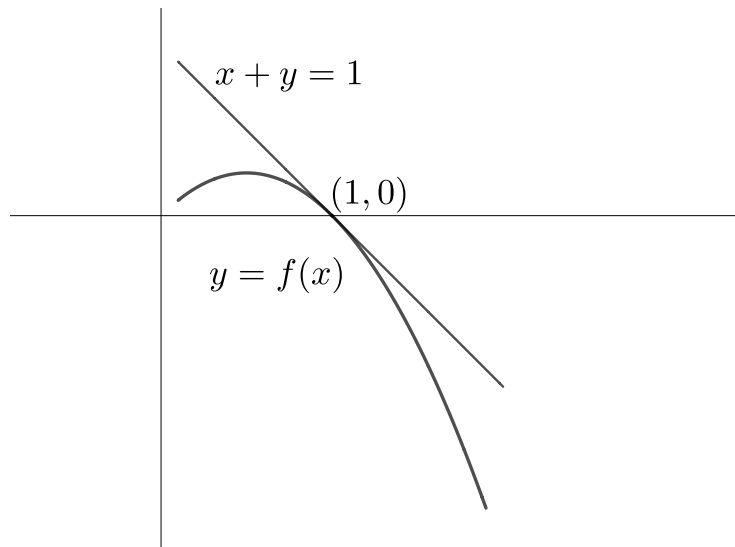
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = -(x - 1) - \frac{1}{e}(x - 1)^2$

- (b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f , cerca del punto $x = 1$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.
- (c) Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que:

$$f(0,9) \approx 0,1 - \frac{1}{e} 0,01; f(1,2) \approx -0,2 - \frac{1}{e} 0,04 \implies$$

$$\frac{2}{3}f(0,9) + \frac{1}{3}f(1,2) = -\frac{1}{e} 0,02 < 0 = f(1) = f\left(\frac{2}{3}0,9 + \frac{1}{3}1,2\right).$$

Lo cual es esperable, debido a que $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 1$.



(3) Sea la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. Se pide:

- Hallar el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la imagen de $f(x)$. Representar la gráfica de la función.
- Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, \infty)$. Hallar, si existen, los extremos globales de $f_1(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

(a) En primer lugar, el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Si hacemos el límite por la derecha en $x = -1$ obtenemos $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = \infty$.

Análogamente por la izquierda $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$.

Por lo tanto f tiene a $x = -1$ como asíntota vertical.

Para las asíntotas horizontales, si hacemos el límite hacia ∞ obtenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} =$ (dividiendo numerador y denominador por x) $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x} = 1$.

Por lo tanto f tiene asíntota horizontal $y = 1$ en ∞ .

Hallando ahora el límite hacia $-\infty$ de f obtenemos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} =$ (dividiendo numerador

y denominador por $-x$, que pasa dentro de la raíz como $1/x^2$) $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{-1-1/x} = -1$.

Por lo tanto, f tiene asíntota horizontal $y = -1$ en $-\infty$. Obviamente, como hay dos asíntotas horizontales, no puede haber asíntotas oblicuas en este caso.

(b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, derivamos la función y estudiamos su signo:

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)' = \frac{(2x/2\sqrt{x^2+1})(x+1) - \sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}, \text{ luego observamos que su signo viene determinado por el signo de } x-1, \text{ pues}$$

el denominador siempre es positivo. De donde obtenemos que:

i) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$, luego f es creciente en $[1, \infty)$.

ii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, luego f es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 1)$.

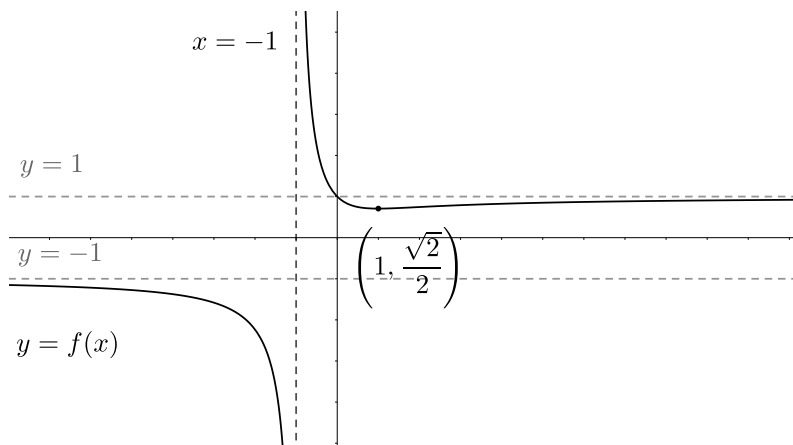
En cuanto a la imagen, como $f(x)$ es continua en su dominio, por el teorema de los valores intermedios se deduce que:

i) la imagen del intervalo $(-\infty, -1)$ será $(-\infty, -1)$.

ii) la imagen del intervalo $(-1, \infty)$, teniendo en cuenta que $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, será $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.

Por tanto, la imagen de f será $(-\infty, -1) \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.

En cuanto a la gráfica, tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



(c) En cuanto a los extremos globales de f_1 , $x = 1$ será el minimizador global, pues f_1 es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$.

Por otro lado, $x = 0$ es el maximizador global de $f_1(x)$ pues, como f_1 es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$, y $f_1(x)$ tiene como asíntota horizontal $y = 1 = f_1(0)$, se deduce que $f_1(x) \leq 1 = f_1(0)$.

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Se pide:

- Comprobar que la función anterior es derivable en 0.
- Hallar las asíntotas de dicha función.
- Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, \infty)$. Hallar el mínimo global de dicha función y estudiar si dicha función alcanza máximo global.

Sugerencia: no se pide calcular el máximo, sino saber si existe o no.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

- (a) En primer lugar, estudiamos si la función es continua en $x = 0$. Para ello:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \frac{0}{0} = (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0, \text{ luego dicha función es continua en } 0.$$

Para estudiar si la función es derivable en dicho punto, como es continua, habrá que estudiar si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2x/(x^2 + 1)]x - \ln(x^2 + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2/(x^2 + 1)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}.$$

El primer límite es, obviamente, 2. En cuanto al segundo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{0}{0} = (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x/(x^2 + 1)}{2x} = 1.$$

Luego se deduce que $f'(0) = 1$.

- (b) Obviamente, dicha función no tiene asíntotas verticales, pues es continua en su dominio.

En cuanto a asíntotas en el infinito, como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0, \text{ luego la asíntota horizontal es } y = 0.$$

Análogamente, $y = 0$ es la asíntota en $-\infty$.

- (c) Como $f(x) > 0$ si $x > 0$ (pues $\ln(1 + x^2) > \ln 1 = 0$, si $x > 0$),

se deduce que $x = 0$ es el minimizador global y $f(0) = 0$ el mínimo global.

En cuanto al máximo global, existe pues, como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,

dado $f(1) = \ln 2 > 0$, podemos encontrar $M > 0$ tal que:

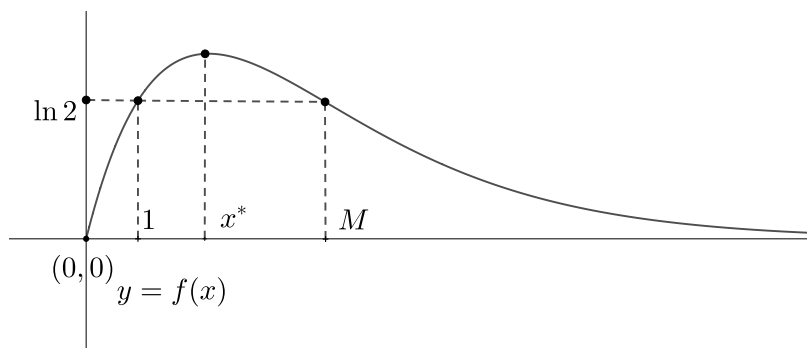
$$f(x) < f(1) \text{ si } x > M.$$

Y ahora, aplicando el teorema de Weierstrass a f en el intervalo $[0, M]$,

existe x^* maximizador de f en dicho intervalo.

Obviamente, x^* es también maximizador de f en $[0, \infty)$.

Ver el dibujo siguiente:



(5) Dadas la funciones $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por: $f(x) = e^{-2x}$, $g(x) = e^{-x/2}$, se pide:

(a) Representar aproximadamente el conjunto A , delimitado por las gráficas de dichas funciones, y las rectas $x = -1, x = 1$.

Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A .

(b) Calcular el área del conjunto dado.

Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \iff x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

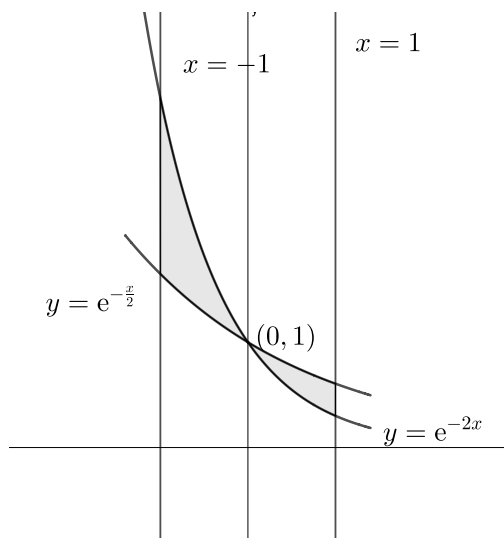
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

(a) En primer lugar observamos que $f(0) = g(0) = 1$. Por otro lado:

i) si $x > 0$, $f(x) < g(x)$, ya que $\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-3x/2} < 1$; y

ii) si $x < 0$, $f(x) > g(x)$, ya que $\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-3x/2} > 1$.

Como, además, $f(x), g(x) > 0$, se deduce que el dibujo de A será, aproximadamente:



Por tanto, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:

máximo(A), mínimo no existen.

maximales(A) = $\{(x, f(x)) : -1 \leq x \leq 0\} \cup \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$.

minimales(A) = $\{(x, g(x)) : -1 \leq x \leq 0\} \cup \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$.

(b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:

$$\begin{aligned} \text{área}(A) &= \int_{-1}^0 (e^{-2x} - e^{-x/2}) dx + \int_0^1 (e^{-x/2} - e^{-2x}) dx = \\ &= [-e^{-2x}/2 + 2e^{-x/2}]_{-1}^0 + [-2e^{-x/2} + e^{-2x}/2]_0^1 = \\ &= [-1/2 + 2 + e^2/2 - 2e^{1/2}] + [-2e^{-1/2} + e^{-2}/2 + 2 - 1/2] = \\ &= 3 + e^2/2 - 2e^{1/2} - 2e^{-1/2} + e^{-2}/2 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$