uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía I (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Teoremas de Derivabilidad

Teorema de la función inversa

Sea f es una función y x_0 *un punto de su dominio:*

1º) f es continua en un entorno del punto

2º) f es derivable en un entorno del punto

3º) $f'(x_0) \neq 0$

HIPOTESIS

Entonces existe $f^{-1}(y_0)$ *inversa local en un entorno de* (x_0, y_0) *con* $f(x_0) = y_0$

TESIS

APLICACIÓN: $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$

Teorema de la función implícita

Sea f es una función y (x_0, y_0) *un punto de su dominio:*

1º) f es continua en un entorno del punto

2º) existen derivadas parciales de f en un entorno del punto

3º) $f(x_0, y_0) = 0$

4º) $f_Y(x_0, y_0) \neq 0$

HIPOTESIS

Entonces existe la función $y(x_0)$ *explícita tal que* $f\left(x_0, y(x_0)\right) = 0$

TESIS

APLICACIÓN: $y(x_0) = -\frac{f_X(x_0, y_0)}{f_Y(x_0, y_0)}$

Teorema de Lagrange o del valor medio

Definición de derivada. Caso particular del Teorema de Taylor para la primera derivada

Sea f es una función:

1º) Continua en el intervalo cerrado [a,b]

2º) Derivable en el intervalo abierto (a,b) HIPOTESIS

Entonces existe algún valor c en el intervalo abierto (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ TESIS

Teorema de Rolle

Caso especial del Teorema de Lagrange. Demuestra que entre dos puntos a la misma altura existe tangente horizontal.

Si f es una función:

1º) Continua en el intervalo cerrado [a,b]

2º) Derivable en el intervalo abierto (a,b) HIPOTESIS

3º) f(a)=f(b)

Entonces existe algún valor c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c) = 0$ TESIS

Teorema de Taylor

Si f es una función y $x = a$ *un punto de su dominio:*

1º) Continua en un entorno cerrado de $x = a$

2º) Derivable en un entorno cerrado de $x = a$ HIPOTESIS

3º) Existen n derivadas de f en a, también continuas

Entonces se cumple que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(f)$$ *TESIS*

Es decir, existe una aproximación polinómica de la función en el entorno del punto.

Donde $R_n(f) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$