

Comunicaciones Digitales

Capítulo 2

Receptores de comunicaciones digitales en presencia de interferencia intersimbólica

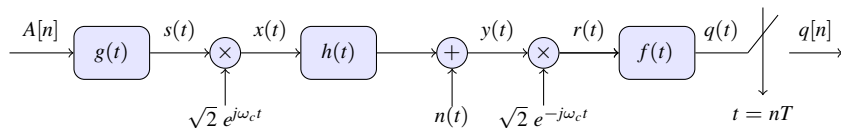
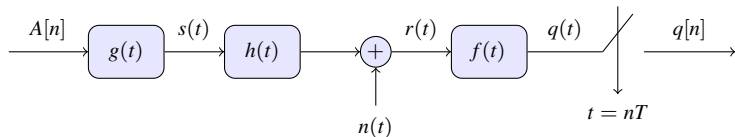
Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

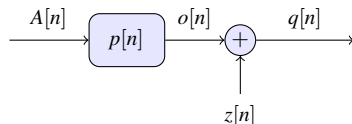
- Planteamiento del problema
 - ▶ Recuperación de la secuencia de datos transmitida bajo ISI
 - ★ ISI: *Inter-Symbol Interference*
- Solución más simple: detector símbolo a símbolo sin memoria
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión bajo ISI
 - ▶ Efecto del valor del cursor ($p[d]$)
 - ▶ Rediseño de las regiones de decisión
- Detección óptima bajo ISI
 - ▶ Detector de secuencias de máxima verosimilitud (MLSD)
MLSD: "*Maximum Likelihood Sequence Detector*"
 - ▶ Algoritmo de Viterbi
- Detectores sub-óptimos bajo ISI: igualadores de canal
 - ▶ Diseño de igualadores lineales no ciegos
 - ★ Criterio de diseño forzador de ceros (ZF)
 - ★ Criterio de diseño de mínimo error cuadrático medio (MMSE)

Sistema digital de comunicaciones PAM



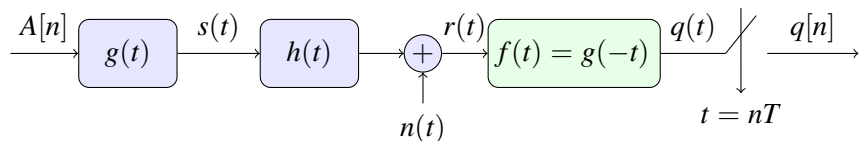
● Modelo equivalente en tiempo discreto

- ▶ Símbolos $A[n]$
- ▶ Canal discreto equivalente $p[n]$
- ▶ Ruido discreto $z[n]$
 - ★ Son reales en PAM banda base
 - ★ Son complejos en PAM paso banda



Configuración habitual para canales lineales

- Receptor es un filtro adaptado al transmisor $f(t) = g(-t)$ con $r_f(t) = r_g(t)$ cumpliendo Nyquist



- ▶ Opción habitual: filtros en raíz de coseno alzado

$$g(t) = h_{RRC}^{\alpha, T}(t) \quad \rightarrow \quad f(t) = h_{RRC}^{\alpha, T}(t)$$

$$g(t) * f(t) = r_g(t) = r_f(t) = h_{RC}^{\alpha, T}(t)$$

- Consecuencias:

- ▶ Esto asegura que el ruido en tiempo discreto $z[n]$ es blanco
- ▶ Existe ISI en el sistema (respuesta conjunta $p(t)$ no cumple Nyquist)
 - ★ Los receptores puede diseñarse específicamente para tratar con la ISI (como se verá en el Capítulo 2)

Detección bajo ISI - Planteamiento

- Receptor: filtro adaptado $f(t) = g(-t)$, normalizado, $r_f(t) = r_g(t)$ cumple Nyquist (i.e., $r_g[n] = \delta[n]$)

- ▶ $z[n]$ blanco y gaussiano: $\sigma_z^2 = \begin{cases} N_0/2, & A[n] \in \mathbf{R} \\ N_0, & A[n] \in \mathbf{C} \end{cases}$

- Secuencia de símbolos $A[n]$: constelación de M puntos

- ▶ Secuencia estacionaria blanca, energía media $E_s = E[|A[n]|^2]$

$$R_A[k] = E[A[n+k] A^*[n]] = E_s \delta[k]$$

$$S_A(e^{j\omega}) = E_s$$

- Respuesta $p(t)$ causal y limitada en el tiempo (T_p s)

- ▶ $p[n]$ causal de longitud $K_p + 1$, \Rightarrow memoria $K_p = \lfloor T_p/T \rfloor$
- ▶ Observación a la salida del demodulador

$$q[n] = A[n] * p[n] + z[n] = o[n] + z[n]$$

- ★ Salida sin ruido del canal discreto equivalente

$$o[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] A[n-k]$$

$K_p \equiv$ memoria (en muestras) del canal discreto equivalente

Memoria del canal discreto equivalente (K_p)

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p[0], \underbrace{p[1], p[2], \dots, p[K_p]}_{K_p \text{ términos memoria}} \end{bmatrix}$$

$$o[n] = \underbrace{A[n]p[0]}_{\text{actual}} + \underbrace{A[n-1]p[1] + A[n-2]p[2] + \dots + A[n-K_p]p[K_p]}_{K_p \text{ anteriores}}$$

- Símbolos que influyen en $o[n]$ en el instante n

- ▶ El símbolo del mismo instante n :
- ▶ Los K_p símbolos anteriores

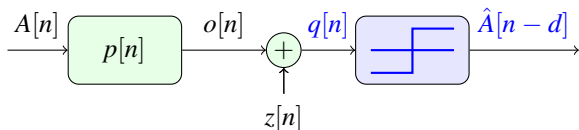
$A[n]$

$A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K_p]$

- $A[n]$ influye en $o[n]$ (y en $q[n]$) en $K_p + 1$ instantes

- ▶ En el instante actual: n
- ▶ En K_p instantes posteriores: $n+1, n+2, \dots, n+K_p$

Detector símbolo a símbolo sin memoria



- Detector basado en regiones de decisión
 - ▶ Constelaciones 1D : regiones dadas por umbrales
 - ▶ Constelaciones 2D : regiones dadas por fronteras 2D
- Parámetros de diseño
 - ▶ Retardo d para la decisión
 - ★ Regla de decisión se aplica a $q[n]$
 - ★ El resultado es la decisión sobre el símbolo $A[n-d]$

Procesado de $q[n] \rightarrow \hat{A}[n-d]$ (decisión sobre $A[n-d]$)

- ▶ Regiones de decisión
 - ★ Una región asociada a cada símbolo: I_j para $a_j \forall j$
 - ★ Determinan la regla de decisión

Si $q[n] \in I_j \rightarrow \hat{A}[n-d] = a_j$

Detector símbolo a símbolo sin memoria - Retardo d

- La observación $q[n]$ se usa para decidir $A[n - d]$
 - ▶ Retardo d en el decisor
- Canal ideal con un retardo de d muestras:

$$p[n] = C \delta[n - d] \quad \rightarrow \quad q[n] = C A[n - d] + z[n]$$

- Canal no ideal

$$q[n] = \underbrace{p[d] A[n - d]}_{\text{término deseado}} + \underbrace{\sum_{k \neq d} p[k] A[n - k]}_{\text{ISI}} + \underbrace{z[n]}_{\text{ruido}}$$

- Elección óptima del retardo d del decisor

- ▶ Símbolo con mayor contribución en $q[n]$
- ▶ Interpretación alternativa
 - ★ Normalización de la observación para compensar la ganancia $p[d]$

$$q_n[n] = \frac{q[n]}{p[d]} = A[n - d] + \sum_{k \neq d} \frac{p[k]}{p[d]} A[n - k] + \frac{z[n]}{p[d]}$$

- ★ Una vez fijado d , el término $p[d]$ divide a ISI y ruido
- ▶ Elección óptima: elegir d tal que $|p[d]| \geq |p[n]|$ para todo n
- ★ Minimiza el efecto conjunto de ISI y ruido

Selección del retardo óptimo - Ejemplo

- Transmisión de 2-PAM sobre $p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2]$

Retardo $d = 0$

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{7}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{5}{4}$
+1	-1	+1	$-\frac{1}{4}$
+1	-1	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	+1	+1	$+\frac{3}{4}$
-1	+1	-1	$+\frac{1}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{5}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$

Retardo $d = 1$ (óptimo)

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{7}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{5}{4}$
+1	-1	+1	$-\frac{1}{4}$
+1	-1	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	+1	+1	$+\frac{3}{4}$
-1	+1	-1	$+\frac{1}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{5}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$

Azul : $A[n-d] = +1$ Rojo : $A[n-d] = -1$

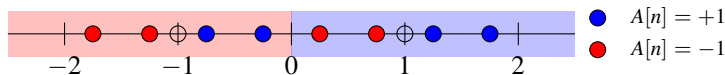
- El símbolo asociado al mayor valor de $|p[n]|$ es el que tiene mayor contribución sobre $o[n]$
 - ▶ El signo de $o[n]$ depende en este caso de $A[n-1]$ ($d = 1$)

Selección del retardo óptimo - Ejemplo (II)

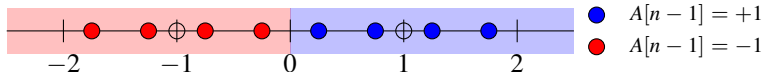
- Sin ISI ($p[n] = \delta[n]$)



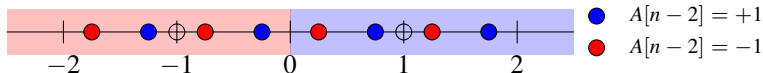
- Con ISI ($p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$): retardo $d = 0$



- Con ISI ($p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$): retardo $d = 1$



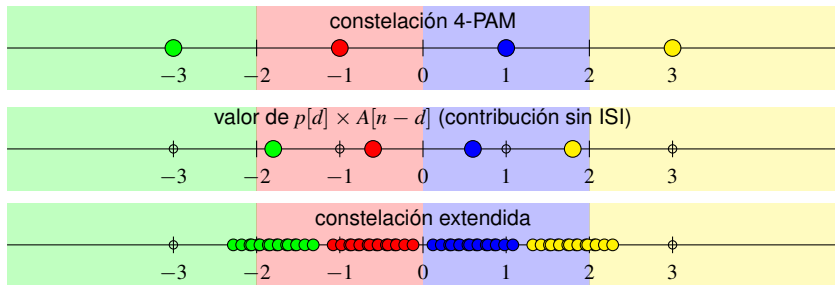
- Con ISI ($p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$): retardo $d = 2$



Efecto del valor del cursor $p[d]$: escalado

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] + 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$ ($p[d] = 0,6$)

- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$

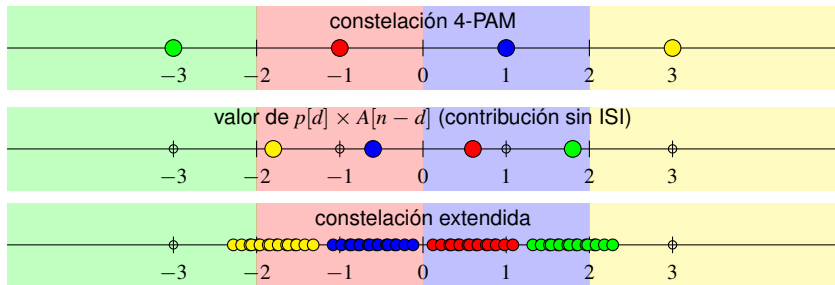


- El cursor establece un escalado general sobre la constelación recibida

Efecto del valor del cursor $p[d]$: signo del cursor

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] - 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$ ($p[d] = -0,6$)

- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$

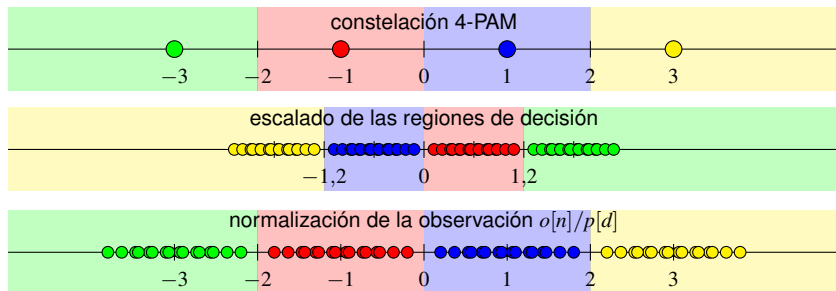


- Un signo negativo en el cursor “*invierte*” la constelación

Efecto del valor del cursor $p[d]$: opciones

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] - 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$ ($p[d] = -0,6$)
- Hay dos opciones para tener en cuenta el valor del cursor
 - ▶ Escalar las regiones de decisión de acuerdo al cursor (teniendo en cuenta el signo)
 - ▶ Normalización de la observación: dividir por el valor del cursor

- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$



Normalización de la observación: efecto sobre el ruido

- Normalización de la observación

$$q_n[n] = \frac{q[n]}{p[d]} = o_n[n] + z_n[n]$$

$$o_n[n] = \frac{o[n]}{p[d]} \quad z_n[n] = \frac{z[n]}{p[d]}$$

- Efecto sobre el ruido: modificación de su potencia (varianza)

$$\sigma_{z_n}^2 = \sigma_z^2 \times \frac{1}{|p[d]|^2}$$

- ▶ Importante para el cálculo de las probabilidades de error

- Cuantifica la distorsión de ISI introducida por un canal

$$\gamma_{ISI} = \frac{D_{pico}}{\eta} \geq 0$$

- ▶ D_{pico} : distorsión de pico para un retardo d

$$D_{pico} = \sum_{k \neq d} \frac{|p[k]|}{|p[d]|} \geq 0$$

Depende del canal discreto equivalente y del retardo para la decisión (d)

- ▶ η : eficiencia de la constelación

$$\eta = \frac{(d_{min}/2)}{|A|_{max}} \geq 0$$

Depende de la constelación utilizada en la transmisión

- ★ $|A|_{max}$: máximo valor del módulo de un símbolo de la constelación

$$|A|_{max} = \max\{|A[n]|\}$$

- ★ d_{min} : mínima distancia entre dos símbolos de la constelación

$$d_{min} = \min_{A[n] \neq A[k]} |A[n] - A[k]|$$

γ_{ISI} : efecto de la ISI sobre las regiones de decisión

- El nivel de ISI mide el efecto de la ISI en términos de como afecta a la constelación recibida (constelación extendida generada por la ISI)
- El valor $\gamma_{ISI} = 1$ indica el punto donde la constelación extendida alcanza los límites de la región de decisión original
 - ▶ $\gamma_{ISI} < 1$: ISI no mueve los símbolos fuera de su región de decisión
 - ★ Sin ruido, un detector símbolo a símbolo sin modificar no comete errores
 - ▶ $\gamma_{ISI} > 1$: ISI mueve los símbolos fuera de su región de decisión
 - ★ Un detector símbolo a símbolo sin modificar cometerá errores incluso sin ruido
 - ★ En este caso, es necesario redefinir las regiones de decisión teniendo en cuenta la ISI subyacente (para garantizar unas prestaciones máximas utilizando un detector símbolo a símbolo sin memoria)

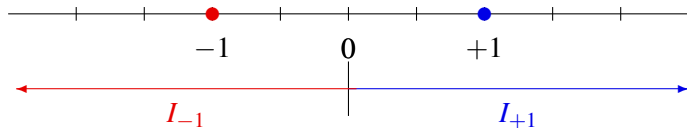
Ejemplo

- Se va a presentar el nivel de ISI para el siguiente caso

- ▶ Constelación transmitida: 2-PAM ($A[n] \in \{\pm 1\}$)

- ★ Eficiencia $\eta = 1$

- ★ Constelación y regiones de decisión originales (I_{+1}, I_{-1})



- ▶ Canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n - 1] + c \delta[n - 2]$$

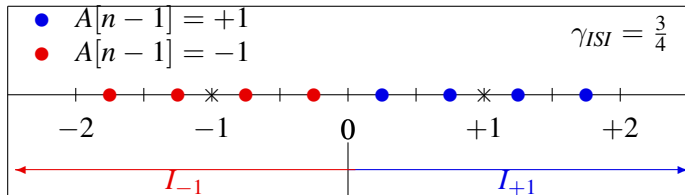
- ★ Se evaluarán varios valores de c : $c = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, and $c = \frac{3}{4}$
- En todos los casos, el retardo óptimo es $d = 1$.

- Puntos de la constelación extendida generada por la ISI

Gráfico con valores de $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n - 1] + c A[n - 2]$

Ejemplo - $c = \frac{1}{4}$

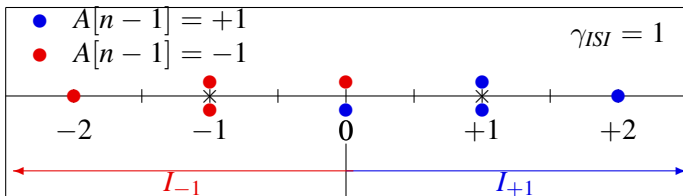
$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{7}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{5}{4}$
+1	-1	+1	$-\frac{1}{4}$
+1	-1	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	+1	+1	$+\frac{3}{4}$
-1	+1	-1	$+\frac{1}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{5}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$



- Los símbolos aun están todos dentro de su región de decisión

Ejemplo - $c = \frac{1}{2}$

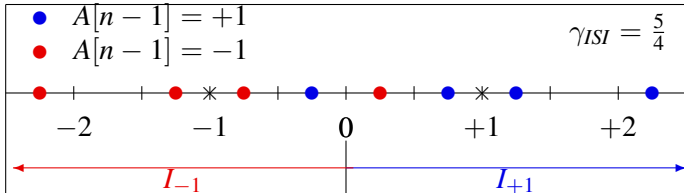
$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	+2
+1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	0
+1	-1	-1	-1
-1	+1	+1	+1
-1	+1	-1	0
-1	-1	+1	-1
-1	-1	-1	-2



- Algunos símbolos llegan al límite de la región de decisión

Ejemplo - $c = \frac{3}{4}$

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{9}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{3}{4}$
+1	-1	+1	$+\frac{1}{4}$
+1	-1	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	+1	+1	$+\frac{3}{4}$
-1	+1	-1	$-\frac{1}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{3}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{9}{4}$



- Algunos puntos están fuera de la región de decisión

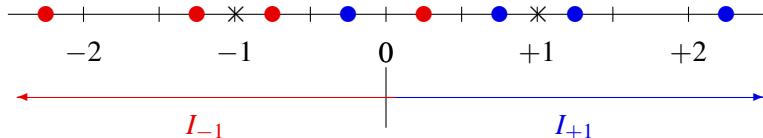
Redefinición de las regiones de decisión

- Se redefinen las regiones de decisión teniendo en cuenta la constelación extendida generada por la ISI

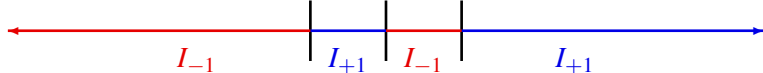
- $A[n-1] = +1$

- $A[n-1] = -1$

$$\gamma_{ISI} = \frac{5}{4}$$



RE-DEFINICIÓN DE REGIONES DE DECISIÓN



- La definición de las nuevas regiones depende de
 - ▶ Valores de la constelación extendida
 - ▶ Varianza de ruido

Redefinición de las regiones de decisión

- El diseño de las regiones de decisión depende de:
 - ▶ Probabilidad con la que se transmite cada símbolo $p_A(\mathbf{a}_i)$
 - ▶ Distribuciones condicionales de la observación para cada símbolo $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i)$

- Reglas de diseño: $\mathbf{q}_0 \in I_i$ si para todo $j \neq i$

- ▶ Caso general: **criterio *Maximum A Posteriori* (MAP)**

$$p_A(\mathbf{a}_i) f_{q|A}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) > p_A(\mathbf{a}_j) f_{q|A}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j)$$

- ▶ Símbolos equiprobables ($p_A(\mathbf{a}_i) = 1/M$): **criterio de *maxima verosimilitud* (ML)**

$$f_{q|A}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) > f_{q|A}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j)$$

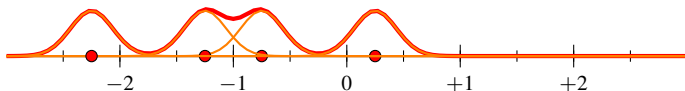
- ★ Con ruido gaussiano y $o[n] = A[n - d]$: **criterio de *mínima distancia euclídea***

$$d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i) < d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_j)$$

Distribuciones condicionales $f_{q|A}(q|a_i)$ con ruido gaussiano

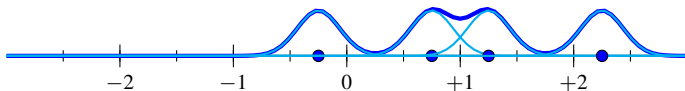
Distribución condicional para $A[n-1] = -1$

$$f_{q|A}(q|-1) = \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{9}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{5}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{3}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{1}{4}, \frac{N_0}{2}\right)$$



Distribución condicional para $A[n-1] = +1$

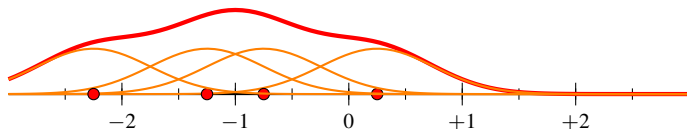
$$f_{q|A}(q|+1) = \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{9}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{5}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{3}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{1}{4}, \frac{N_0}{2}\right)$$



Distribuciones condicionales $f_{q|A}(q|a_i)$ con ruido gaussiano (II)

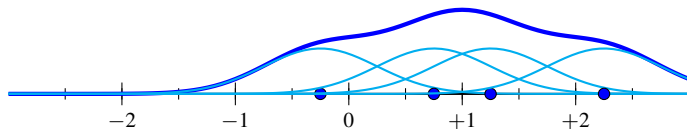
Distribución condicional para $A[n-1] = -1$

$$f_{q|A}(q|-1) = \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{9}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{5}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{3}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{1}{4}, \frac{N_0}{2}\right)$$



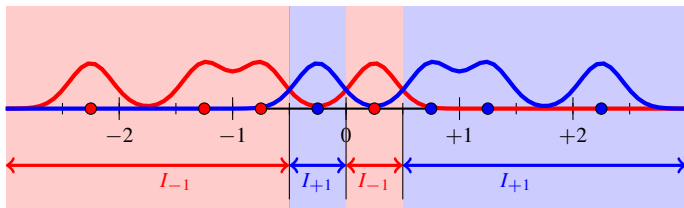
Distribución condicional para $A[n-1] = +1$

$$f_{q|A}(q|+1) = \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{9}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{5}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(+\frac{3}{4}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{N}\left(-\frac{1}{4}, \frac{N_0}{2}\right)$$

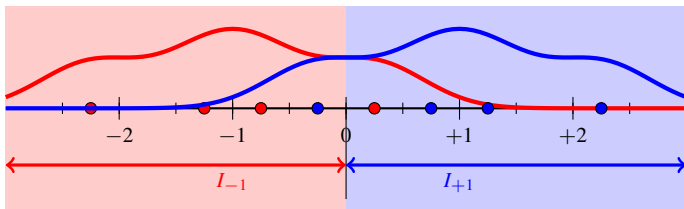


Distribuciones condicionales $f_{q|A}(q|a_i)$ con ruido gaussiano (III)

Ejemplo para varianza de ruido relativamente baja



Ejemplo para varianza de ruido relativamente alta



Relación SNR alta (bajo ruido) : aproximación para las regiones de decisión

- Bajo SNR alta (varianza de ruido baja) el diseño de las nuevas regiones de decisión basado en un criterio de mínima distancia de la observación con respecto a cualquier punto de la constelación extendida (asignando ese valor de observación a la región de decisión del símbolo que genera dicho punto) es una aproximación razonable
- Cuando la SNR disminuye (la varianza de ruido aumenta), en general las nuevas regiones de decisión tienden a las regiones originales diseñadas sin considerar la ISI

Detección de secuencias de máxima verosimilitud (MLSD)

- Detección óptima bajo ISI: MLSD
- Secuencia a detectar: L símbolos (M^L posibles secuencias)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Estadístico suficiente para la detección: $N_q = K_p + L$ observaciones

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q - 1]], \quad N_q = K_p + L$$

$$q[0] = p[0] A[0] + p[1] A[-1] + p[2] A[-2] + \dots + p[K_p] A[-K_p] + z[0]$$

$$q[1] = p[0] A[1] + p[1] A[0] + p[2] A[-1] + \dots + p[K_p] A[1 - K_p] + z[1]$$

...

$$q[L + K_p - 1] = p[0] A[L + K_p - 1] + p[1] A[L + K_p - 2] + \dots \\ + p[K_p - 1] A[L] + p[K_p] A[L - 1] + z[L + K_p - 1]$$

- Información adicional que es necesaria:

- ▶ Canal conocido con memoria K_p ($K_p + 1$ coeficientes)

$$\mathbf{p} = [p[0], p[1], \dots, p[K_p]]^T$$

- ▶ Los K_p símbolos anteriores y los K_p posteriores

$$A[-1], A[-2], \dots, A[-K_p] \text{ y } A[L], A[L+1], \dots, A[L+K_p-1]$$

★ Cabecera cíclica de K_p símbolos entre bloques de L símbolos de información

Secuencia de máxima verosimilitud

- M^L posibles secuencias

$$\mathbf{A}_i = [A_i[0], A_i[1], \dots, A_i[L-1]]^T, \quad i = 0, 1, \dots, M^L - 1$$

- ▶ Salida sin ruido generada por cada secuencia

$$o_i[n] = A_i[n] * p[n] = \sum_{k=0}^N p[k] A_i[n-k]$$

★ Se conoce si $A_i[n]$ y $p[n]$ son conocidos!!!

- Secuencia con la máxima verosimilitud:

- ▶ Secuencia

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_i = [A_i[0], A_i[1], \dots, A_i[L-1]]^T$$

que cumple la siguiente condición

$$f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{A}_i) \geq f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{A}_j), \quad j = 0, 1, \dots, M^L - 1, \quad \forall j \neq i.$$

Estimación de la secuencia de máxima verosimilitud

- Distribución condicional para cada observación: $q[n] = o_i[n] + z[n]$

$$f_{q[n]|A}(q[n]|A_i) = \mathcal{N}(o_i[n], \sigma_z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2} |q[n] - o_i[n]|^2\right\}$$

- ▶ Independencia condicional: $f_{q[n]|A}(q[n]|a_i)$ indep. de $f_{q[n]|A}(q[n]|a_k) \forall k \neq i$

- Verosimilitud para la secuencia de información A_i

$$f_{q|A}(q|A_i) = \prod_{n=0}^{N_q-1} f_{q[n]|A}(q[n]|a_i)$$

$$f_{q|A}(q|a_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma_z^2)^{N_q/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2\right\}$$

- Secuencia más verosímil (secuencia ML)

$$\hat{A} = \arg \min_{A_i} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2, \text{ con } o_i[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] A_i[n-k]$$

Detección de secuencia ML - Resumen

- Secuencia a detectar: L símbolos (M^L posibles soluciones)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Estadístico suficiente: $L + K_p$ observaciones

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q - 1]], \quad N_q = L + K_p$$

- Information adicional: canal y K_p símbolos anteriores y K_p posteriores

$$\mathbf{p} = [p[0], p[1], \dots, p[K_p]]^T$$

$$A[-1], A[-2], \dots, A[-K_p] \text{ y } A[L], A[L+1], \dots, A[L+K_p-1]$$

- Secuencia más verosímil

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{A_i} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2$$

$$A_i = [A_i[0], A_i[1], \dots, A_i[L-1]]^T \text{ y } o_i[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] A_i[n-k]$$

Ejemplo: 2-PAM $K_p = 1, L = 4$

- Constelación de símbolos: $A[n] \in \{\pm 1\}$
- Canal: $p[n] = \delta[n] + 0,5 \delta[n - 1], K_p = 1$
- Secuencia a estimar: $\mathbf{A} = [A[0], A[1], A[2], A[3]]$, $L = 4$
- Estadístico para la decisión ($L + K_p$): $\mathbf{q} = [q[0], q[1], q[2], q[3], q[4]]$

$$q[-1] = A[-1] + 0,5 A[-2] + z[-1]$$

$$q[0] = A[0] + 0,5 A[-1] + z[0]$$

$$q[1] = A[1] + 0,5 A[0] + z[1]$$

$$q[2] = A[2] + 0,5 A[1] + z[2]$$

$$q[3] = A[3] + 0,5 A[2] + z[3]$$

$$q[4] = A[4] + 0,5 A[3] + z[4]$$

$$q[5] = A[5] + 0,5 A[4] + z[5]$$

- Premisa: Se conoce el valor de $A[-1] = A[4] = +1$
- Problema: decidir la secuencia de 4 símbolos cuando la observación es

$$q[0] = +0,5 \quad q[1] = -0,4 \quad q[2] = +0,1 \quad q[3] = -1,7 \quad q[4] = +0,3$$

Detección por fuerza bruta: comparación de $q[n]$ con $o[n]$

$q[0]$	$q[1]$	$q[2]$	$q[3]$	$q[4]$
+0,5	-0,4	+0,1	-1,7	+0,3

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1], \quad \text{Métrica Verosimilitud} = \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

$A[0]$	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	$o[4]$	Métrica verosimilitud
+1	+1	+1	+1	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	18,25
-1	+1	+1	+1	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	+1,5	15,45
+1	-1	+1	+1	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	12,85
-1	-1	+1	+1	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	+1,5	14,05
+1	+1	-1	+1	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	11,25
-1	+1	-1	+1	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	+1,5	8,45
+1	-1	-1	+1	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	9,85
-1	-1	-1	+1	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	+1,5	11,05
+1	+1	+1	-1	+1,5	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	8,05
-1	+1	+1	-1	-0,5	+0,5	+1,5	-0,5	+0,5	5,25
+1	-1	+1	-1	+1,5	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	2,65
-1	-1	+1	-1	-0,5	-1,5	+0,5	-0,5	+0,5	3,85
+1	+1	-1	-1	+1,5	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	5,05
-1	+1	-1	-1	-0,5	+0,5	-0,5	-1,5	+0,5	2,25
+1	-1	-1	-1	+1,5	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	3,65
-1	-1	-1	-1	-0,5	-1,5	-1,5	-1,5	+0,5	4,85

Detección por fuerza bruta: comparación de $q[n]$ con $o[n]$

$q[0]$	$q[1]$	$q[2]$	$q[3]$	$q[4]$
-0,4	-1,4	+0,6	-0,4	+0,4

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1], \quad \text{Métrica Verosimilitud} = \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	$o[4]$	Métrica verosimilitud
+1	+1	+1	+1	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	17,65
-1	+1	+1	+1	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	+1,5	9,25
+1	-1	+1	+1	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	9,25
-1	-1	+1	+1	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	+1,5	4,85
+1	+1	-1	+1	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	15,25
-1	+1	-1	+1	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	+1,5	6,85
+1	-1	-1	+1	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	10,85
-1	-1	-1	+1	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	+1,5	6,45
+1	+1	+1	-1	+1,5	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	12,85
-1	+1	+1	-1	-0,5	+0,5	+1,5	-0,5	+0,5	4,45
+1	-1	+1	-1	+1,5	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	4,45
-1	-1	+1	-1	-0,5	-1,5	+0,5	-0,5	+0,5	0,05
+1	+1	-1	-1	+1,5	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	14,45
-1	+1	-1	-1	-0,5	+0,5	-0,5	-1,5	+0,5	6,05
+1	-1	-1	-1	+1,5	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	10,05
-1	-1	-1	-1	-0,5	-1,5	-1,5	-1,5	+0,5	5,65

Ejemplo: 2-PAM $K_p = 2, L = 4$

- Constelación: 2-PAM (BPSK): $A[n] \in \{\pm 1\}$
- Canal: $p[n] = \delta[n] + 0,5 \delta[n - 1] + 0,25 \delta[n - 2], K_p = 2$
- Secuencia a estimar: $\mathbf{A} = [A[0], A[1], A[2], A[3]]$, $L = 4$
- Estadístico para decisión ($L + K_p$): $\mathbf{q} = [q[0], q[1], q[2], q[3], q[4], q[5]]$

$$q[-1] = A[-1] + 0,5 A[-2] + 0,25 A[-3] + z[-1]$$

$$q[0] = A[0] + 0,5 A[-1] + 0,25 A[-2] + z[0]$$

$$q[1] = A[1] + 0,5 A[0] + 0,25 A[-1] + z[1]$$

$$q[2] = A[2] + 0,5 A[1] + 0,25 A[0] + z[2]$$

$$q[3] = A[3] + 0,5 A[2] + 0,25 A[1] + z[3]$$

$$q[4] = A[4] + 0,5 A[3] + 0,25 A[2] + z[4]$$

$$q[5] = A[5] + 0,5 A[4] + 0,25 A[3] + z[4]$$

$$q[6] = A[6] + 0,5 A[5] + 0,25 A[4] + z[5]$$

- Premisa: $A[-1] = A[-2] = +1$ and $A[4] = A[5] = +1$ conocidos
- Problema: decidir la secuencia ML cuando la observación es

$$q[0] = -0,24 \quad q[1] = -1,15 \quad q[2] = -1,75 \quad q[3] = +0,26 \quad q[4] = +1,27 \quad q[5] = +1,55$$

Detección por fuerza bruta: comparación de $q[n]$ con $o[n]$

$q[0]$	$q[1]$	$q[2]$	$q[3]$	$q[4]$	$q[5]$
-0,24	-1,15	-1,75	+0,26	+1,27	+1,55

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2], \quad \text{Métrica Verosimilitud} = \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	$o[4]$	$o[5]$	Métrica V.
+1	+1	+1	+1	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	27.1106
-1	+1	+1	+1	-0.25	0.75	1.25	1.75	1.75	1.75	15.1006
+1	-1	+1	+1	1.75	-0.25	0.75	1.25	1.75	1.75	12.2706
-1	-1	+1	+1	-0.25	-1.25	0.25	1.25	1.75	1.75	5.2606
+1	+1	-1	+1	1.75	1.75	-0.25	0.75	1.25	1.75	14.9006
-1	+1	-1	+1	-0.25	0.75	-0.75	0.75	1.25	1.75	4.8906
+1	-1	-1	+1	1.75	-0.25	-1.25	0.25	1.25	1.75	5.0606
-1	-1	-1	+1	-0.25	-1.25	-1.75	0.25	1.25	1.75	0.0506
+1	+1	+1	-1	1.75	1.75	1.75	-0.25	0.75	1.25	25.2406
-1	+1	+1	-1	-0.25	0.75	1.25	-0.25	0.75	1.25	13.2306
+1	-1	+1	-1	1.75	-0.25	0.75	-0.75	0.75	1.25	12.4006
-1	-1	+1	-1	-0.25	-1.25	0.25	-0.75	0.75	1.25	5.3906
+1	+1	-1	-1	1.75	1.75	-0.25	-1.25	0.25	1.25	18.0306
-1	+1	-1	-1	-0.25	0.75	-0.75	-1.25	0.25	1.25	8.0206
+1	-1	-1	-1	1.75	-0.25	-1.25	-1.75	0.25	1.25	10.1906
-1	-1	-1	-1	-0.25	-1.25	-1.75	-1.75	0.25	1.25	5.1806

Detección por fuerza bruta: comparación de $q[n]$ con $o[n]$

$q[0]$	$q[1]$	$q[2]$	$q[3]$	$q[4]$	$q[5]$
+1,55	-0,15	+0,85	+1,27	+1,65	+1,45

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2], \quad \text{Métrica Verosimilitud} = \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	$o[4]$	$o[5]$	Métrica V.
+1	+1	+1	+1	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	4.7904
-1	+1	+1	+1	-0.25	0.75	1.25	1.75	1.75	1.75	4.5404
+1	-1	+1	+1	1.75	-0.25	0.75	1.25	1.75	1.75	0.1604
-1	-1	+1	+1	-0.25	-1.25	0.25	1.25	1.75	1.75	4.9104
+1	+1	-1	+1	1.75	1.75	-0.25	0.75	1.25	1.75	5.3804
-1	+1	-1	+1	-0.25	0.75	-0.75	0.75	1.25	1.75	7.1304
+1	-1	-1	+1	1.75	-0.25	-1.25	0.25	1.25	1.75	5.7504
-1	-1	-1	+1	-0.25	-1.25	-1.75	0.25	1.25	1.75	12.5004
+1	+1	+1	-1	1.75	1.75	1.75	-0.25	0.75	1.25	7.6204
-1	+1	+1	-1	-0.25	0.75	1.25	-0.25	0.75	1.25	7.3704
+1	-1	+1	-1	1.75	-0.25	0.75	-0.75	0.75	1.25	4.9904
-1	-1	+1	-1	-0.25	-1.25	0.25	-0.75	0.75	1.25	9.7404
+1	+1	-1	-1	1.75	1.75	-0.25	-1.25	0.25	1.25	13.2104
-1	+1	-1	-1	-0.25	0.75	-0.75	-1.25	0.25	1.25	14.9604
+1	-1	-1	-1	1.75	-0.25	-1.25	-1.75	0.25	1.25	15.5804
-1	-1	-1	-1	-0.25	-1.25	-1.75	-1.75	0.25	1.25	22.3304

Estima eficiente - Definición de estado del sistema $\psi[n]$

- El cálculo de la verosimilitud para cada posible secuencia es ineficiente
- La salida sin ruido es una máquina de estados finitos

$$o[n] = A[n] p[0] + \sum_{k=1}^{K_p} p[k] A[n - k]$$

- Definición de estado en el instante discreto n
Conjunto de K_p símbolos previos (pasado) que contribuyen en $o[n]$

$$\psi[n] = [A[n - 1], A[n - 2], \dots, A[n - K_p]]^T$$

Número de posibles estados es M^{K_p}

- Dependencias

$$o[n] = f(A[n], \psi[n])$$

$$o[n] = g(\psi[n], \psi[n + 1])$$

$$\psi[n + 1] = f(\psi[n], A[n])$$

Diagrama de estados / de rejilla

Representación de la evolución del estado del sistema bajo ISI

$$\psi[n] = [A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K_p+1], A[n-K_p]]^T$$

$$\psi[n+1] = [A[n], A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K_p+1]]^T$$

- El diagrama depende de dos parámetros

- ▶ La constelación transmitida
- ▶ El canal discreto equivalente $p[n]$

- Hay M^{K_p} posibles estados

- M flechas salen de (y llegan a) cada estado

- ▶ Cada flecha está etiquetada con la siguiente etiqueta doble

Etiqueta : $A[n] \mid o[n]$

Diagrama : $\psi[n] \xrightarrow{A[n] \mid o[n]} \psi[n+1]$

- ★ $A[n]$: valor del símbolo actual que fuerza la transición
- ★ $o[n]$: salida sin ruido que se genera en ese caso
- ▶ Flechas que salen de un estado: una por cada posible valor de $A[n]$
- ▶ Flechas que llegan a un estado: todas con el mismo valor de $A[n]$

Diagrama de estados - Ejemplo A

- Diagrama para $A[n] \in \{\pm 1\}$ y $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$

- ▶ Estados en n y en $n+1$

$$\psi[n] = A[n-1], \quad \psi[n+1] = A[n]$$

- ▶ Salida sin ruido

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$$

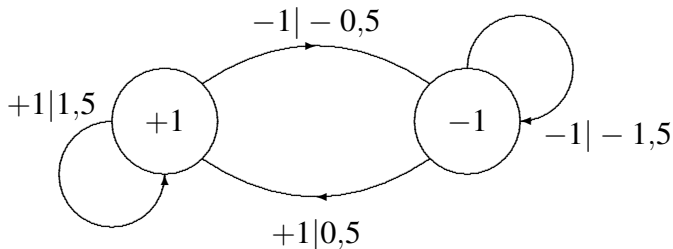


Diagrama de estados - Ejemplo B

• $A[n] \in \{\pm 1\}, p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$

▶ $o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2]$

▶ $\psi[n] = [A[n-1], A[n-2]]^T, \psi[n+1] = [A[n], A[n-1]]^T$
+1|1,75

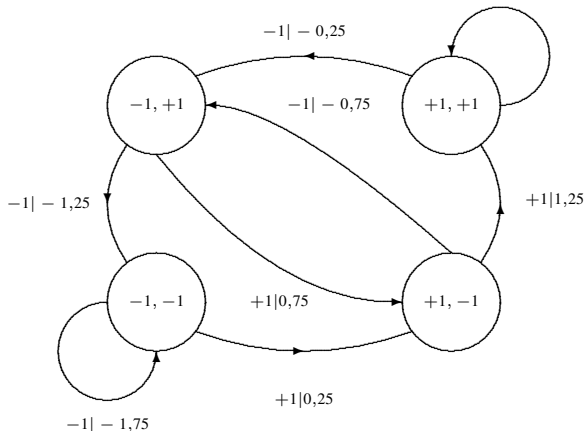


Diagrama de rejilla - Ejemplo A

- Representa la evolución del estado a lo largo del tiempo

$$\psi[n] \xrightarrow{A[n] | o[n]} \psi[n+1]$$

- Ejemplo: $A[n] \in \{\pm 1\}$, $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$
 - ▶ Definición de estado: $\psi[n] = A[n-1]$
 - ▶ Transición entre estados: $\psi[n] = A[n-1] \rightarrow \psi[n+1] = A[n]$
 - ▶ Etiquetas: $A[n]|o[n]$, siendo $o[n] = A[n] * p[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$

$$\psi[n] = A[n-1] \xrightarrow{A[n] | o[n]} \psi[n+1] = A[n]$$

$A[n]$	$A[n-1]$	$o[n]$
+1	+1	+1,5
-1	+1	-0,5
+1	-1	+0,5
-1	-1	-1,5

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$$

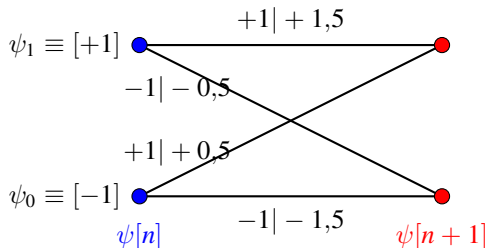


Diagrama de rejilla - Ejemplo B

2-PAM and $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1] + \frac{1}{4}\delta[n - 2]$ ($K_p = 2$)

$\psi[n] = [A[n - 1], A[n - 2]] \xrightarrow{A[n] | o[n]} \psi[n + 1] = [A[n], A[n - 1]]$

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n - 1] + \frac{1}{4}A[n - 2]$$

$A[n]$	$A[n - 1]$	$A[n - 2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	+1,75
-1	+1	+1	-0,25
+1	-1	+1	+0,75
-1	-1	+1	-1,25
+1	+1	-1	+1,25
-1	+1	-1	-0,75
+1	-1	-1	+0,25
-1	-1	-1	-1,75

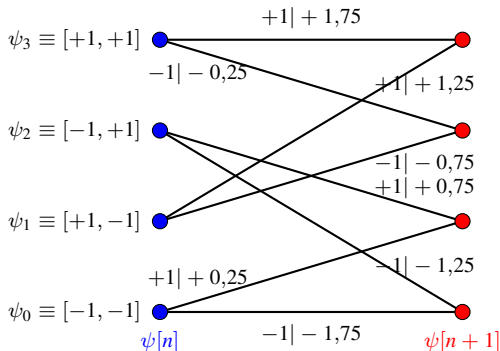


Diagrama de rejilla - Representación de una secuencia

$$\text{Ejemplo, 2-PAM : } \frac{n}{A[n]} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & +1 & -1 & -1 \end{array} \right.$$

- Una secuencia se puede representar como un camino a través de la rejilla
 - ▶ Ejemplo para $L = 4$ (Canal del Ejemplo A)
 - ▶ Cabecera periódica: $A[-1] = +1$, $A[4] = +1$
 - ▶ Estado inicial: $\psi[0] = +1$ / Estado final: $\psi[5] = +1$

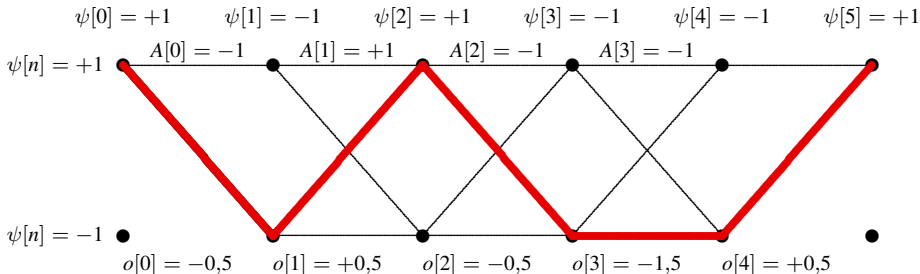
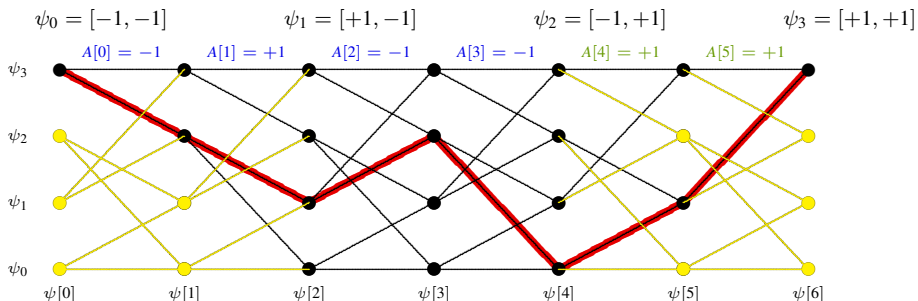


Diagrama de rejilla - Representación de una secuencia (II)

$$\text{Ejemplo, 2-PAM: } \frac{n}{A[n]} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & +1 & -1 & -1 \end{array} \right.$$

- Una secuencia se puede representar como un camino a través de la rejilla

- ▶ Ejemplo para $L = 4$ (Channel of Example B)
- ▶ Cabecera periódica: $A[-2] = A[-1] = +1$, $A[4] = A[5] = +1$
- ▶ Estado inicial: $\psi[0] = +1$ / Estado final: $\psi[6] = +1$



Detección por fuerza bruta: comparación de $q[n]$ con $o[n]$

$q[0]$	$q[1]$	$q[2]$	$q[3]$	$q[4]$
+0,5	-0,4	+0,1	-1,7	+0,3

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1], \quad \text{Métrica Verosimilitud} = \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

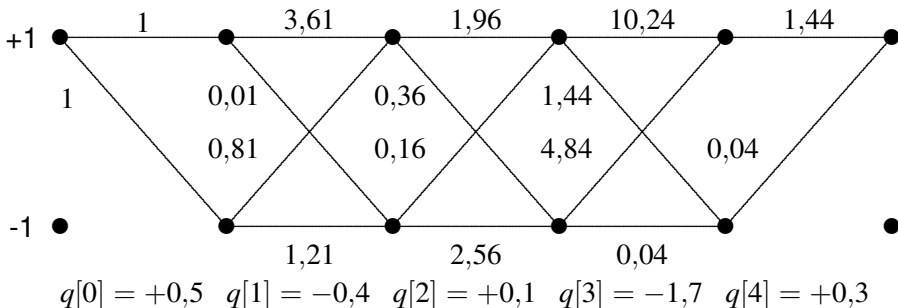
A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	$o[4]$	Métrica verosimilitud
+1	+1	+1	+1	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	18,25
-1	+1	+1	+1	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	+1,5	15,45
+1	-1	+1	+1	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	12,85
-1	-1	+1	+1	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	+1,5	14,05
+1	+1	-1	+1	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	11,25
-1	+1	-1	+1	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	+1,5	8,45
+1	-1	-1	+1	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	9,85
-1	-1	-1	+1	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	+1,5	11,05
+1	+1	+1	-1	+1,5	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	8,05
-1	+1	+1	-1	-0,5	+0,5	+1,5	-0,5	+0,5	5,25
+1	-1	+1	-1	+1,5	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	2,65
-1	-1	+1	-1	-0,5	-1,5	+0,5	-0,5	+0,5	3,85
+1	+1	-1	-1	+1,5	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	5,05
-1	+1	-1	-1	-0,5	+0,5	-0,5	-1,5	+0,5	2,25
+1	-1	-1	-1	+1,5	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	3,65
-1	-1	-1	-1	-0,5	-1,5	-1,5	-1,5	+0,5	4,85

Detección de secuencias ML usando la rejilla

- Secuencia más verosímil

$$\hat{A} = \arg \min_{a_i} \sum_{n=0}^{N+L-1} \left| q[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^N p[k] a_i[n-k]}_{o_i[n]} \right|^2$$

- ▶ Nuevas etiquetas en la rejilla - métrica de rama $|q[n] - o_i[n]|^2$
- ▶ Verosimilitud para una secuencia: suma de las métricas de rama de su camino a través de la rejilla

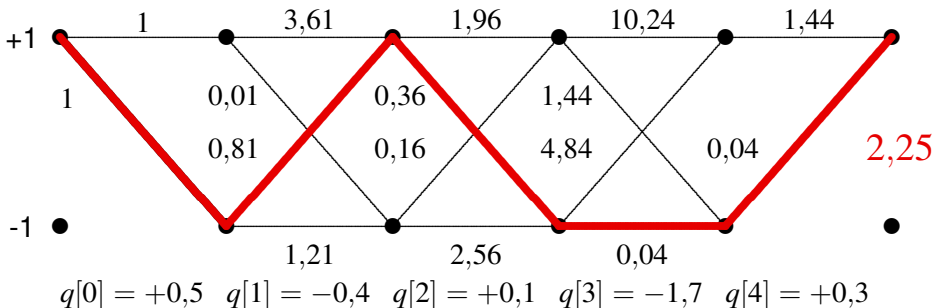


Detección de secuencias ML usando la rejilla

- Secuencia más verosímil

$$\hat{A} = \arg \min_{a_i} \sum_{n=0}^{N+L-1} \left| q[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^N p[k] a_i[n-k]}_{o_i[n]} \right|^2$$

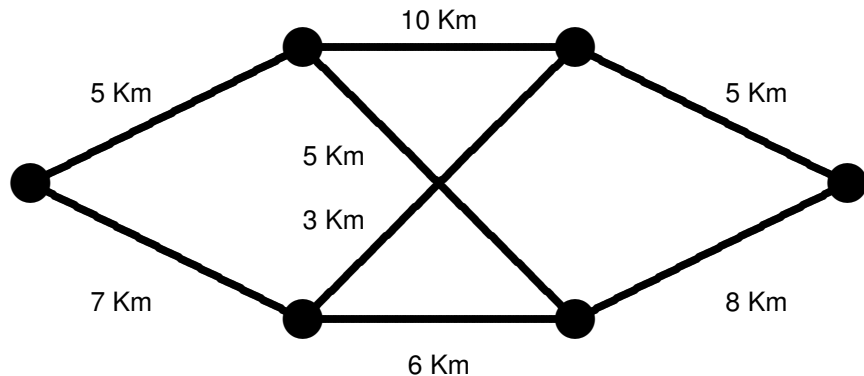
- ▶ Nuevas etiquetas en la rejilla - métrica de rama $|q[n] - o_i[n]|^2$
- ▶ Verosimilitud para una secuencia: suma de las métricas de rama de su camino a través de la rejilla



Obtención de la secuencia ML - Algoritmo de Viterbi

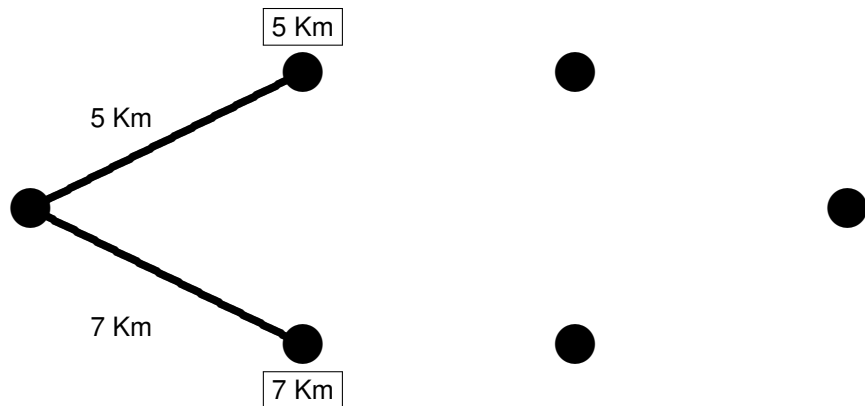
- Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML
 - ▶ Analíticamente, o mediante la métrica de camino de M^L caminos a través de $L + K_p$ transiciones en la rejilla
 - ▶ Computacionalmente costoso
- Obtención eficiente de la secuencia ML - Algoritmo de Viterbi
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla
- Principios básicos del algoritmo
 - ▶ Una rejilla consta de una serie de nodos (estados en nuestro problema) y ramas uniendo nodos
 - ▶ Un camino consiste en una secuencia conexa de ramas
 - ▶ Métrica de rama: define la métrica asociada a cada rama
 - ▶ Métrica de camino: suma de las métricas de rama del camino
 - ▶ Camino superviviente para un nodo: el camino que llega al nodo con la menor métrica
 - ▶ Métrica acumulada de un nodo: métrica de su camino superviviente

Algoritmo de Viterbi - Un ejemplo sencillo



- Objetivo: encontrar el camino más corto a través de una rejilla
- Un ejemplo para estas métricas de rama

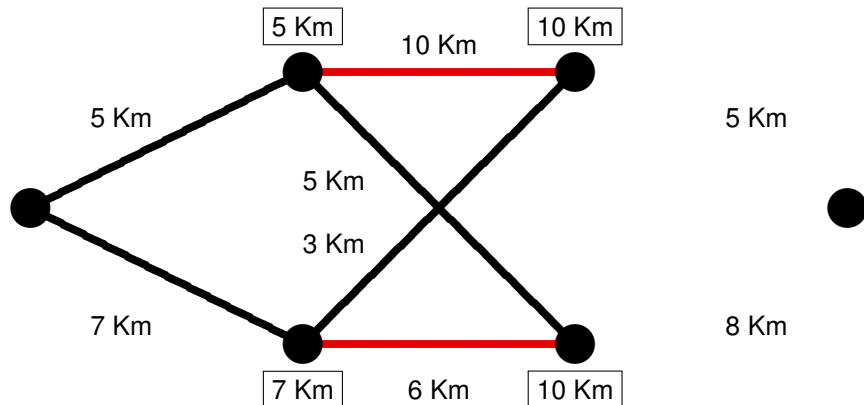
Algoritmo de Viterbi - Un ejemplo sencillo



● Primer paso

- ▶ Cálculo de métricas de rama que abren la rejilla
- ▶ Métrica acumulada de cada nodo se resalta con el recuadro

Algoritmo de Viterbi - Un ejemplo sencillo



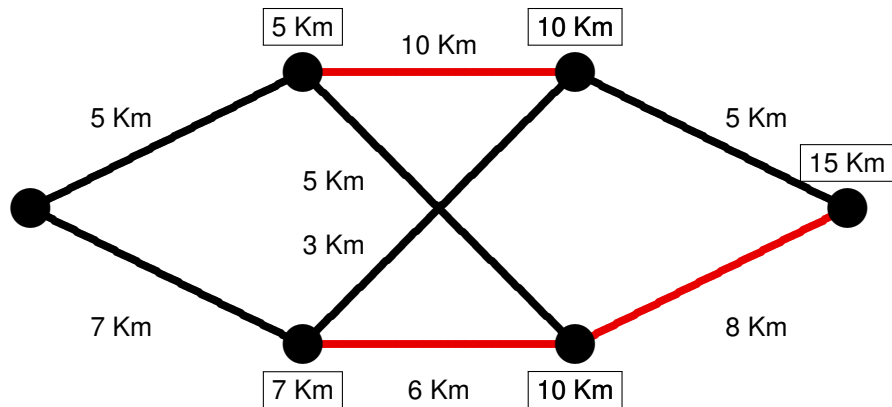
● Segundo paso

- ▶ Cálculo de los caminos supervivientes (en negro) para cada nodo en la siguiente etapa

★ Nodo superior: $7 \text{ Km} + 3 \text{ Km}$ es menor que $5 \text{ Km} + 10 \text{ Km}$

★ Nodo inferior: $5 \text{ Km} + 5 \text{ Km}$ es menor que $7 \text{ Km} + 6 \text{ Km}$

Algoritmo de Viterbi - Un ejemplo sencillo

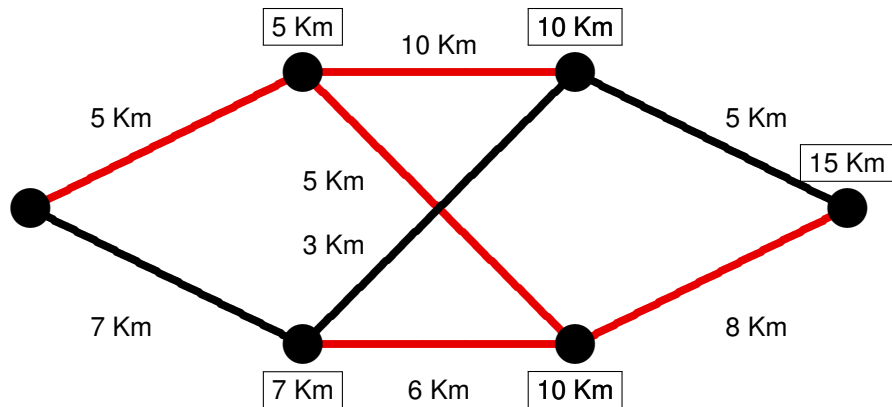


● Tercer paso

- ▶ Cálculo del camino superviviente en la última etapa (en negro)

★ $10 \text{ Km} + 5 \text{ Km}$ es menor que $10 \text{ Km} + 8 \text{ Km}$

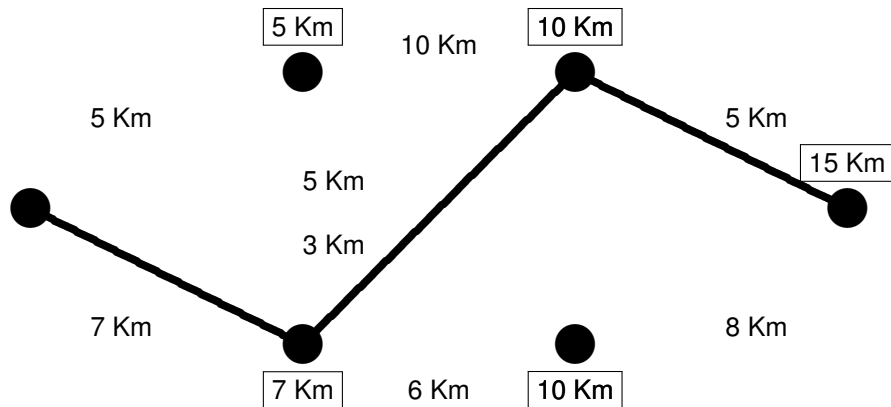
Algoritmo de Viterbi - Un ejemplo sencillo



● Cuarto paso

- ▶ Volver hacia atrás a través del camino superviviente
 - ★ Identificación del único camino superviviente (en negro)
 - ★ Se eliminan los enlaces que enlazaban caminos no supervivientes (rojo)

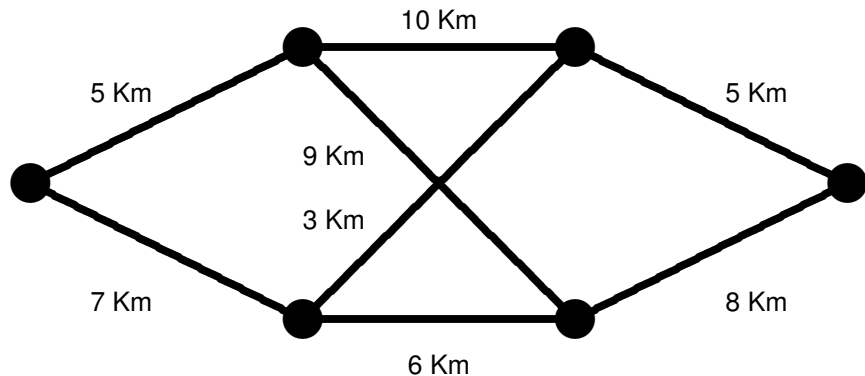
Algoritmo de Viterbi - Un ejemplo sencillo



- Resultado final

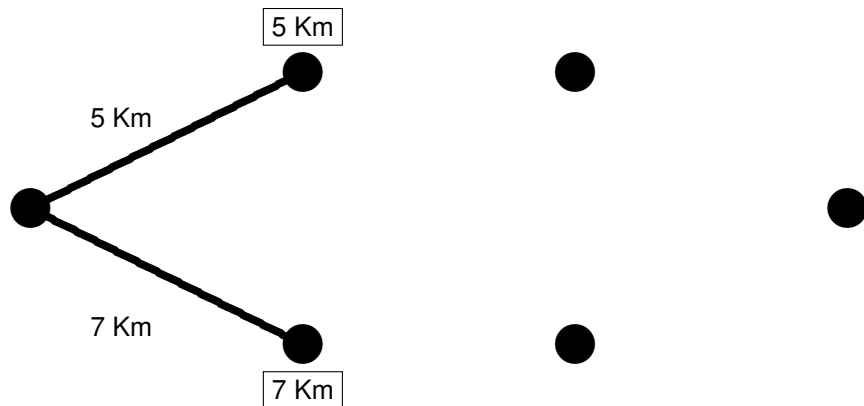
- ▶ Se ha identificado el camino más corto

Identificación parcial del camino más corto



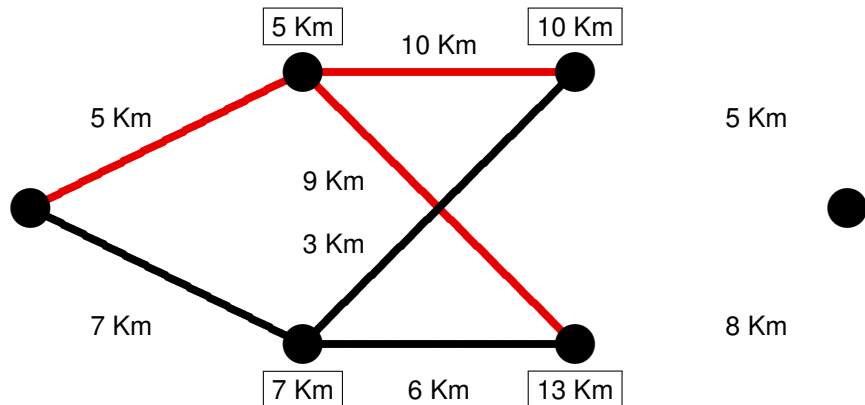
- En el ejemplo anterior, la identificación de cada rama del camino superviviente requiere llegar al nodo final
 - ▶ El camino parcial puede ser identificado antes bajo ciertas condiciones

Identificación parcial del camino más corto



- Primer paso
 - ▶ Cálculo de las métricas para abrir la rejilla

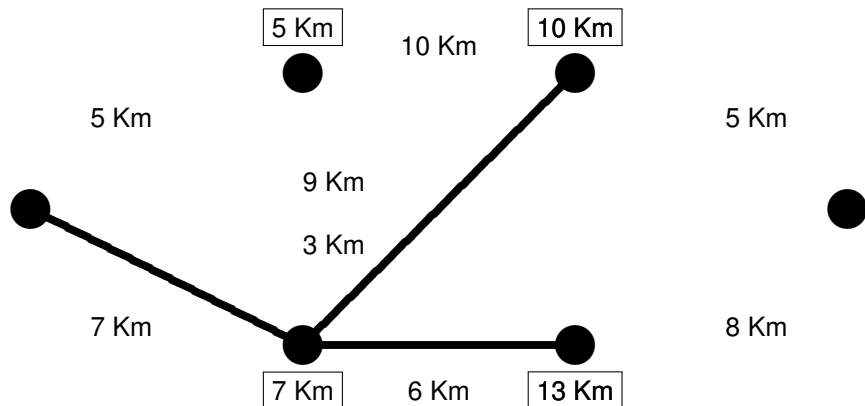
Identificación parcial del camino más corto



● Segundo paso

- ▶ Cálculo de los caminos supervivientes (en negro) para cada nodo en la siguiente etapa
 - ★ Upper node: $7 \text{ Km} + 3 \text{ Km}$ es menor que $5 \text{ Km} + 10 \text{ Km}$
 - ★ Lower node: $7 \text{ Km} + 6 \text{ Km}$ es menor que $5 \text{ Km} + 9 \text{ Km}$

Identificación parcial del camino más corto



- Los caminos supervivientes al llegar a esta etapa se han fundido en la etapa anterior (el nodo inferior, con métrica **7 Km**)
 - ▶ Se sabe cuál es la primera rama del camino más corto !!!
 - ▶ Se conoce sin necesidad de procesar la última etapa

Viterbi aplicado a un receptor con ISI - Ejemplo

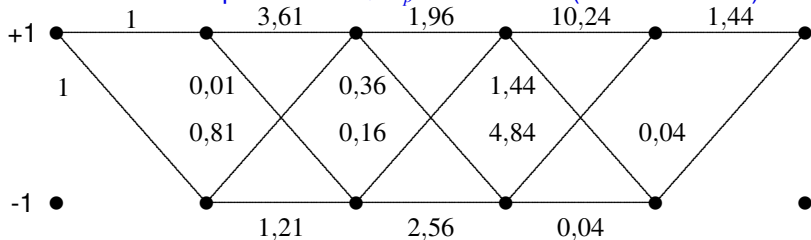
- Ejemplo anterior con los siguientes parámetros
 - ▶ Canal discreto equivalente de memoria $K_p = 1$
 - ▶ Secuencia a decodificar de longitud $L = 4$ símbolos

$$A[0], A[1], A[2], A[3]$$

- ▶ Cabecera cíclica de K_p símbolos para determinar estado inicial ($\psi[0]$) y final ($\psi[K_p + L]$)

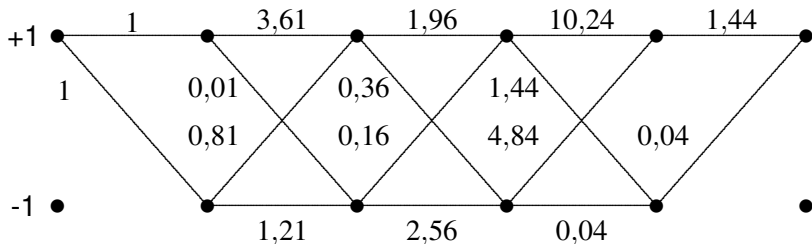
$$\text{Cabecera } A[-1] = A[L] = +1 \rightarrow \psi[0] = +1, \psi[5] = +1$$

- ▶ Métricas de rama resultantes para la observación ($|q[n] - o[n]|^2$)
 - ★ Se procesan $L + K_p$ transiciones (observaciones)



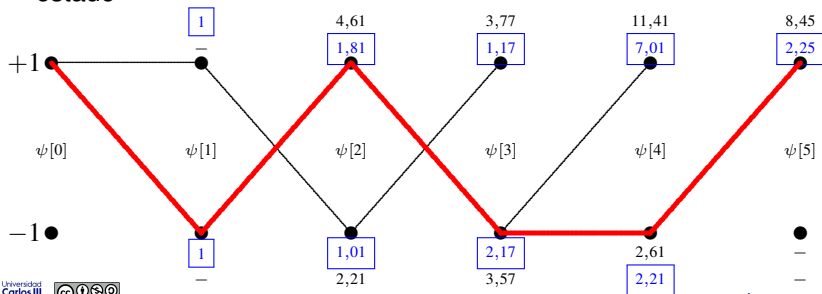
$$q[0] = +0,5 \quad q[1] = -0,4 \quad q[2] = +0,1 \quad q[3] = -1,7 \quad q[4] = +0,3$$

Viterbi aplicado a un receptor con ISI - Ejemplo (II)

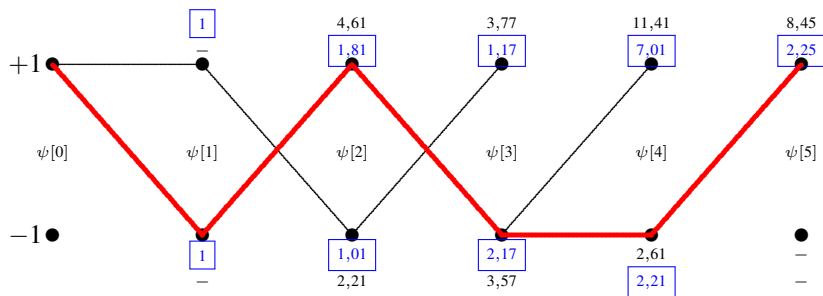


$$q[0] = +0,5 \quad q[1] = -0,4 \quad q[2] = +0,1 \quad q[3] = -1,7 \quad q[4] = +0,3$$

- Aplicación: caminos supervivientes y métricas acumuladas en cada estado



Viterbi aplicado a un receptor con ISI - Ejemplo (III)



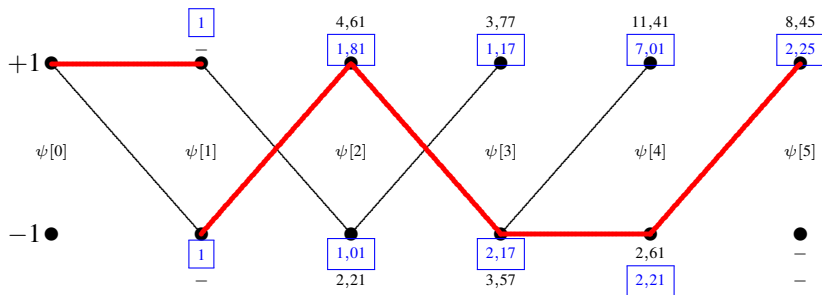
- Para cada estado, se resalta la métrica de su camino superviviente
- El camino asociado a la secuencia de máxima verosimilitud se resalta en rojo
 - ▶ Este camino está asociado a la siguiente secuencia transmitida

$$\hat{A}[0] = -1, \hat{A}[1] = +1, \hat{A}[2] = -1, \hat{A}[3] = -1$$

Algoritmo de Viterbi truncado

- Para asegurar la decodificación de L símbolos de datos
 - ▶ Estados inicial y final conocidos
 - ★ Cabecera cíclica de K_p símbolos conocidos entre L símbolos de datos (define estado inicial y final)
 - ★ Procesado de $L + K_p$ transiciones de la rejilla para decodificar L símbolos de datos
 - ★ Restricciones de memoria y de retardo
- Decisión de $A[n]$ antes de procesar $L + K_p$ observaciones requiere la fusión de los caminos supervivientes en $\psi[n + 1]$
 - ▶ Introducción de un retraso arbitrario
 - ▶ Necesidad de almacenamiento de información
- Algoritmo truncado con profundidad de truncado d
 - ▶ Tras procesar la observación en el instante discreto n (transición de $\psi[n]$ a $\psi[n + 1]$ en la rejilla), se toma la decisión para el símbolo $A[n - d]$
 - ★ Elección del símbolo asociado al camino superviviente con mínima métrica acumulada

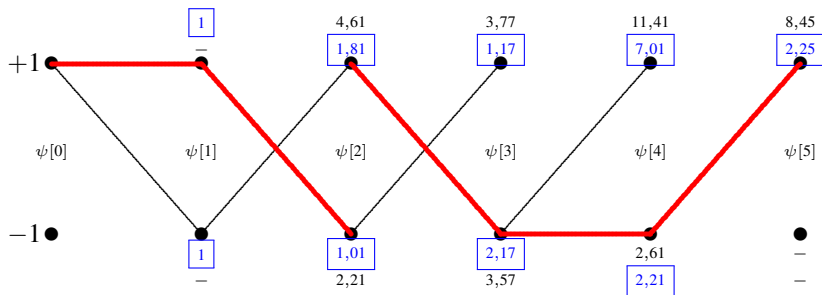
Viterbi truncado - Ejemplo $d = 2$



- Las métricas de los caminos supervivientes son iguales
- La secuencia decidida puede no ser la más verosímil
 - Se producen discontinuidades sobre la rejilla

$$\hat{A}[0] = +1, \hat{A}[1] = +1, \hat{A}[2] = -1, \hat{A}[3] = -1$$

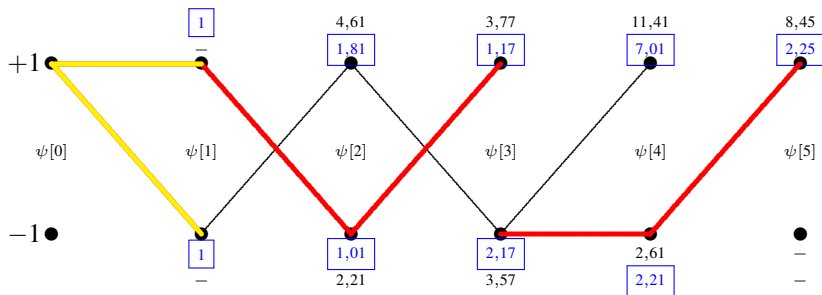
Viterbi truncado - Ejemplo $d = 1$



- Las métricas de los caminos supervivientes son iguales
- La secuencia decidida puede no ser la más verosímil
 - ▶ Se producen discontinuidades sobre la rejilla

$$\hat{A}[0] = +1, \hat{A}[1] = -1, \hat{A}[2] = -1, \hat{A}[3] = -1$$

Viterbi truncado - Ejemplo $d = 0$



- Las métricas de los caminos supervivientes son iguales
- La secuencia decidida puede no ser la más verosímil
 - Se producen discontinuidades sobre la rejilla

$$\hat{A}[0] = \pm 1, \hat{A}[1] = -1, \hat{A}[2] = +1, \hat{A}[3] = -1$$

NOTA: Para $\hat{A}[0]$ se puede tomar cualquier decisión (elección aleatoria)

Detección de una secuencia de L símbolos

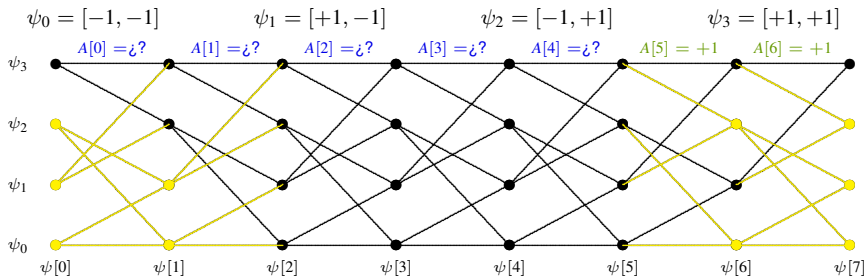
- Ejemplo para $K_p = 2$, $L = 5$ y 2-PAM $A[n] \in \{\pm 1\}$

Secuencia $A[0], A[1], A[2], A[3], A[4]$

- ▶ Cabecera: $[+1, +1]$

$$A[-2] = A[-1] = A[5] = A[6] = +1$$

- ★ Estado inicial y final: $\psi[0] = \psi[K_p + L] = [+1, +1] \equiv \psi_3$



Detección de una secuencia de L símbolos

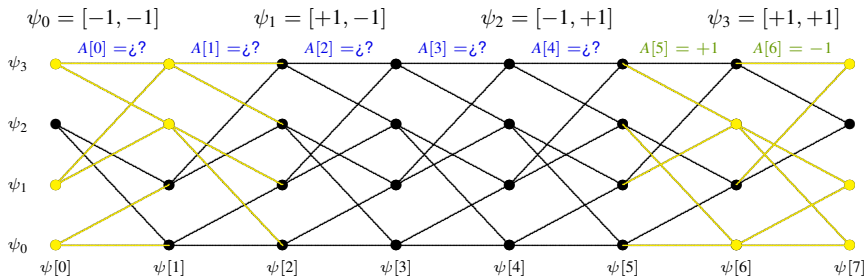
- Ejemplo para $K_p = 2$, $L = 5$ y 2-PAM $A[n] \in \{\pm 1\}$

Secuencia $A[0], A[1], A[2], A[3], A[4]$

- ▶ Cabecera: $[+1, -1]$

$A[-2] = +1, A[-1] = -1, A[5] = +1, A[6] = -1$

- ★ Estado inicial y final: $\psi[0] = \psi[K_p + L] = [-1, +1] \equiv \psi_2$



Detección de una secuencia de L símbolos

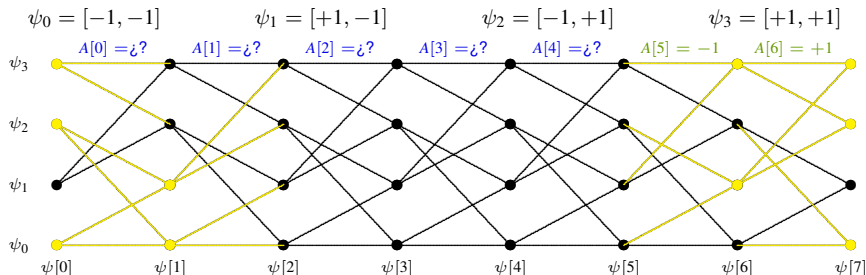
- Ejemplo para $K_p = 2$, $L = 5$ y 2-PAM $A[n] \in \{\pm 1\}$

Secuencia $A[0], A[1], A[2], A[3], A[4]$

- ▶ Cabecera: $[-1, +1]$

$A[-2] = -1, A[-1] = +1, A[5] = -1, A[6] = +1$

- ★ Estado inicial y final: $\psi[0] = \psi[K_p + L] = [+1, -1] \equiv \psi_1$



Detección de una secuencia de L símbolos

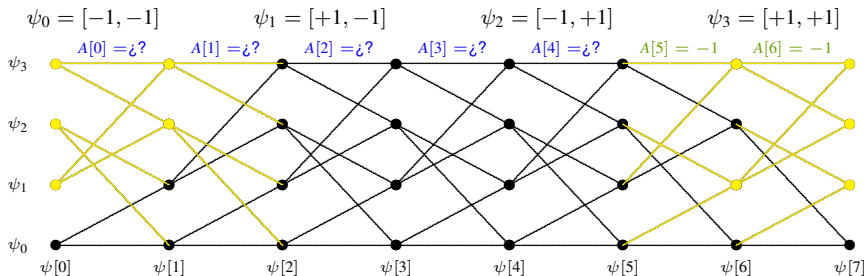
- Ejemplo para $K_p = 2$, $L = 5$ y 2-PAM $A[n] \in \{\pm 1\}$

Secuencia $A[0], A[1], A[2], A[3], A[4]$

- ▶ Cabecera: $[-1, -1]$

$$A[-2] = A[-1] = A[5] = A[6] = -1$$

- ★ Estado inicial y final: $\psi[0] = \psi[K_p + L] = [-1, -1] \equiv \psi_0$



Detección de una secuencia de L símbolos

- Ejemplo para $K_p = 3$, $L = 5$ y 2-PAM $A[n] \in \{\pm 1\}$

Secuencia $A[0], A[1], A[2], A[3], A[4]$

- ▶ Cabecera: $[+1, +1, +1]$

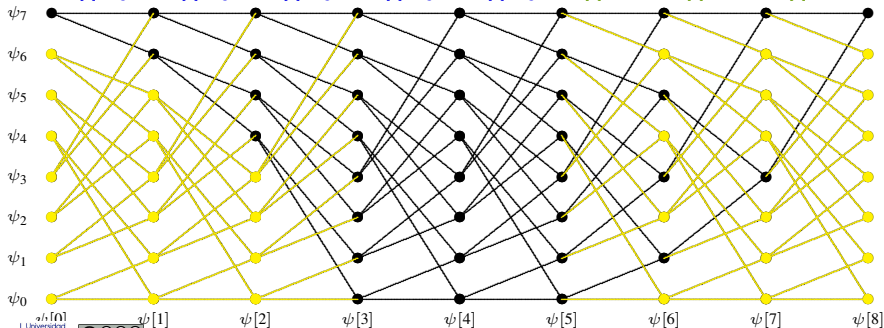
$$A[-3] = A[-2] = A[-1] = A[5] = A[6] = A[7] + 1$$

★ Estado inicial y final: $\psi[0] = \psi[K_p + L] = [+1, +1, +1] \equiv \psi_7$

$$\psi_4 = [-1, -1, +1] \quad \psi_5 = [+1, -1, +1] \quad \psi_6 = [-1, +1, +1] \quad \psi_7 = [+1, +1, +1]$$

$$\psi_0 = [-1, -1, -1] \quad \psi_1 = [+1, -1, -1] \quad \psi_2 = [-1, +1, -1] \quad \psi_3 = [+1, +1, -1]$$

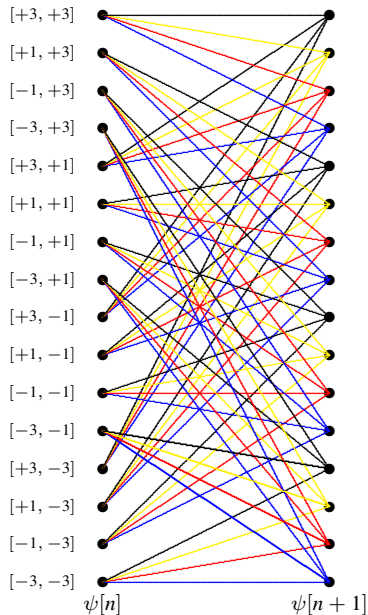
$$A[0] = \text{¿?} \quad A[1] = \text{¿?} \quad A[2] = \text{¿?} \quad A[3] = \text{¿?} \quad A[4] = \text{¿?} \quad A[5] = +1 \quad A[6] = +1 \quad A[7] = +1$$



Rejilla para $M = 4$ en canal con memoria $K_p = 2$

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+3	+3	+3	a_0
+1	+3	+3	a_1
-1	+3	+3	a_2
-3	+3	+3	a_3
+3	+1	+3	b_0
+1	+1	+3	b_1
-1	+1	+3	b_2
-3	+1	+3	b_3
+3	-1	+3	c_0
+1	-1	+3	c_1
-1	-1	+3	c_2
-3	-1	+3	c_3
+3	-3	+3	d_0
+1	-3	+3	d_1
-1	-3	+3	d_2
-3	-3	+3	d_3
+3	+3	+1	e_0
+1	+3	+1	e_1
-1	+3	+1	e_2
-3	+3	+1	e_3
+3	+1	+1	f_0
+1	+1	+1	f_1
-1	+1	+1	f_2
-3	+1	+1	f_3
+3	-1	+1	g_0
+1	-1	+1	g_1
-1	-1	+1	g_2
-3	-1	+1	g_3
+3	-3	+1	h_0
+1	-3	+1	h_1
-1	-3	+1	h_2
-3	-3	+1	h_3

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+3	+3	-1	i_0
+1	+3	-1	i_1
-1	+3	-1	i_2
-3	+3	-1	i_3
+3	+1	-1	j_0
+1	+1	-1	j_1
-1	+1	-1	j_2
-3	+1	-1	j_3
+3	-1	-1	k_0
+1	-1	-1	k_1
-1	-1	-1	k_2
-3	-1	-1	k_3
+3	-3	-1	l_0
+1	-3	-1	l_1
-1	-3	-1	l_2
-3	-3	-1	l_3
+3	+3	-3	m_0
+1	+3	-3	m_1
-1	+3	-3	m_2
-3	+3	-3	m_3
+3	+1	-3	n_0
+1	+1	-3	n_1
-1	+1	-3	n_2
-3	+1	-3	n_3
+3	-1	-3	o_0
+1	-1	-3	o_1
-1	-1	-3	o_2
-3	-1	-3	o_3
+3	-3	-3	p_0
+1	-3	-3	p_1
-1	-3	-3	p_2
-3	-3	-3	p_3



Prestaciones - Suceso erróneo

- Un camino a través de la rejilla representa una secuencia transmitida
 - ▶ Se puede describir un camino (secuencia) mediante una secuencia de estados

$$\psi = [\psi[0], \psi[1], \psi[2], \dots]$$

- Suceso erróneo: secuencia decidida distinta a la transmitida
 - ▶ Representación sobre la rejilla: dos caminos diferentes

$$\mathbf{e} = (\psi, \hat{\psi})$$

- Un suceso erróneo tiene asociados dos parámetros
 - ▶ Longitud del suceso ($\ell(\mathbf{e})$)
 - ▶ Número de símbolos erróneos asociados, o peso del suceso ($w(\mathbf{e})$)

- Definición de longitud del suceso $\ell(\mathbf{e})$

Número de estados en que difieren ambos caminos: ejemplo, $\ell(\mathbf{e}) = \ell$

- ▶ $\psi[m] = \hat{\psi}[m]$
- ▶ $\psi[m + \ell + 1] = \hat{\psi}[m + \ell + 1]$
- ▶ $\psi[n] \neq \hat{\psi}[n]$ para $m < n \leq m + \ell$

- El número de errores del suceso, $w(\mathbf{e})$, cumplirá $1 \leq w(\mathbf{e}) \leq \ell$

Probabilidad de que la secuencia detectada sea errónea

- Aproximación

$$P\{\text{secuencia errónea}\} \approx k Q\left(\frac{D_{min}/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ▶ D_{min} : distancia euclídea mínima entre las salidas sin ruido de dos secuencias distintas $\{o_i[n], o_j[n]\}$, $j \neq i$
 - ▶ k : máximo número de secuencias cuyas salidas sin ruido están a distancia D_{min} de la salida sin ruido de una secuencia dada
- Cuando L crece, k crece, u por tanto la probabilidad de que la secuencia detectada sea errónea tiende a infinito cuando L tiende a infinito

Probabilidad de error de símbolo (P_e)

- En general es más útil estimar la probabilidad de error de símbolo

$$P_e = P\{\hat{A}[n] \neq A[n]\}$$

- Definición para detección de secuencias ML

$$P_e = \frac{1}{L} \sum_{e \in \mathcal{E}} w(e) P\{e\}$$

- ▶ $P\{e\}$: probabilidad de suceso erróneo e
- ▶ \mathcal{E} : conjunto de todos los posibles sucesos erróneos

- Probabilidad del suceso erróneo $e = (\psi, \hat{\psi})$

$$P\{e\} = P\{\hat{\psi}|\psi\} P\{\psi\}$$

- ▶ Difícil de evaluar \rightarrow Cotas y aproximaciones para P_e

Cotas y aproximación para P_e

- Cotas para la probabilidad de error

$$k_2 Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \leq P_e \leq k_1 Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ▶ k_2 porcentaje de caminos en la rejilla que tienen asociado un suceso erróneo a distancia D_{min} . Siempre cumple $k_2 \leq 1$
- ▶ k_1 promedia el número de errores producido por sucesos erróneos a mínima distancia $k_1 = \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_{min}} w(\mathbf{e}) P\{\psi\}$

- Aproximación for P_e

$$P_e \approx k_0 Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ▶ k_0 : constante tal que $k_2 \leq k_0 \leq k_1$
- ▶ Ambos k_1 y k_2 son independientes de la varianza de ruido

Distancia euclídea mínima respecto a la salida sin ruido de una secuencia dada

- Secuencia de referencia $\mathbf{A} = \mathbf{A}_i$

$$D_{min}(\mathbf{A}_i) = \min_{\substack{\mathbf{A}_j \\ j \neq i}} \sqrt{\sum_{n=0}^{N_q-1} \left| o_i[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^K p[k] A_j[n-k]}_{o_j[n]} \right|^2}$$

- Se puede encontrar a través de la rejilla (Viterbi)
 - ▶ Métrica de rama: $|o_i[n] - o_j[n]|^2$
 - ▶ Referencia: $o_i[n]$
 - ▶ El algoritmo busca la secuencia con salida sin ruido a mínima distancia

Distancia mínima D_{min}

- Valor mínimo de $D_{min}(A_i)$, para $i = 0, 1, \dots, M^L - 1$

$$D_{min} = \min_{\substack{A_i, A_j \\ j \neq i}} \sqrt{\sum_{n=0}^{N_q-1} \left| \sum_{k=0}^{K_p} p[k] (A_i[n-k] - A_j[n-k]) \right|^2}$$

i.e., la mínima distancia entre salidas sin ruido producidas por dos secuencias distintas

- Si el diagrama de rejilla es simétrico
 - ▶ Cálculo respecto a una única secuencia

- En general, D_{min} depende del término $\left| \sum_{k=0}^{K_p} p[k] (A_i[n-k] - A_j[n-k]) \right|^2$

- ▶ Salida sin ruido si se transmite una secuencia $\xi[n] = A_i[n] - A_j[n]$

- Rejilla definida sobre la constelación de error

$$\xi[n] = A_i[n] - A_j[n]$$

- ▶ Referencia: secuencia de todo ceros (asociada a una detección sin errores)

Ejemplo A ($L = 4, K_p = 1$)

$q[0]$	$q[1]$	$q[2]$	$q[3]$	$q[4]$
+0,5	-0,4	+0,1	-1,7	+0,3

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1], \quad \text{Métrica de Verosimilitud} = \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	$o[4]$	M. Verosimilitud
+1	+1	+1	+1	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	18,25
-1	+1	+1	+1	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	+1,5	15,45
+1	-1	+1	+1	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	12,85
-1	-1	+1	+1	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	+1,5	14,05
+1	+1	-1	+1	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	11,25
-1	+1	-1	+1	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	+1,5	8,45
+1	-1	-1	+1	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	9,85
-1	-1	-1	+1	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	+1,5	11,05
+1	+1	+1	-1	+1,5	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	8,05
-1	+1	+1	-1	-0,5	+0,5	+1,5	-0,5	+0,5	5,25
+1	-1	+1	-1	+1,5	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	2,65
-1	-1	+1	-1	-0,5	-1,5	+0,5	-0,5	+0,5	3,85
+1	+1	-1	-1	+1,5	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	5,05
-1	+1	-1	-1	-0,5	+0,5	-0,5	-1,5	+0,5	2,25
+1	-1	-1	-1	+1,5	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	3,65
-1	-1	-1	-1	-0,5	-1,5	-1,5	-1,5	+0,5	4,85

Ejemplo A - Cálculo D_{min} por fuerza bruta

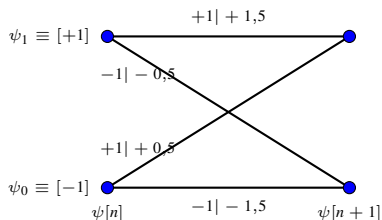
i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	5	5	14	5	10	14	23	5	10	10	19	14	19	23	32
1	5	0	6	5	10	5	15	14	10	5	11	10	19	14	24	23
2	5	6	0	5	6	7	5	10	10	11	5	10	15	16	14	19
3	14	5	5	0	15	6	10	5	19	10	10	5	24	15	19	14
4	5	10	6	15	0	5	5	14	6	11	7	16	5	10	10	19
5	10	5	7	6	5	0	6	5	11	6	8	7	10	5	11	10
6	14	15	5	10	5	6	0	5	15	16	6	11	10	11	5	10
7	23	14	10	5	14	5	5	0	24	15	11	6	19	10	10	5
8	5	10	10	19	6	11	15	24	0	5	5	14	5	10	14	23
9	10	5	11	10	11	6	16	15	5	0	6	5	10	5	15	14
10	10	11	5	10	7	8	6	11	5	6	0	5	6	7	5	10
11	19	10	10	5	16	7	11	6	14	5	5	0	15	6	10	5
12	14	19	15	24	5	10	10	19	5	10	6	15	0	5	5	14
13	19	14	16	15	10	5	11	10	10	5	7	6	5	0	6	5
14	23	24	14	19	10	11	5	10	14	15	5	10	5	6	0	5
15	32	23	19	14	19	10	10	5	23	14	10	5	14	5	5	0

Valores de $\sum_{n=0}^{N_q-1} |o_i[n] - o_j[n]|^2$

$$D_{min}(A_0) = \sqrt{5}$$

$$D_{min} = \sqrt{5}$$

Cálculo de D_{min} usando la rejilla - Ejemplo A



Cabecera define estado inicial/final: [+1]

Secuencia de referencia: $o_{ref}[n]$

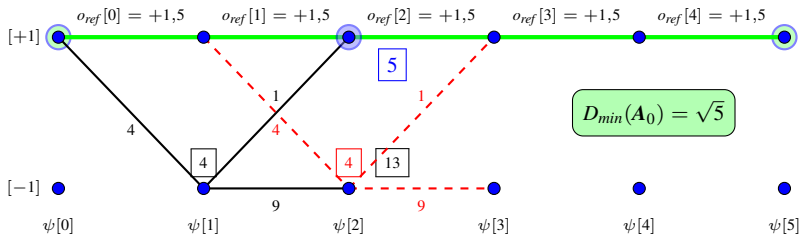
D_{min} : métrica de rama

$$|o_{ref}[n] - o_i[n]|^2$$

$$|+1,5 - (-0,5)|^2 = 4$$

$$|+1,5 - (+0,5)|^2 = 1$$

$$|+1,5 - (-1,5)|^2 = 9$$



$$D_{min}(A_0) = \sqrt{5}$$

Rejilla sobre constelación de error - Ejemplo

- Constelación de error para 2-PAM

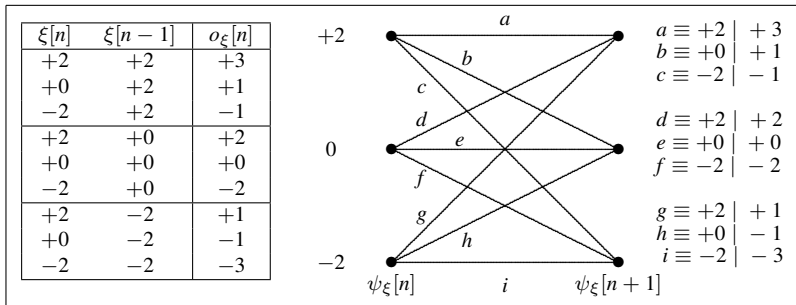
$$\xi[n] \in \{+2, 0, -2\}$$

- Salidas sin ruido para $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n - 1]$

$$o_{\xi}[n] = p[n] * \xi[n] = \xi[n] + \frac{1}{2} \xi[n - 1]$$

- Estados sobre la constelación de errores

$$\psi_{\xi}[n] = \xi[n - 1], \quad \psi_{\xi}[n + 1] = \xi[n]$$



Ejemplo B ($L = 4, K_p = 2$)

$q[0]$	$q[1]$	$q[2]$	$q[3]$	$q[4]$	$q[5]$
-0,24	-1,15	-1,75	+0,26	+1,27	+1,55

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2], \quad \text{Métrica de Verosimilitud} = \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	$o[4]$	$o[5]$	M. Verosimilitud
+1	+1	+1	+1	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	27.1106
-1	+1	+1	+1	-0.25	0.75	1.25	1.75	1.75	1.75	15.1006
+1	-1	+1	+1	1.75	-0.25	0.75	1.25	1.75	1.75	12.2706
-1	-1	+1	+1	-0.25	-1.25	0.25	1.25	1.75	1.75	5.2606
+1	+1	-1	+1	1.75	1.75	-0.25	0.75	1.25	1.75	14.9006
-1	+1	-1	+1	-0.25	0.75	-0.75	0.75	1.25	1.75	4.8906
+1	-1	-1	+1	1.75	-0.25	-1.25	0.25	1.25	1.75	5.0606
-1	-1	-1	+1	-0.25	-1.25	-1.75	0.25	1.25	1.75	0.0506
+1	+1	+1	-1	1.75	1.75	1.75	-0.25	0.75	1.25	25.2406
-1	+1	+1	-1	-0.25	0.75	1.25	-0.25	0.75	1.25	13.2306
+1	-1	+1	-1	1.75	-0.25	0.75	-0.75	0.75	1.25	12.4006
-1	-1	+1	-1	-0.25	-1.25	0.25	-0.75	0.75	1.25	5.3906
+1	+1	-1	-1	1.75	1.75	-0.25	-1.25	0.25	1.25	18.0306
-1	+1	-1	-1	-0.25	0.75	-0.75	-1.25	0.25	1.25	8.0206
+1	-1	-1	-1	1.75	-0.25	-1.25	-1.75	0.25	1.25	10.1906
-1	-1	-1	-1	-0.25	-1.25	-1.75	-1.75	0.25	1.25	5.1806

Ejemplo B - Cálculo de D_{min} por fuerza bruta

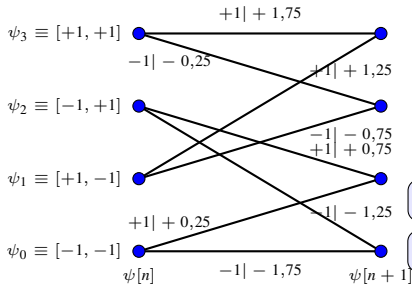
i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	5,25	5,25	15,5	5,25	12,5	15,5	27,75	5,25	10,5	12,5	22,75	15,5	22,75	27,75	40
1	5,25	0	5,5	5,25	8,5	5,25	13,75	15,5	10,5	5,25	12,75	12,5	18,75	15,5	26	27,75
2	5,25	5,5	0	5,25	5,5	7,75	5,25	12,5	8,5	8,75	5,25	10,5	13,75	16	15,5	22,75
3	15,5	5,25	5,25	0	13,75	5,5	8,5	5,25	18,75	8,5	10,5	5,25	22	13,75	18,75	15,5
4	5,25	8,5	5,5	13,75	0	5,25	5,25	15,5	5,5	8,75	7,75	16	5,25	10,5	12,5	22,75
5	12,5	5,25	7,75	5,5	5,25	0	5,5	5,25	12,75	5,5	10	7,75	10,5	5,25	12,75	12,5
6	15,5	13,75	5,25	8,5	5,25	5,5	0	5,25	13,75	12	5,5	8,75	8,5	8,75	5,25	10,5
7	27,75	15,5	12,5	5,25	15,5	5,25	5,25	0	26	13,75	12,75	5,5	18,75	8,5	10,5	5,25
8	5,25	10,5	8,5	18,75	5,5	12,75	13,75	26	0	5,25	5,25	15,5	5,25	12,5	15,5	27,75
9	10,5	5,25	8,75	8,5	8,75	5,5	12	13,75	5,25	0	5,5	5,25	8,5	5,25	13,75	15,5
10	12,5	12,75	5,25	10,5	7,75	10	5,5	12,75	5,25	5,5	0	5,25	5,5	7,75	5,25	12,5
11	22,75	12,5	10,5	5,25	16	7,75	8,75	5,5	15,5	5,25	5,25	0	13,75	5,5	8,5	5,25
12	15,5	18,75	13,75	22	5,25	10,5	8,5	18,75	5,25	8,5	5,5	13,75	0	5,25	5,25	15,5
13	22,75	15,5	16	13,75	10,5	5,25	8,75	8,5	12,5	5,25	7,75	5,5	5,25	0	5,5	5,25
14	27,75	26	15,5	18,75	12,5	12,75	5,25	10,5	15,5	13,75	5,25	8,5	5,25	5,5	0	5,25
15	40	27,75	22,75	15,5	22,75	12,5	10,5	5,25	27,75	15,5	12,5	5,25	15,5	5,25	5,25	0

Valores de $\sum_{n=0}^{N_q-1} |o_i[n] - o_j[n]|^2$

$$D_{min}(A_0) = \sqrt{5,25}$$

$$D_{min} = \sqrt{5,25}$$

Calculo de D_{min} usando la rejilla - Ejemplo B



Cabecera: define estados inicial y final: $[+1, +1]$

Secuencia de referencia: $o_{ref}[n]$

D_{min} : métrica de rama

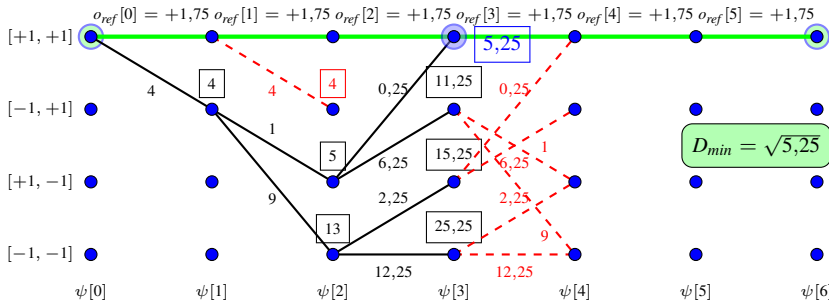
$$|o_{ref}[n] - o_i[n]|^2$$

$$|+1,75 - (+1,25)|^2 = 0,25$$

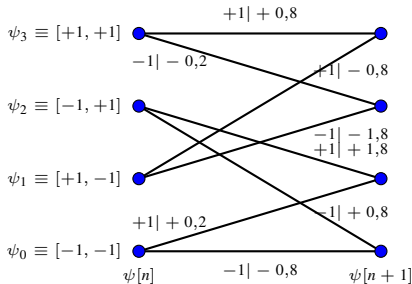
$$|+1,75 - (+0,25)|^2 = 2,25$$

$$|+1,75 - (-0,75)|^2 = 6,25$$

$$|+1,75 - (-1,75)|^2 = 12,25$$



Calculating D_{min} using the trellis - Exercise 2



Cabecera: define estados inicial y final: $[+1, +1]$

Secuencia de referencia: $o_{ref}[n]$

D_{min} : métrica de rama

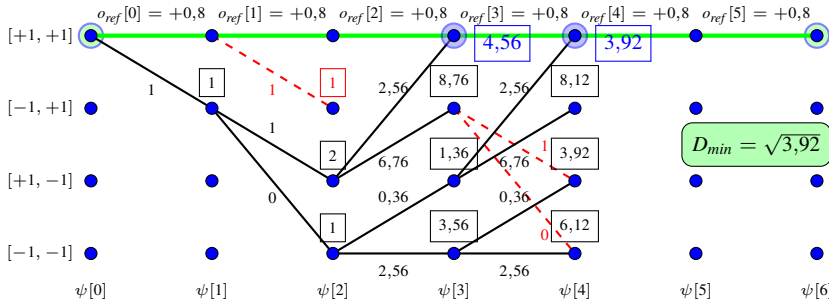
$$|o_{ref}[n] - o_i[n]|^2$$

$$|+0,8 - (-0,8)|^2 = 2,56$$

$$|+0,8 - (+0,2)|^2 = 0,36$$

$$|+0,8 - (-1,8)|^2 = 6,76$$

$$|+0,8 - (-0,8)|^2 = 2,56$$



$$D_{min} = \sqrt{3,92}$$

Cota del filtro adaptado

- Cota de la probabilidad de error de símbolo bajo ISI

$$P_e \geq k Q \left(\frac{d_{min}}{2} \frac{\|\mathbf{p}\|}{\sqrt{N_0/2}} \right)$$

- ▶ k : máximo número de símbolos a mínima distancia d_{min} de otro símbolo en la constelación

- ▶ Se define la norma del canal: $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{K_p} |p[k]|^2}$

- Esto permite acotar D_{min}

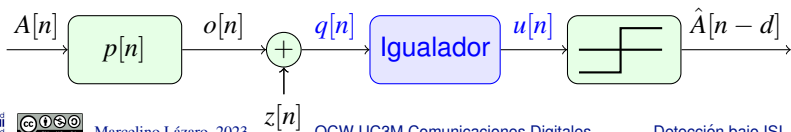
$$D_{min} \leq d_{min} \|\mathbf{p}\|$$

- El incremento en relación señal a ruido requerido para obtener la misma P_e que en un sistema sin ISI es

$$\Delta \text{SNR} = 20 \log_{10} \frac{d_{min} \|\mathbf{p}\|}{D_{min}}$$

Igualadores de canal

- Solución más simple para un receptor bajo ISI
 - ▶ Detector símbolo a símbolo sin memoria (retardo óptimo + re-definición de regiones de decisión)
 - ▶ Prestaciones bajas para altos niveles de ISI
- Solución óptima
 - ▶ Detección de secuencias de máxima verosimilitud (MLSD)
 - ▶ Complejidad exponencial del algoritmo de Viterbi
 - ★ Hay M^{K_p} estados
 - ★ De cada estado salen M flechas, una por cada posible valor de $A[n]$
 - ★ A cada estado llegan M flechas, todas generadas por el mismo valor de $A[n]$
- Solución sub-óptima
 - ▶ Igualador de canal + decisor símbolo a símbolo
 - ▶ Prestaciones peores que MLSD, pero mejor que detector símbolo a símbolo sin memoria



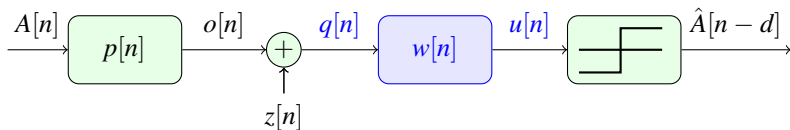
Estructuras de igualación

- Igualador lineal
 - ▶ LTE: *Linear Transversal Equalizer*
 - ▶ El igualador es un filtro lineal
- Igualador con realimentación de decisiones
 - ▶ DFE: *Decision Feedback Equalizer*
- Otras estructuras no lineales
 - ▶ Igualador bayesiano
 - ▶ Redes neuronales (MLP, RBF, etc.)
 - ▶ Máquinas de vectores soporte
 - ▶ ...

Igualación no ciega / ciega

- Igualación no ciega
 - ▶ Se conoce el canal $p[n]$, o
 - ▶ Se dispone de una secuencia de referencia
- Igualación ciega
 - ▶ No se conoce el canal
 - ▶ No se dispone de una secuencia de referencia
 - ▶ Se dispone de información estadística sobre $A[n]$

Igualación no ciega lineal



- Se asume que se conoce el canal $p[n]$ (no ciega)
- Estructura del igualador (lineal)
 - ▶ Sistema lineal causal de $K_w + 1$ coeficientes (memoria K_w)

$$u[n] = q[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k] q[n-k] = \mathbf{w}^T \mathbf{q}_n$$

- Obtención de los coeficientes del igualador: criterios de igualación
 - ▶ Forzador de ceros (ZF)
 - ▶ Mínimo error cuadrático medio (MMSE)

Igualador lineal

- Filtro lineal causal de $K_w + 1$ coeficientes, $w[n]$

$$u[n] = q[n] * w[n] = (A[n] * p[n] + z[n]) * w[n]$$

$$u[n] = A[n] * p[n] * w[n] + z[n] * w[n]$$

- Definición: respuesta conjunta de canal e igualador

$$c[n] = w[n] * p[n], \quad 0 \leq n \leq K_p + K_w$$

Respuesta causal de duración $K_p + K_w + 1$ coeficientes (memoria $K_p + K_w$ coeficientes)

$$u[n] = A[n] * c[n] + z[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{K_p+K_w} c[k] A[n-k] + \sum_{k=0}^{K_w} w[k] z[n-k]$$

- Salida del igualador - retardo d en la decisión

$$u[n] = \underbrace{c[d] A[n-d]}_{\text{término deseado}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq d}}^{K_p+K_w} c[k] A[n-k]}_{\text{ISI residual}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{K_w} w[k] z[n-k]}_{\text{ruido filtrado } z'[n]}$$

Criterios de diseño para igualadores lineales

- Criterio forzador de ceros (ZF, *Zero Forcing*)
 - ▶ Busca eliminar la interferencia intersimbólica (ISI)
 - ▶ Matemáticamente, se busca una respuesta conjunta canal-igualador

$$c[n] = p[n] * w[n] = \delta[n - d], \text{ para un retardo arbitrario } d$$

Se fuerzan ceros en la respuesta conjunta canal-igualador

- Criterio de mínimo error cuadrático medio (MMSE, *Minimum Mean Squared Error*)
 - ▶ Busca minimizar el efecto conjunto de ISI y ruido filtrado
 - ▶ Error a la salida del igualador para retardo d

$$e_d[n] = u[n] - A[n - d]$$

Diferencia entre la salida del igualador y el símbolo a decidir (considerando d)

- ▶ Matemáticamente, MMSE minimiza la energía del error de observación $e_d[n]$

$$\text{mín } E[|e_d[n]|^2]$$

Diseño del igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Respuesta ideal (en el dominio temporal)

$$c[n] = p[n] * w[n] = \delta[n - d]$$

- El igualador ideal se puede obtener en el dominio frecuencial

$$C(e^{j\omega}) = P(e^{j\omega}) W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} \rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}$$

- Selección del retardo d

- ▶ Descomposición de $P(z)$ en sistemas de fase máxima y mínima

$$P(z) = P_0 \underbrace{\prod_{k=1}^{K_1} (1 - \alpha_k z^{-1})}_{P_{min}(z)} \underbrace{\prod_{\ell=1}^{K_2} (1 - \beta_\ell z^{-1})}_{P_{max}(z)}$$

$$|\alpha_k| < 1, \text{ para } 1 \leq k \leq K_1, \quad |\beta_\ell| > 1, \text{ para } 1 \leq \ell \leq K_2$$

- ▶ $P_{min}(z)$, sistema de fase mínima, tiene respuesta estable causal
- ▶ La inversa estable de $P_{max}(z)$, sistema de fase máxima, es no causal
- ▶ Se elige d para tener una respuesta estable causal

Diseño del igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Procedimiento para obtener el igualador ZF sin limitaciones
 - ▶ Obtener la respuesta inversa (en frecuencia) del canal $p[n]$

$$W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- ▶ Se obtiene su correspondiente respuesta en el tiempo

$$w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \left\{ W^{(0)}(e^{j\omega}) \right\}$$

- ★ Si es una respuesta no causal, se evalúa la longitud del término no causal, i.e., se busca el máximo valor de k tal que $w^{(0)}[-k] \neq 0$
- ★ Entonces, se toma como retardo $d = k$
- ▶ La respuesta estable causal del igualador es entonces

$$w[n] = w^{(0)}[n - d]$$

Principal inconveniente del igualador ZF

- El igualador ZF invierte la respuesta en frecuencia del canal
 - ▶ El igualador afecta a la señal transmitida, pero también al ruido
- Densidad espectral de potencia del ruido filtrado $z'[n]$

$$S_{z'}^{ZF}(e^{j\omega}) = S_z(e^{j\omega}) |W(e^{j\omega})|^2 = \frac{\sigma_z^2}{|P(e^{j\omega})|^2}$$

- Potencia de la secuencia de ruido $z'[n]$ es

$$\sigma_{z'}^2|_{ZF} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{z'}^{ZF}(e^{j\omega}) d\omega = \sigma_z^2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2} d\omega$$

- ▶ Se puede producir una amplificación del ruido si el canal tiene fuertes atenuaciones en algunas frecuencias

NOTA: Matemáticamente, se tiene potencia infinita si el canal tiene algún cero espectral

Diseño del igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- Ecuaciones de la respuesta conjunta canal-igualador

$$c[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] w[n - k]$$

- ▶ Hay $K_p + K_w + 1$ ecuaciones, una por cada valor de n

- Sistema de ecuaciones

$$c[0] = w[0] p[0]$$

$$c[1] = w[0] p[1] + w[1] p[0]$$

$$c[2] = w[0] p[2] + w[1] p[1] + w[2] p[0]$$

$$c[3] = w[0] p[3] + w[1] p[2] + w[2] p[1] + w[3] p[0]$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$c[K_p + K_w] = w[K_w] p[K_p]$$

Diseño del igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes (II)

- Sistema de ecuaciones para la respuesta conjunta canal-igualador

$$c[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] w[n - k]$$

- ▶ Hay $K_p + K_w + 1$ ecuaciones, una para cada valor de n

- Sistema de ecuaciones en notación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c[0] \\ c[1] \\ \vdots \\ c[K_p + K_w] \end{bmatrix}}_{\mathbf{c} \equiv (K_p + K_w + 1) \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} p[0] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p[1] & p[0] & 0 & \cdots & 0 \\ p[2] & p[1] & p[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p[K_p] & p[K_p - 1] & p[K_p - 2] & \cdots & 0 \\ 0 & p[K_p] & p[K_p - 1] & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p[K_p] & \cdots & p[0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p[K_p] \end{bmatrix}}_{\mathbf{P} \equiv (K_p + K_w + 1) \times (K_w + 1)} \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[K_w] \end{bmatrix}}_{\mathbf{w} \equiv (K_w + 1) \times 1}$$

Matriz \mathbf{P} : llamada MATRIZ DE CANAL o MATRIZ DE CONVOLUCION DEL CANAL

Diseño del igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes (III)

- Respuesta conjunta deseada para retardo d

$$c[n] = \delta[n - d] \rightarrow \mathbf{c}_d = \underbrace{[00 \cdots 0]}_d 10 \cdots 0]^T$$

Sistema de ecuaciones para esta respuesta ideal $\mathbf{c}_d = \mathbf{P} \mathbf{w}$

- Es un sistema de ecuaciones sobredeterminado
 - ▶ $K_p + K_w + 1$ ecuaciones (una para cada n en $c[n]$)
 - ▶ $K_w + 1$ incógnitas (una por coeficiente del igualador $w[n]$)
- Solución de mínimos cuadrados

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \arg \min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{c}_d - \mathbf{P} \mathbf{w}\|^2 = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d$$

- ▶ La solución está dada por la pseudo-inversa de Moore-Penrose

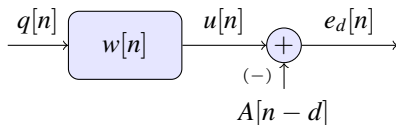
$$\mathbf{P}^\# = (\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H$$

La solución obtenida no cumple todas las ecuaciones, i.e.

$$\text{Respuesta conjunta } \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w}_d^{ZF} \neq \mathbf{c}_d$$

Hay ISI residual debido a la limitación en el número de coeficientes

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes



- Secuencia de error a la salida del igualador para retardo d

$$e_d[n] = u[n] - A[n-d]$$

- MMSE - filtrado lineal óptimo : minimización de $E [|e_d[n]|^2]$

- Solución MMSE: Principio de ortogonalidad

- ▶ El error $e_d[n]$ es ortogonal a la salida del sistema $u[n]$
- ▶ El error $e_d[n]$ es ortogonal a la entrada del sistema $q[n]$

$$E[\underbrace{(u[n] - A[n-d])}_{e_d[n]} q^*[\ell]] = 0, \forall \ell$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$E[A[n-d] q^*[\ell]] = E[u[n] q^*[\ell]], \forall \ell$$

Principio de ortogonalidad - primer término

● Asunciones iniciales

- ▶ Secuencia de datos $A[n]$ blanca: $R_A[k] = E_s \delta[k]$
- ▶ Secuencia de ruido $z[n]$ blanca: $R_z[k] = \sigma_z^2 \delta[k]$
- ▶ Secuencias de datos y ruido, $A[n]$ y $z[n]$, independientes

Esto implica que $R_{A,z}[k] = E[A[n+k] z^*[n]] = 0, \forall k$

● Desarrollo del primer término del principio de ortogonalidad

$$\begin{aligned} E[A[n-d] q^*[\ell]] &= E \left[A[n-d] \left(\sum_{k=0}^{K_p} p[k] A[\ell-k] + z[\ell] \right)^* \right] \\ &= \sum_{k=0}^{K_p} p^*[k] \underbrace{E[A[n-d] A^*[\ell-k]]}_{R_A[n-d-\ell+k]} \\ &\quad + \underbrace{E[A[n-d] z^*[\ell]]}_{R_{A,z}[n-d-\ell]} \\ &= E_s p^*[\ell + d - n] \end{aligned}$$

Note que como $R_A[k] = E_s \delta[k]$, $R_A[n-d-\ell+k] \neq 0$ sólo para $k = \ell + d - n$

Principio de ortogonalidad - segundo término

$$\begin{aligned} E [u[n] q^* [\ell]] &= E \left[\left(\sum_{k=0}^{K_w} w[k] q[n-k] \right) q^* [\ell] \right] \\ &= \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \underbrace{E[q[n-k] q^* [\ell]]}_{R_q[n-k-\ell]} = (w[k] * R_q[k])|_{k=n-\ell} \end{aligned}$$

- Función de autocorrelación de las observaciones $q[n]$

$$\begin{aligned} R_q[n] &= E [q[\ell+n] q^* [\ell]] \\ &= E \left[\left(\sum_{k=0}^{K_p} p[k] A[\ell+n-k] + z[\ell+n] \right) \left(\sum_{j=0}^{K_p} p[j] A[\ell-j] + z[\ell] \right)^* \right] \\ &= \sum_{k=0}^{K_p} \sum_{j=0}^{K_p} p[k] p^* [j] \underbrace{E[A[\ell+n-k] A^* [\ell-j]]}_{R_A[n-k+j]} + \underbrace{E[z[\ell+n] z^* [\ell]]}_{R_z[n]} \\ &= E_s \sum_{k=0}^{K_p} p[k] p^* [k-n] + \sigma_z^2 \delta[n] = E_s (p[n] * p^* [-n]) + \sigma_z^2 \delta[n] \end{aligned}$$

Note que como $R_A[k] = E_s \delta[n]$, $R_A[n-k+j] \neq 0$ sólo para $j = k-n$

Principio de ortogonalidad - Igualador

- Combinando ambos términos

$$E_s p^* \underbrace{[\ell + d - n]}_{-(n-\ell-d)} = w[n] * [E_s (p[k] * p^*[-k])|_{k=n-\ell} + \sigma_z^2 \delta[n - \ell]]$$

- Haciendo el cambio de variable $k = n - \ell$, y dividiendo por E_s

$$p^*[-(k - d)] = w[k] * \left[(p[k] * p^*[-k]) + \frac{\sigma_z^2}{E_s} \delta[k] \right]$$

- ▶ Esto es equivalente, en el dominio frecuencial, a

$$P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d} = W(e^{j\omega}) \times \left[P(e^{j\omega}) P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s} \right]$$

- La expresión del igualador en el dominio de la frecuencia es

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega}) P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

Retardo d : implementación causal de la respuesta $w[n]$

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Expresión del igualador en el dominio de la frecuencia

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega}) P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} = \frac{P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d}}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

Retardo d : implementación causal de la respuesta $w[n]$

- Para $\lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0$ (potencia del ruido blanco $z[n]$ nula, $\sigma_z^2 = 0$)

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega}) P^*(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}$$

El igualador MMSE coincide con el igualador ZF !!!

Diseño del igualador lineal MMSE sin limitación en K_w

- Obtención del igualador MMSE sin limitaciones en K_w :
 - ▶ Se obtiene la respuesta del igualador sin considerar retardo

$$W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega})}{P(e^{j\omega})P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- ▶ Se obtiene su correspondiente respuesta en el tiempo

$$w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \left\{ W^{(0)}(e^{j\omega}) \right\}$$

- ★ Si es una respuesta no causal, se evalúa la longitud del término no causal, i.e., se busca el máximo valor de k tal que $w^{(0)}[-k] \neq 0$
- ★ Entonces, se toma como retardo $d = k$
- ▶ La respuesta estable causal del igualador es entonces

$$w[n] = w^{(0)}[n - d]$$

Igualador lineal MMSE con $K_w + 1$ coeficientes

- Principio de ortogonalidad

$$R_{A,q}[n-d] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k] R_q[n-k]$$

- ▶ Sistema de $K_w + 1$ ecuaciones para las $K_w + 1$ incógnitas

$$\mathbf{r}_{A,q}^d = \mathbf{R}_q \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{R}_q)^{-1} \mathbf{r}_{A,q}^d$$

NOTA: definiciones de vectores y matrices en la siguiente diapositiva

- La solución puede expresarse también a través de la matriz \mathbf{P}

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d$$

$$\lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s}$$

Pseudo-inverse regularizada: $P_{\lambda}^{\#} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H$

$$\lambda = 0 \rightarrow \mathbf{w}_d^{MMSE} = \mathbf{w}_d^{ZF} \quad \left(P_{\lambda=0}^{\#} = P^{\#} \right)$$

Sistema matricial de ecuaciones

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_{A,q}[-d] \\ R_{A,q}[-(d-1)] \\ R_{A,q}[-(d-2)] \\ \vdots \\ R_{A,q}[K_w - d] \end{bmatrix}}_{r_{A,q}^d} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_q[0] & R_q^*[1] & R_q^*[2] & \cdots & R_q^*[K_w] \\ R_q[1] & R_q[0] & R_q^*[1] & \cdots & R_q^*[K_w - 1] \\ R_q[2] & R_q[1] & R_q[0] & \cdots & R_q^*[K_w - 2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_q[K_w] & R_q[K_w - 1] & R_q[K_w - 2] & \cdots & R_q[0] \end{bmatrix}}_{R_q} \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ \vdots \\ w[K_w] \end{bmatrix}}_w$$

Estima de prestaciones con igualadores

● Situación ideal sin ISI

$$q[n] = A[n - d] + z[n] \Rightarrow P_e \approx k Q \left(\frac{d_{min}}{2\sigma_z} \right)$$

- ▶ d_{min} : mínima distancia entre símbolos de la constelación
- ▶ k : máximo número de símbolos a d_{min} de un símbolo de la constelación
- ▶ El ruido gaussiano $z[n]$ tiene varianza σ_z^2 en cada dimensión

● Igualadores sin limitación de coeficientes

$$u[n] = A[n - d] + e_d[n] \Rightarrow P_e \approx k Q \left(\frac{d_{min}}{2\sigma_{e_d}} \right)$$

- ▶ Se asume que $e_d[n]$ tiene distribución gaussiana de media nula y varianza $\sigma_{e_d}^2$

● Igualadores con limitación de coeficientes

$$u[n] = A[n - d] c[d] + ISI + z'[n] \Rightarrow P_e \approx k Q \left(\frac{d_{min} |c[d]|}{2\sigma_{ISI+z'}} \right)$$

- ▶ Se asume que la suma de ISI y ruido filtrado tiene distribución gaussiana de media nula y varianza $\sigma_{ISI+z'}^2$

Prestaciones asintóticas para igualadores lineales

- Analisis basado en la caracterización de $e_d[n] = u[n] - A[n - d]$
- Salida del igualador

$$u[n] = A[n] * p[n] * w[n] + z[n] * w[n]$$

- Secuencia de error a la salida del igualador

$$e_d[n] = A[n] * (w[n] * p[n] - \delta[n - d]) + z[n] * w[n]$$

- Densidad espectral de potencia del error

$$S_{e_d}(e^{j\omega}) = S_A(e^{j\omega}) |W(e^{j\omega}) P(e^{j\omega}) - e^{-j\omega d}|^2 + S_z(e^{j\omega}) |W(e^{j\omega})|^2$$

- Para secuencias $A[n]$ blancas y ruido $z[n]$ blanco

$$S_{e_d}(e^{j\omega}) = E_s |W(e^{j\omega}) P(e^{j\omega}) - e^{-j\omega d}|^2 + \sigma_z^2 |W(e^{j\omega})|^2$$

- Potencia de la secuencia de error

$$\sigma_{e_d}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{e_d}(e^{j\omega}) d\omega$$

Prestaciones asintóticas para igualadores lineales (II)

- Densidad espectral de potencia del término de error

$$S_{e_d}(e^{j\omega}) = E_s \left| W(e^{j\omega}) P(e^{j\omega}) - e^{-j\omega d} \right|^2 + \sigma_z^2 |W(e^{j\omega})|^2$$

- Igualadores ZF y MMSE

$$ZF \Rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}, \quad MMSE \Rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d}}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- Reemplazando $W(e^{j\omega})$ para el criterio ZF

$$S_{e_d}(e^{j\omega}) = E_s \left| \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})} P(e^{j\omega}) - e^{-j\omega d} \right|^2 + \sigma_z^2 \left| \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})} \right|^2 = \sigma_z^2 \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2}$$

- Reemplazando $W(e^{j\omega})$ para el criterio MMSE

$$\begin{aligned} S_{e_d}(e^{j\omega}) &= E_s \left| \frac{P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d}}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} P(e^{j\omega}) - e^{-j\omega d} \right|^2 + \sigma_z^2 \left| \frac{P^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega d}}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} \right|^2 \\ &= E_s \left| \frac{|P(e^{j\omega})|^2}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} - 1 \right|^2 + \sigma_z^2 \left| \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} \right|^2 \\ &= E_s \left| \frac{\frac{\sigma_z^2}{E_s}}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} \right|^2 + \sigma_z^2 \left| \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} \right|^2 = \sigma_z^2 \frac{1}{\left| |P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s} \right|^2} \end{aligned}$$

Prestaciones asintóticas para igualadores lineales (III)

- Reemplazando $W(e^{j\omega})$ para el criterio ZF

$$\sigma_{e_d}^2(\text{ZF}) = \sigma_z^2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2} d\omega$$

- Reemplazando $W(e^{j\omega})$ para el criterio MMSE

$$\sigma_{e_d}^2(\text{MMSE}) = \sigma_z^2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} d\omega$$

- Probabilidad de error - Aproximación para P_e

$$P_e \approx k Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_{e_d}}\right)$$

- ▶ d_{min} : mínima distancia entre símbolos de la constelación
- ▶ k : máximo número de símbolos a d_{min} de un símbolo de la constelación

Prestaciones de igualadores lineales con $K_w + 1$ coeficientes

- Salida del igualador

$$u[n] = \underbrace{c[d]}_{\text{ganancia}} A[n - d] + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq d}}^{K+K_w} c[k] A[n - k]}_{\text{ISI residual}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{K_w} w[k] z[n - k]}_{\text{ruido filtrado } z'[n]}$$

- Asunciones
 - ▶ ISI residual y ruido filtrado son independientes
 - ▶ Distribución gaussiana para la ISI residual
- Aproximación para la probabilidad de error

$$P_e \approx k Q \left(\frac{d_{\min} |c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{z'}^2 + \sigma_{ISI}^2}} \right)$$

k : máximo número de símbolos a mínima distancia de un símbolo sobre la constelación

Media y varianza del ruido filtrado $z'[n]$

- Media de $z'[n]$

$$E [z'[n]] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k] E[z[n - k]] = 0$$

- Varianza de $z'[n]$

$$\begin{aligned}\sigma_{z'}^2 &= E \left[\left(\sum_{k=0}^{K_w} w[k] z[n - k] \right) \left(\sum_{j=0}^{K_w} w^*[j] z^*[n - j] \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{K_w} \sum_{j=0}^{K_w} w[k] w^*[j] \underbrace{E [z[n - k] z^*[n - j]]}_{R_z[j-k] = \sigma_z^2 \delta[j-k]} \\ &= \sigma_z^2 \sum_{k=0}^{K_w} |w[k]|^2\end{aligned}$$

Media y varianza del término de ISI residual

- Media de la ISI residual

$$E [ISI] = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq d}}^{K_p+K_w} c[k] E[A[n-k]] = 0$$

- Varianza de la ISI residual

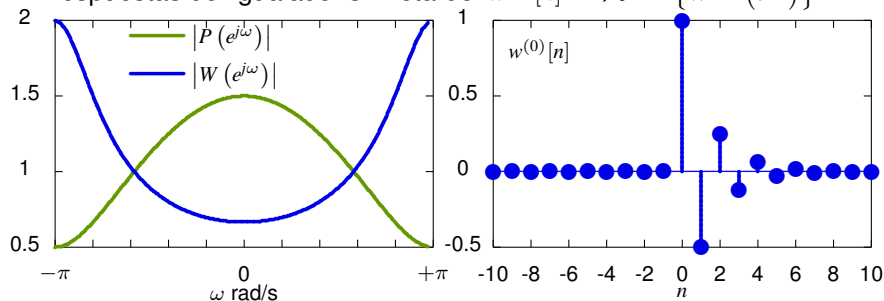
$$\begin{aligned} \sigma_{ISI}^2 &= E \left[\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq d}}^{K_p+K_w} c[k] A[n-k] \right) \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq d}}^{K_p+K_w} c^*[j] A^*[n-j] \right) \right] \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq d}}^{K_p+K_w} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq d}}^{K_p+K_w} c[k] c^*[j] \underbrace{E[A[n-k] A^*[n-j]]}_{R_A[j-k]=E_s \delta[j-k]} \\ &= E_s \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq d}}^{K_p+K_w} |c[k]|^2 \end{aligned}$$

Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal A

- Canal $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n - 1]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \sum_n p[n] e^{-j\omega n} = 1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{ W^{(0)}(e^{j\omega}) \}$



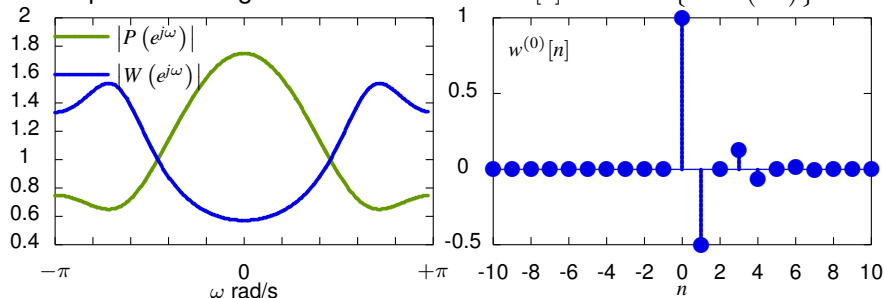
- ▶ Respuesta causal - Retardo $d = 0$
- ▶ Coeficientes relevantes ≈ 7 ($K_w \approx 6$)

Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal B

- Canal $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] + \frac{1}{4} \delta[n-2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1}\{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



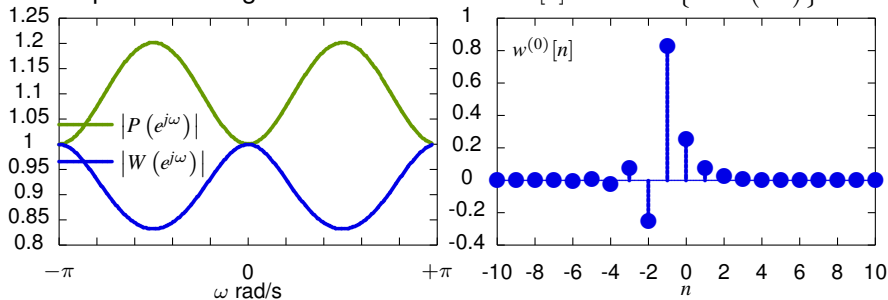
- ▶ Respuesta causal - Retardo $d = 0$
- ▶ Coeficientes relevantes ≈ 7 ($K_w \approx 6$)

Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal C

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{3} \delta[n-2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} + e^{-j\omega} - \frac{1}{3} e^{-j2\omega}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



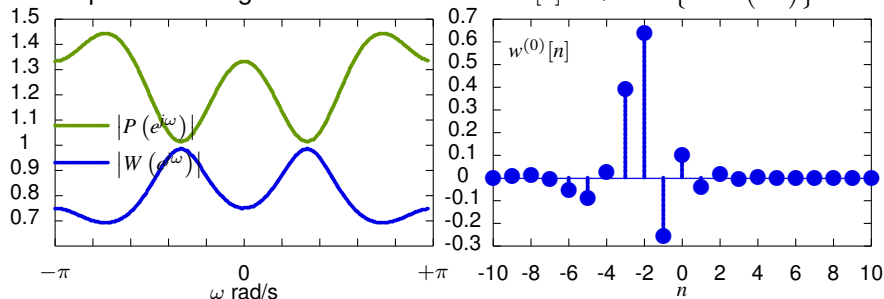
- ▶ Respuesta no causal - retardo $d \approx 5$
- ▶ Coeficientes relevantes ≈ 9 ($K_w \approx 8$)

Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal D

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \delta[n-3]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega 3}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



- ▶ Respuesta no causal - retardo $d \approx 9$
- ▶ Coeficientes relevantes ≈ 13 ($K_w \approx 12$)

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 0$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 0$

$$\mathbf{c}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{7 \times 1}, \quad \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{7 \times 4}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,2123 \\ +0,0221 \\ -0,0112 \\ -0,0243 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} +0,0708 \\ -0,0988 \\ +0,1975 \\ +0,1257 \\ +0,0119 \\ -0,0299 \\ -0,0121 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0657$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,0463$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,1334$

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 1$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 1$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,2963 \\ +0,1787 \\ +0,0364 \\ +0,0252 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,0988 \\ +0,2077 \\ -0,3736 \\ +0,0207 \\ +0,1132 \\ +0,0434 \\ +0,0126 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1646$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,1217$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2471$

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 2$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 2$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,5925 \\ -0,2319 \\ +0,1488 \\ -0,0339 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} +0,1975 \\ -0,3736 \\ +0,7581 \\ -0,0213 \\ +0,0498 \\ +0,0405 \\ -0,0170 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1834$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,4281$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,7969$

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 3$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \delta[n-3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 3$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,3771 \\ +0,6278 \\ -0,2536 \\ +0,1092 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} +0,1257 \\ +0,0207 \\ -0,0213 \\ +0,9796 \\ +0,0057 \\ -0,0176 \\ +0,0546 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0200$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,6126$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,7181$

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 4$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 4$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,0358 \\ +0,3933 \\ +0,6317 \\ -0,2690 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} +0,0119 \\ +0,1132 \\ +0,0498 \\ +0,0057 \\ +0,9629 \\ +0,0468 \\ -0,1345 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0357$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,6274$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,5341$

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 5$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 5$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0896 \\ -0,0042 \\ +0,3838 \\ +0,6699 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,0299 \\ +0,0434 \\ +0,0405 \\ -0,0176 \\ +0,0468 \\ +0,8618 \\ +0,3349 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1191$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,6041$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,0170$

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 6$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 6$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0364 \\ -0,0168 \\ +0,0331 \\ +0,3184 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,0121 \\ +0,0126 \\ -0,0170 \\ +0,0546 \\ -0,1345 \\ +0,3349 \\ +0,1592 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1339$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,1041$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2096$

Canal D - Matriz pseudoinversa

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \delta[n-3]$
- Matriz de canal

$$\mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{7 \times 4 \equiv (K_p + K_w + 1) \times (K_w + 1)}$$

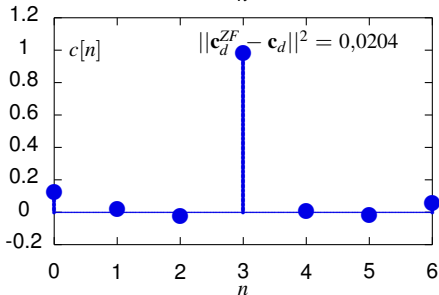
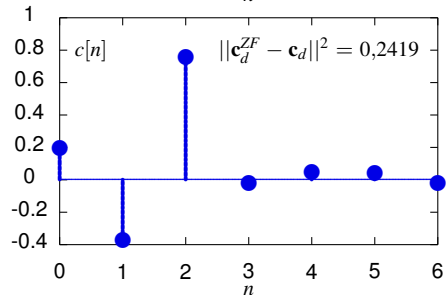
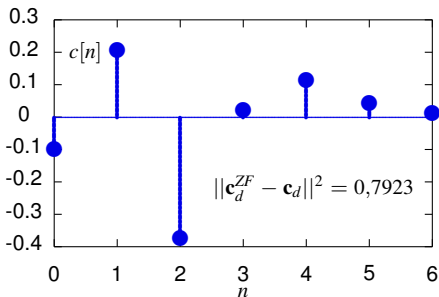
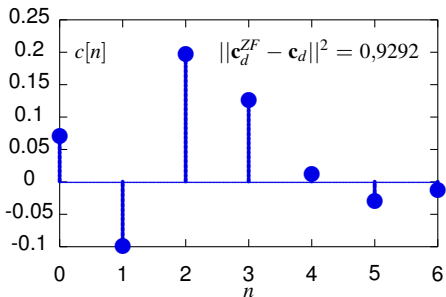
- Pseudo-inversa de Moore-Penrose

$$\mathbf{P}^\# = (\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H$$

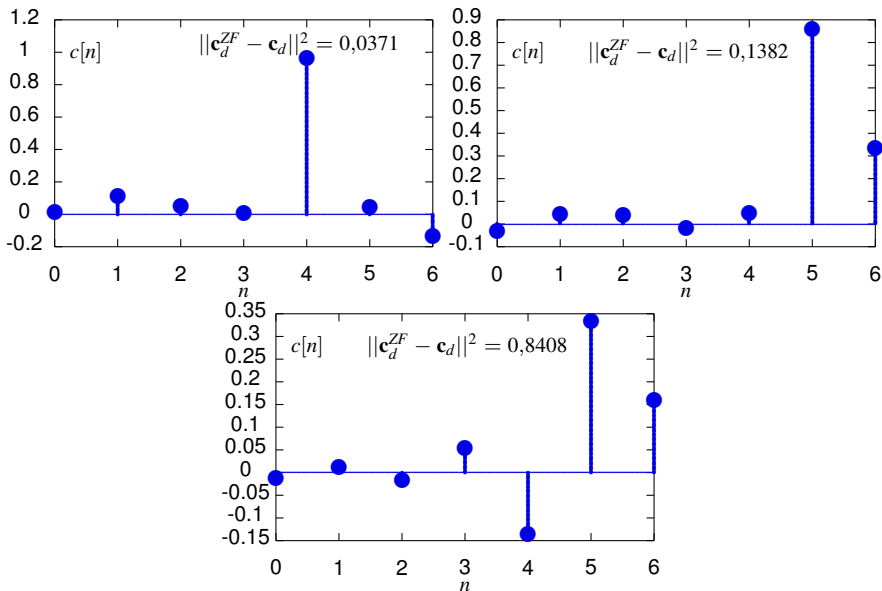
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} +0,2123 & -0,2963 & +0,5925 & +0,3771 & +0,0358 & -0,0896 & -0,0364 \\ +0,0221 & +0,1787 & -0,2319 & +0,6278 & +0,3933 & -0,0042 & -0,0168 \\ -0,0112 & +0,0364 & +0,1488 & -0,2536 & +0,6317 & +0,3838 & +0,0331 \\ -0,0243 & +0,0252 & -0,0339 & +0,1092 & -0,2690 & +0,6699 & +0,3184 \end{bmatrix}}_{4 \times 7 \equiv (K_w + 1) \times (K_p + K_w + 1)}$$

- ▶ Las soluciones ZF para distintos retardos coinciden con las columnas de esta

Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{0, 1, 2, 3\}$



Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{4, 5, 6\}$

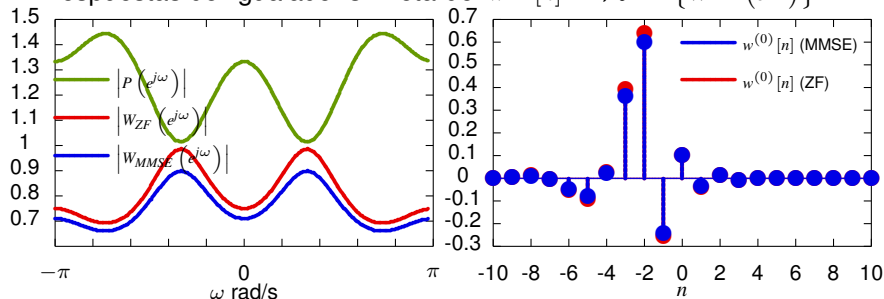


Igualador MMSE sin limitaciones - Ejemplo - Canal D

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \delta[n-3]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega 3}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1}\{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



- ▶ Respuesta no causal - retardo $d \approx 9$
- ▶ Coeficientes relevantes ≈ 13 ($K_w \approx 12$)

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 0$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \delta[n-3]$
- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 0$

$$\mathbf{c}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{7 \times 1}, \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{7 \times 4}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{4 \times 4}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,1993 \\ +0,0195 \\ -0,0099 \\ -0,0213 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,0664 \\ -0,0931 \\ +0,1862 \\ +0,1169 \\ +0,0105 \\ -0,0263 \\ -0,0107 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0579$$

$$\sigma_z'^2 = \sigma_z^2 \times 0,0406$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_z'^2}} = 0,1334$$

(ZF: 0,1334)

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 1$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 1$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,2794 \\ +0,1697 \\ +0,0323 \\ +0,0221 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,0931 \\ +0,1963 \\ -0,3535 \\ +0,0212 \\ +0,1061 \\ +0,0382 \\ +0,0110 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1469$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,1084$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2471$$

(ZF: 0,2471)

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 2$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 2$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,5587 \\ -0,2224 \\ +0,1430 \\ -0,0297 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,1862 \\ -0,3535 \\ +0,7176 \\ -0,0245 \\ +0,0467 \\ +0,0419 \\ -0,0148 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1644$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,3829$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,7970$$

(ZF: 0,7969)

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 3$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 3$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,3508 \\ +0,5898 \\ -0,2413 \\ +0,1084 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,1169 \\ +0,0212 \\ -0,0245 \\ +0,9220 \\ -0,0006 \\ -0,0122 \\ +0,0542 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0178$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,5409$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,7192$$

(ZF: 1,7181)

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 4$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 4$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,0316 \\ +0,3655 \\ +0,5936 \\ -0,2553 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,0105 \\ +0,1061 \\ +0,0467 \\ -0,0006 \\ +0,9040 \\ +0,0415 \\ -0,1276 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0316$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,5522$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,5345$$

(ZF: 1,5341)

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 5$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 5$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0788 \\ -0,0035 \\ +0,3568 \\ +0,6270 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,0263 \\ +0,0382 \\ +0,0419 \\ -0,0122 \\ +0,0415 \\ +0,8054 \\ +0,3135 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1041$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,5267$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,0172$$

(ZF: 1,0170)

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal D - $d = 6$

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 6$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0320 \\ -0,0148 \\ +0,0292 \\ +0,2989 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,0107 \\ +0,0110 \\ -0,0148 \\ +0,0542 \\ -0,1276 \\ +0,3135 \\ +0,1494 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1180$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,0914$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2096$$

(ZF: 2096)

Canal D - Matriz pseudoinversa regularizada

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \delta[n-3]$
- Matriz de canal

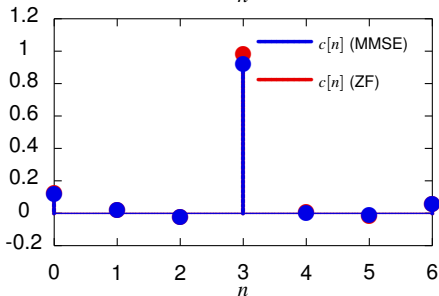
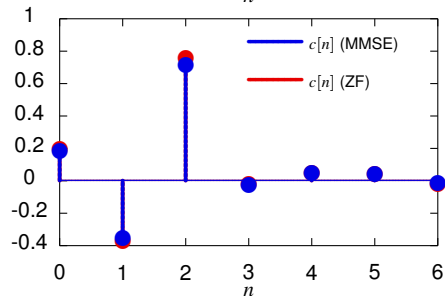
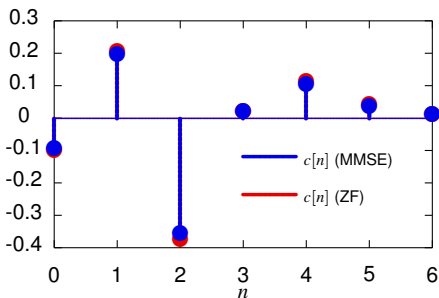
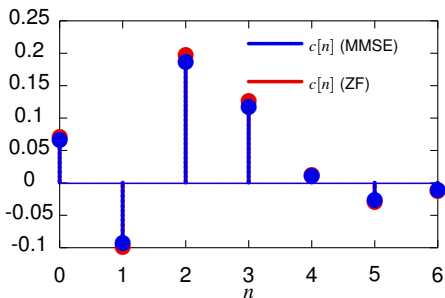
$$\mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{7 \times 4 \equiv (K_p + K_w + 1) \times (K_w + 1)}$$

- Pseudo-inversa regularizada, con $\lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1$

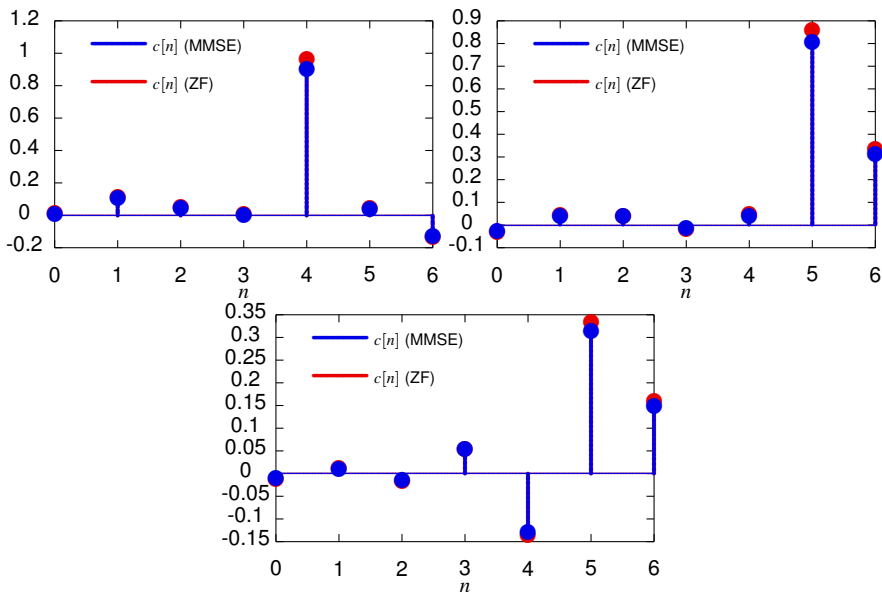
$$\mathbf{P}_{\lambda}^{\#} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} +0,1993 & -0,2794 & +0,5587 & +0,3508 & +0,0316 & -0,0788 & -0,0320 \\ +0,0195 & +0,1697 & -0,2224 & +0,5898 & +0,3655 & -0,0035 & -0,0148 \\ -0,0099 & +0,0323 & +0,1430 & -0,2413 & +0,5936 & +0,3568 & +0,0292 \\ -0,0213 & +0,0221 & -0,0297 & +0,1084 & -0,2553 & +0,6270 & +0,2989 \end{bmatrix}}_{4 \times 7 \equiv (K_w + 1) \times (K_p + K_w + 1)}$$

- Las soluciones MMSE para distintos retardos coinciden con las columnas de esta

MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{0, 1, 2, 3\}$



MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{4, 5, 6\}$



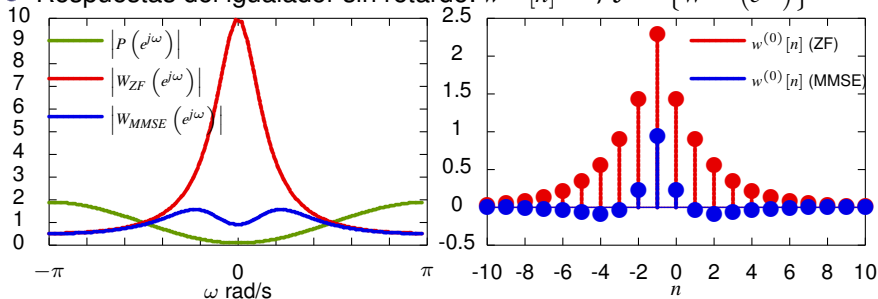
Igualadores sin limitaciones - Ejemplo - Canal E

- Canal $p[n] = -0,45 \delta[n] + \delta[n - 1] - 0,45 \delta[n - 2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = -0,45 + e^{-j\omega} + e^{-j\omega} - 0,45 e^{-j\omega 2}$$

$$W_{ZF}^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}, \quad W_{MMSE}^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{ W^{(0)}(e^{j\omega}) \}$



- ▶ Respuesta no causal - retardo $d \approx 9$
- ▶ Coeficientes relevantes ≈ 19 ($K_w \approx 18$)

Igualador ZF con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal E - $d = 2$

- Canal $p[n] = -0,45 \delta[n] + \delta[n - 1] - 0,45 \delta[n - 2]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 2$

$$\mathbf{c}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{6 \times 1}, \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,45 & 0 & 0 \\ -0,45 & 1 & -0,45 & 0 \\ 0 & -0,45 & 1 & -0,45 \\ 0 & 0 & -0,45 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,45 \end{bmatrix}}_{6 \times 4}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,4893 \\ +1,4097 \\ +0,6479 \\ +0,2118 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,2202 \\ -0,1450 \\ +0,8979 \\ -0,0818 \\ -0,0797 \\ -0,0953 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0917$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 2,6913$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,7475$

Igualador MMSE con 4 coeficientes ($K_w = 3$) - Canal E - $d = 2$

- Ruido con varianza $\sigma_z^2 = 0,1$, 2-PAM con $E_s = 1$
- Canal $p[n] = -0,45 \delta[n] + \delta[n - 1] - 0,45 \delta[n - 2]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo $d = 2$

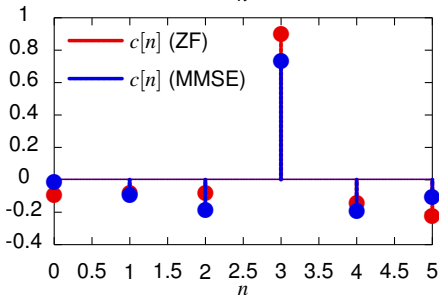
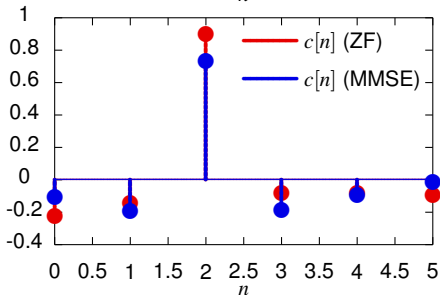
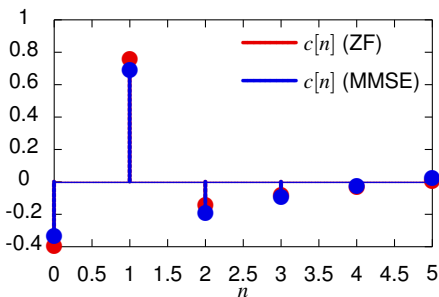
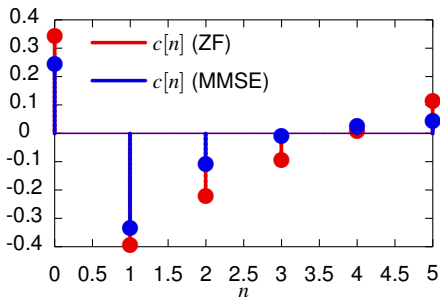
$$\mathbf{c}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{6 \times 1}, \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,45 & 0 & 0 \\ -0,45 & 1 & -0,45 & 0 \\ 0 & -0,45 & 1 & -0,45 \\ 0 & 0 & -0,45 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,45 \end{bmatrix}}_{6 \times 4}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{4 \times 4}$$

- Solución MMSE proporcionada

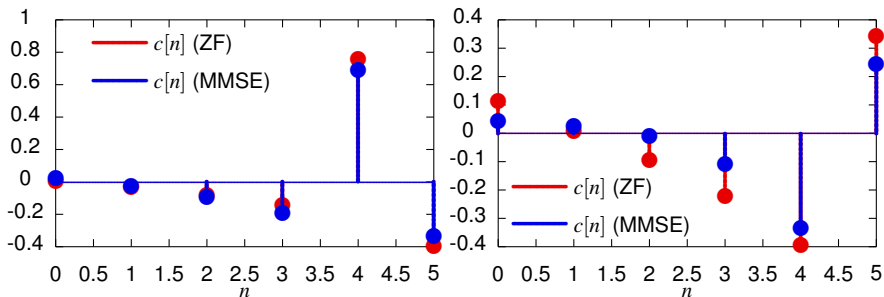
$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,2387 \\ +0,9566 \\ +0,2553 \\ +0,0239 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,2202 \\ -0,1450 \\ +0,8979 \\ -0,0818 \\ -0,0797 \\ -0,0953 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0913$
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 1,0379$
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,8313$
(ZF: 0,7475)

ZF/MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{0, 1, 2, 3\}$



ZF/MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{4, 5\}$



Igualadores con 17 coeficientes ($K_w = 16$) - Canal E - $d = 9$

- En ese caso la solución se aproxima más a la solución sin limitaciones
- Solución ZF fuerza una respuesta conjunta prácticamente ideal
 - ▶ Amplificación severa del ruido

ZF	MMSE
$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0003$	$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0895$
$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 11,8850$	$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 1,0255$
$\frac{ c[d] }{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,4585$	$\frac{ c[d] }{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,8450$

Respuestas conjuntas con 17 coeficientes - Canal E

