
OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía I (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Ejemplo de examen final

Junio de 2023



| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|-------|
| Exercise | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
| Points | | | | | | |

APELLIDOS:

NOMBRE:

ID:

GRADO:

GRUPO:

(1) Sea la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}{x + 2}$. Se pide:

- (a) Hallar el dominio y la asíntota en $+\infty$ de $f(x)$.
- (b) Considerar la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, \infty)$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la imagen de $f(x)$. Representar $f(x)$.
- (c) Sea $g(x)$ una función continua definida en $[0, \infty)$, creciente en $[0, a]$, decreciente en $[a, \infty)$ y que cumpla: $g(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. Considerar $g(x)$, restringida al intervalo $[b, \infty)$. Hallar, dependiendo de $a, b > 0$, los extremos globales de $g(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

a) En primer lugar, el dominio de la función es $\mathbb{R} - (-4, -1)$, pues las raíces del polinomio $x^2 + 5x + 4$ son $-4, -1$ y, como dicho polinomio es convexo, en el intervalo $(-4, -1)$ es negativo, luego ahí no existe la raíz.

También habría que excluir el punto $x = -2$, debido a que se anula el denominador en dicho punto, pero ya está incluido en el intervalo $(-4, -1)$.

En cuanto a la asíntota en $+\infty$, si hacemos el límite hacia ∞ obtenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}{x + 2} =$

$$\text{(dividiendo numerador y denominador por } x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 5/x + 4/x^2}}{1 + 2/x} = 1.$$

Por lo tanto f tiene asíntota horizontal $y = 1$ en ∞ .

Obviamente, como hay asíntota horizontal, no puede haber asíntota oblicua.

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, derivamos la función y estudiamos su signo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}{x + 2} \right)' = \frac{[(2x + 5)/2\sqrt{x^2 + 5x + 4}](x + 2) - \sqrt{x^2 + 5x + 4}}{(x + 2)^2} = \\ &= \frac{(2x + 5)(x + 2) - 2(x^2 + 5x + 4)}{2(x + 2)^2\sqrt{x^2 + 5x + 4}} = \frac{(2x^2 + 9x + 10) - (2x^2 + 10x + 8)}{2(x + 2)^2\sqrt{x^2 + 5x + 4}} = \\ &= \frac{-x + 2}{2(x + 2)^2\sqrt{x^2 + 5x + 4}}, \text{ luego observamos que su signo viene determinado por el} \end{aligned}$$

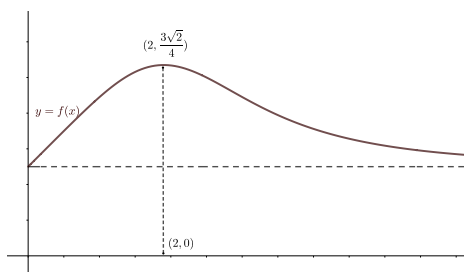
signo del numerador, pues el denominador siempre es positivo. Obtenemos:

i) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$, luego f es creciente en $[0, 2]$.

ii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$, luego f es decreciente en $[2, \infty)$.

En cuanto a la imagen, como $f(x)$ es continua en su dominio, f es creciente en $[0, 2]$, f es decreciente en $[2, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0)$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen del intervalo $[0, \infty)$ será $[1, f(2)] = [1, \sqrt{18}/4] = [1, \frac{3}{4}\sqrt{2}]$.

En cuanto a la gráfica, tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



c) La función $f(x)$ cumple las condiciones de $g(x)$, donde $g(0) = 1$ y $a = 2$.

Por tanto, es claro que la función no alcanza mínimo global, pues la función se acerca por arriba al valor $g(0)$ pero sin alcanzarlo.

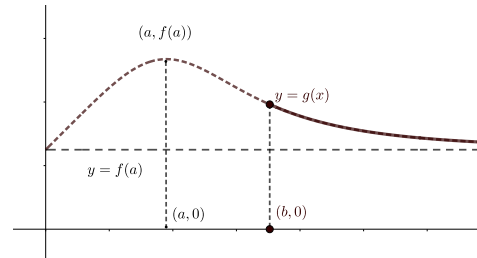
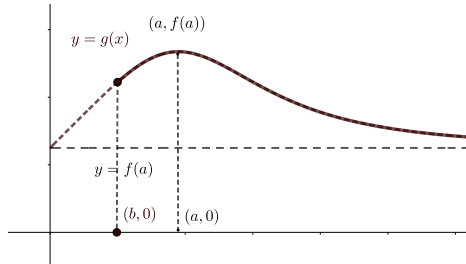
En cuanto al máximo global, hay que distinguir los siguientes casos:

i) si $b < a$, entonces el máximo global se alcanza en el punto a .

ii) si $a < b$, entonces el máximo global se alcanza en el punto b .

i) si $a = b$, entonces el máximo global se alcanza en el punto $a = b$.

Los dibujos siguientes clarificarán la situación:



(2) Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $e^{2x+y} + x^2y = e^2$ en un entorno del punto $x = 0, y = 2$, se pide:

- (a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 0$.
- (b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0, y = 2$.
- (c) Calcular aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, $f(-0,2)$ y $f(0,1)$.
Mediante dicho polinomio, comparar $f(0)$ con $\frac{1}{3}f(-0,2) + \frac{2}{3}f(0,1)$.
Sugerencia para b y c: utilizar que $f''(0) < 0$.

0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$e^{2x+y}(2 + y') + 2xy + x^2y' = 0$$

sustituyendo $x = 0, y(0) = 2$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = -2$.

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 2 - 2x$, o bien $2x + y = 2$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$e^{2x+y}[(2 + y')^2 + y''] + 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' = 0$$

sustituyendo $x = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2$ se deduce que $y''(0) = f''(0) = -\frac{4}{e^2}$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 2 - 2x - \frac{2}{e^2}x^2$

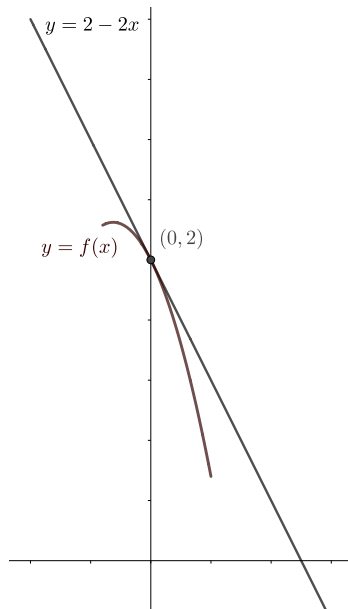
b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f , cerca del punto $x = 0$, será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

c) Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que:

$$f(-0,2) \approx 2 - 2(-0,2) - \frac{2}{e^2} 0,04; f(0,1) \approx 2 - 2(0,1) - \frac{2}{e^2} 0,01 \implies$$

$$\frac{1}{3}f(-0,2) + \frac{2}{3}f(0,1) = 2 - \frac{2}{e^2} 0,02 < 2 = f(0) = f\left(\frac{1}{3}(-0,2) + \frac{2}{3}(0,1)\right).$$

Lo cual es esperable, debido a que $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 0$.



(3) Sea $C(x) = C_0 + 2x + x^2$ la función de costes y $p(x) = 100 - ax$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $a, C_0 > 0$. Se pide:

- (a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 7$, calcular el valor de los parámetros a, C_0 .
- (b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^{**} = 7$, calcular el valor de los parámetros a, C_0 .

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (100 - ax)x - (C_0 + 2x + x^2) = -(a + 1)x^2 + 98x - C_0$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$$B'(x) = -2(a + 1)x + 98; B''(x) = -2(a + 1) < 0$$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \frac{98}{2(a + 1)}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

Luego $x^* = 7 = \frac{98}{2(a + 1)} \implies a = 6$; C_0 puede tomar cualquier valor.

b) Como la función de coste medio es $\frac{C(x)}{x} = x + 2 + \frac{C_0}{x}$, su derivada será: $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = 1 - \frac{C_0}{x^2} = 0 \iff x^2 = C_0$.

Como $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' = \frac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.

Luego $x^{**} = 7 \implies C_0 = 49$; a puede tomar cualquier valor.

(4) Sea $f(x) = \ln(a + e^x)$, restringida a $[0, \infty)$, donde $0 < a$. Se pide:

- Hallar la asíntota de dicha función en $+\infty$.
- Estudiar el crecimiento/decrecimiento y la concavidad/convexidad de dicha función.
- Representar $f(x)$ y su inversa, precisando su dominio de definición (obviamente, no es necesario ni calcular la función inversa ni sus derivadas).

Sugerencia parte a): utilizar que $\ln e^x = x$ y que $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

a) Dicha función no tiene asíntotas verticales, pues es continua en su dominio.

En cuanto a asíntotas en el infinito, como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a + e^x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{a + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(a/e^x) + 1} = 1. \text{ Por otro lado,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(a + e^x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(a + e^x) - \ln e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{a + e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a}{e^x} + 1\right) = \ln 1 = 0, \text{ luego la asíntota oblicua es } y = x.$$

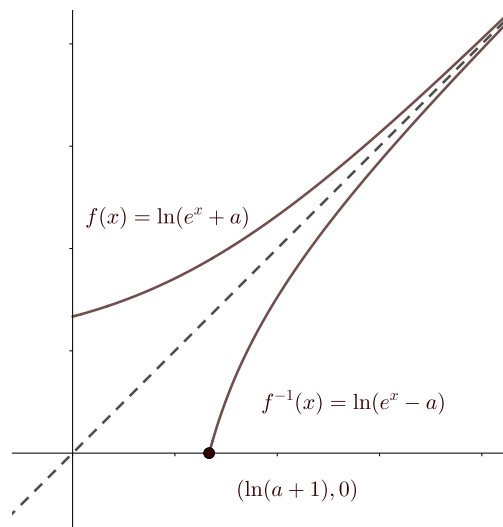
b) Obviamente, $f'(x) = \frac{e^x}{a + e^x} > 0$, luego dicha función es creciente.

Análogamente, $f''(x) = \frac{e^x(a + e^x) - e^x e^x}{(a + e^x)^2} = \frac{ae^x}{(a + e^x)^2} > 0$, luego $f(x)$ es convexa.

c) Por los datos anteriores, la función $f(x)$ tendrá la gráfica que se ve debajo.

Por simetría respecto a la diagonal principal, esa sería la gráfica de su inversa.

Si se quisiera calcular su inversa, sería la función $f^{-1}(x) = \ln(e^x - a)$, restringida al intervalo $[\ln(a + 1), \infty)$.



(5) Dadas la funciones $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por: $f(x) = -\ln(1+x)$, $g(x) = 1 - \ln(1+3x)$ se pide:

(a) Representar aproximadamente el conjunto A , delimitado por las gráficas de dichas funciones, y la recta $x = 0$.

Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A .

(b) Calcular el área del conjunto dado.

Sugerencia para a: recordar que $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

Sugerencia para b: una vez aplicada la regla de Barrow, ¡NO hace falta simplificar la expresión!

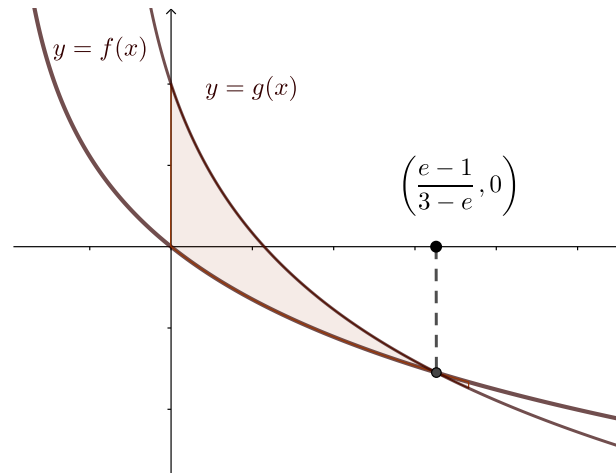
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

a) En primer lugar observamos que $f(0) = 0 < 1 = g(0)$. Por otro lado, dichas funciones se cortan cuando:

$$-\ln(1+x) = 1 - \ln(1+3x) \iff \ln\left(\frac{1+3x}{1+x}\right) = 1 \iff \frac{1+3x}{1+x} = e \iff 1+3x = e + ex \iff$$

$$\iff (3-e)x = e-1 \iff x = (e-1)/(3-e) = x^*$$

Como, además, ambas funciones son decrecientes, se deduce que el dibujo de A será, aproximadamente:



Por tanto, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:

máximo(A), mínimo(A) no existen.

maximales(A) = $\{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq x^*\}$.

minimales(A) = $\{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq x^*\}$.

b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:

área(A) = $\int_0^{x^*} (1 - \ln(1+3x) + \ln(1+x)) dx$; por otro lado:

$$\text{i) } \int 1 \cdot \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x} dx = x \ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x} dx =$$

$$= x \ln(1+x) - x + \ln(1+x)$$

$$\text{ii) } \int 1 \cdot \ln(1+3x) dx = x \ln(1+3x) - \int x \cdot \frac{3}{1+3x} dx = x \ln(1+3x) - \int \frac{3x+1-1}{1+3x} dx =$$

$$= x \ln(1+3x) - x + \frac{1}{3} \int \frac{3}{1+3x} dx = x \ln(1+3x) - x + \frac{1}{3} \ln(1+3x)$$

si llamamos: $H(x) = x - (x \ln(1+3x) - x + \frac{1}{3} \ln(1+3x)) + x \ln(1+x) - x + \ln(1+x)$,

aplicando Barrow: área (A) = $[H(x)]_0^{x^*} = H(x^*) - H(0)$ uds área.