uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía I (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Derivación:

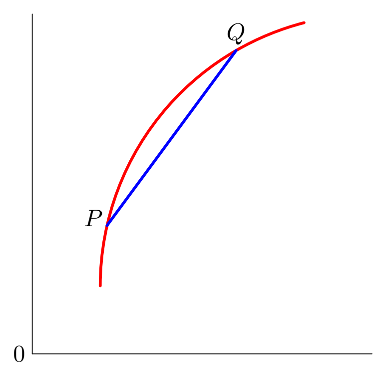
Cálculo de derivadas y aplicaciones

Derivadas

3.1 Derivada de una función. Derivada de las funciones elementales y reglas de derivación

3.1.1 Pendiente de una curva

La pendiente de una curva en un punto P de la curva, es una medida de la inclinación de la curva en ducho punto. Si Q es otro punto de la curva próximo a P, entonces puede decirse que la pendiente de la curva en P es aproximadamente la pendiente del segmento que une P y Q, $\overline{PQ}$. La *pendiente de la curva* en P se define como el límite de de las pendientes de los segmentos $\overline{PQ}$ a medida que Q tiende a P.



Es decir, pendiente de la curva en $P = \lim_{Q \to P}$(pendiente de $\overline{PQ}$).

Para calcular la pendiente de la curva $y = x^2$ en el punto $P = (1, 1)$ elegimos puntos Q sobre la curva muy próximos a P. Una forma de hacer esto es tomar $Q = (1 + h, (1 + h)^2)$ con h tendiendo a 0. Entonces, de acuerdo a la definición

$$\text{pendiente de } \overline{PQ} = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = 2 + h$$

y tomando $h \to 0$, Q tiende a P, de manera que

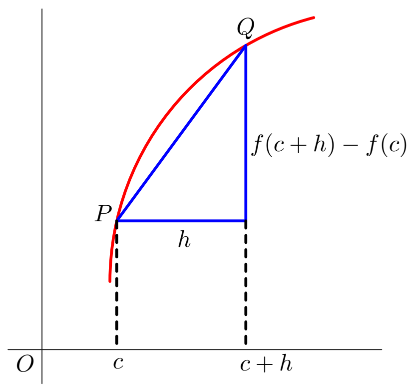
$$\text{pendiente de la curva en } (1, 1) = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

Definición 3.1.1. La derivada de la función f en el punto c, $f'(c)$, es la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$, es decir:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

siempre que este límite exista.

Diremos que f es *derivable* en c si $f'(c)$ existe.



3.1.2 Tabla de derivadas de las funciones elementales

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α es un número real).
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, en particular $(e^x)' = e^x$.
4. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
6. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, siempre que $\cos x \neq 0$.
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
9. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3.1.3 Recta tangente a una curva

La recta tangente a una curva en un punto es la recta que pasa por dicho punto y que tiene la misma pendiente que la curva en en el punto. Por tanto,

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

es la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $P = (c, f(c))$ de la curva.

Ejemplo 3.1.2.

1. Hallar la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $(16, 4)$.

   SOLUCIÓN: $f(x) = x^{1/2}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f'(16) = \dfrac{1}{8}$.
   Por tanto, $y - 4 = \dfrac{1}{8}(x - 16)$, o $y = \dfrac{1}{8}x + 2$.

2. Hallar la recta tangente a la curva $y = |x|$ en $(0, 0)$.

   SOLUCIÓN: No existe recta tangente a $y = |x|$ en $(0, 0)$, dado que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en 0. Para comprobar esto, notar que el límite

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

   no existe por la izquierda vale -1, pero por la derecha 1).

3.1.4 Derivadas laterales

Si existe el límite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad \left(\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\right),$$

se dice que es la derivada por la derecha (por la izquierda) de la función f en el punto c y se denota $f'(c^+)$ $(f'(c^-))$.

Teorema 3.1.3. *f es derivable en c si y sólo si ambas derivadas laterales $f'(c^+)$ y $f'(c^-)$ existen y son iguales. En este caso, $f'(c) = f'(c^+) = f'(c^-)$.*

Ejemplo 3.1.4. Determinar si la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0; \\ xe^{-1/x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ es derivable en 0?

SOLUCIÓN: Sí, ay su derivada es $f'(0) = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = 0;$$
$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{he^{-1/h}}{h} = e^{-\infty} = 0.$$

3.1.5 Relación entre continuidad y derivabilidad

La continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad. Dicho de otra forma, una función derivable es continuaI.

Teorema 3.1.5. *Sea f una función derivable en c. Entonces es continua en c.*

Proof. La hipótesis del teorema afirma que existe el límite

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Vamos a probar, utilizando este hecho, que f es continua en c. Lo habremos conseguido si probamos que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Pero

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{x\to c}(x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \left(\lim_{x\to c}(x-c)\right)\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right) = 0\cdot f'(c) = 0.$$

□

Ejemplo 3.1.6. Discutir la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} ax - x^2, & \text{si } x < 1; \\ b(x-1), & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: Por el resultado anterior, conviene primero estudiar si f es continua. El dominio de f es todo $\mathbb{R}$. Para $x < 1$ y $x > 1$, f está dada por funciones elementales, que son continuas. En el punto $x = 1$ hay que hacer un estudio detallado. Tenemos que $f(1) = 0$y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax - x^2 = a - 1$. Luego f es continua en 1 si y sólo si $a = 1$, para cualqueir valor de b. En cuanto a si es diferenciable, claramente lo es en cualquier punto $x \neq 1$. de hecho, la derivada es $f'(x) = a - 2x$ si $x < 1$ y $f'(x) = b$ si $x > 1$. En $x = 1$, la funci—'on no es derivable si $a = 1$, ya que no es continua. Cuando $a = 1$, calculamos

$$\begin{aligned}
f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)-(1+h)^2-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)-(1+2h+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-h^2}{h} = -1; \\
f'(1^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{b(1+h-1)}{h} = b.
\end{aligned}$$

Luego $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1)$ si y sólo si $b = -1$. Es decir, que si $a = 1$ y $b \neq -1$, entonces f no es derivable en 1, pero si $a = 1$ y $b = -1$, f es derivable y $f'(1) = -1$.

3.1.6 Reglas de derivación

Sean f y g funciones derivables en el punto c. la suma, la diferencia, el producto por un escalar, el producto y el cociente de funciones son derivables en c, y la derivada se calcula como se indica.

1. Suma: $(f+g)' = f' + g'$;
2. Diferencia: $(f-g)' = f' - g'$;
3. Producto por un escalar: $(\lambda f)' = \lambda f'$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. Producto: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$;
5. Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g(c) \neq 0$.

3.1.7 Regla de la cadena

(derivada de la función compuesta). Sean f derivable en c y g derivable en $f(c)$. la composición $g \circ f$ es derivable en c y la derivada es

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Ejemplo 3.1.7. Hallar la derivada de $y = \operatorname{sen}(3^x + x^3)$.

Solución:

$$y' = (\operatorname{sen} t)'|_{t=3^x+x^3}(3^x + x^3)' = \cos(3^x + x^3)(3^x \ln 3 + 3x^2).$$

Ejemplo 3.1.8. Hallar la derivada de $h(x) = \sqrt{e^x - x^2}$ en el punto $c = 1$.

Solución:

$$h'(x) = \left((e^x - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - x^2)^{-\frac{1}{2}}(e^x - x^2)' = \frac{1}{2}(e^x - x^2)^{-\frac{1}{2}}(e^x - 2x).$$

Luego $h'(1) = \frac{e-2}{2\sqrt{e-1}}$, aproximadamente 0.274.

Ejemplo 3.1.9. En las propiedades que siguen, f es derivable.

- $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$;
- $\left(a^{f(x)}\right)' = (\ln a)f'(x)a^{f(x)}$.
- $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$;
- $(\arctan f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$.

3.1.8 Derivada de la función inversa

. Sea f continua e inyectiva en un intervalo abierto alrededor de x, $(x - \delta, x + \delta)$ y tal que f es derivable en x. Entonces f^{-1} es derivable en $y = f(x)$ y la derivada es

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{3.1.1}$$

La demostración de la fórmula es una consecuencia fácil de la regla de la cadena aplicada a la identidad

$$x = f^{-1}(f(x)),$$

que se cumple por definición de la inversa de f. Tenemos

$$1 = \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x).$$

la fórmula se sigue de esto al substituir $y = f(x)$.

Ejemplo 3.1.10. Demostrar que $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Solución: La función $\arctan x$ es la inversa de $\tan x$. De acuerdo a la fórmula (3.1.1), tenemos

$$\arctan' y = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

porque $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, y donde $y = \tan x$. Luego,

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Podemos intercambiar el nombre de las variables x, y para obtener el resultado.

3.1.9 La derivada como una herramienta de aproximación

La recta tangente a una curva en un punto $(c, f(c))$ constituye una buena aproximación a la curva para valores (x, y) cercanos al punto $(c, f(c))$. De hecho, puede demostrarse que la recta tangente es la mejor aproximación a la gráfica de la función de entre todas las rectas posibles que pasan por el punto en cuestión.

Utilizando la expresión de la recta tangente $y - f(c) = f'(x)(x-c)$, para valores pequeños del incremento $h = x - c$, el valor de $y = f(c+h)$ puede aproximarse de manera eficiente por los valores conocidos de $f(c)$ y $f'(c)$:

$$f(c+h) \approx f(c) + f'(c)h. \tag{3.1.2}$$

Otra forma de expresar esto es mediante incrementos: el incremento en el valor de f, Δy, es aproximadamente el incremento en x, $h = \Delta x$, multiplicado por $f'(c)$:

$$\Delta y \approx f'(c)\Delta x.$$

Ejemplo 3.1.11. Sin usar una calculadora, dar un valor aproximado de $\sqrt{0.98}$.

Solución:
Consideremos la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Observamos que $f(0) = 1$,
$f(-0.02) = \sqrt{0.98}$, $f\ '(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f\ '(0) = 0.5$. We find from formula (3.1.2) with $c = 0$ and $h = -0.02$ that
$\sqrt{0.98} = f(0 - 0.02) \approx f(0) + f\ '(0).(-0.02) = 1 + 0.5(-0.02) \approx 0.99.$

Ejemplo 3.1.12. Hallar, sin usar calculadora, un valor aproximado de $\sqrt{177}$.

Solución:
Claramente, debemos escoger $f(x) = \sqrt{x}$. Como punto base c, uno que sea cuadrado perfecto (para que sepamos calcular su raíz cuadrada de forma inmediata) y que esté tan próximo a 177 como sea posible (para que el incremento sea lo menor posible). El candidato es $c = 169$, pues $\sqrt{169} = 13$. La derivada de f en $c = 169$ es

$$f'(169) = \frac{1}{2\sqrt{x}}_{|x=169} = \frac{1}{2\sqrt{169}} = \frac{1}{26}.$$

Luego

$$\sqrt{177} = \sqrt{169+8} = f(169+8) \approx f(169) + f'(169)8 = 13 + \frac{8}{26} \approx 13.307.$$

El valor correcto con 3 decimales es 13.304.

3.1.10 Derivación implícita

Definición 3.1.13. Una ecuación $F(x,y)=0$ define $y=f(x)$ de forma implícita cerca del punto (x_0,y_0) cuando se cumple:

1. $F(x_0,y_0)=0$
2. si (x,y) está cerca del punto (x_0,y_0) : $F(x,y)=0 \Longleftrightarrow y=f(x)$.

Teorema 3.1.14. $F(x_0,y_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0 \Longrightarrow$
La ecuación $F(x,y)=0$ define $y=f(x)$ de forma implícita cerca del punto (x_0,y_0) .

Teorema 3.1.15. $y_0' = f\ '(x_0)$ *puede hallarse a partir de la ecuación:*
$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)y_0' = 0 \qquad (*)$

De esta forma, aunque no conozcamos una expresión explícita de $y=f(x)$, podemos tener una idea aproximada de esta función sabiendo que tiene a
$y - y_0 = f\ '(x_0)(x-x_0)$
como recta tangente a $f(x)$ en el punto (x_0,y_0).
Si, además, derivando la ecuación $(*)$ hallamos que $y_0" \neq 0$, mejoramos nuestra información sobre dicha función, pues:

1. si $y_0" > 0 \Longrightarrow f$ es convexa cerca de $x_0 \Longrightarrow$ la gráfica de f queda por encima de la recta tangente cerca del punto (x_0,y_0).
2. si $y_0" < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava cerca de $x_0 \Longrightarrow$ la gráfica de f queda por debajo de la recta tangente cerca del punto (x_0,y_0).

3.2 Teoremas sobre funciones derivables. Aplicaciones de la derivada

3.2.1 Monotonía

Se dice que la función f es *creciente en* c, si existe algún intervalo alrededor de c en el que $f(x) > f(c)$ para $x > c$ y $f(x) < f(c)$ para $x < c$.
De forma análoga se deficne función decreciente en un punto.
Por ejemplo, $c=0$ ies un punto de crecimiento de x^3, pero no lo es de x^2.

Teorema 3.2.1. *Si f es derivable en c y $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), entonces f es creciente (decreciente) en el punto c.*

Notar que el teorema es sólo una condición suficiente, no necesaria, porque $c = 0$ es un punto donde $f(x) = x^3$ crece, pero $f'(0) = 0$.

A continuación se estudia el crecimiento/decrecimiento, es decir, la monotoní de funciones en intervalos.

Teorema 3.2.2. *Para que la función derivable f sea creciente (decreciente) en un intervalo I, es necesario y suficiente que para todo $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).*

Teorema 3.2.3. *Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente (decreciente) en el intervalo I.*

Ejemplo 3.2.4. Hallar los intervalos de monotonııa de $f(x) = 3x - x^3$.

Solución: Derivando, tenemos $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$. Dado que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-1, 1)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1)$ y en $x \in (1, +\infty)$, deducimos que f es estrictamente creciente en $(-1, 1)$ (y también en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, obviamente) y es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$.

3.2.2 Extremos locales de funciones

La derivada es fundamental en la determinación de los valores máximos y mínimos de una función. En los resultados siguientes siempre supondremos que la función f está definida en un intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$ alrededor de c.

Definición 3.2.5. La función f tiene un máximo (mínimo) local en el punto c si existe $\delta > 0$ tal que para todo punto $x \in (c - \delta, c + \delta)$

$$f(x) \leq f(c) \qquad (f(x) \geq f(c)).$$

Nos referiremos a un máximo o mínimo local de f como un extremo local de f.

Teorema 3.2.6. *Si c es un extremo local de f y f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad, supongamos que c es un mínimo local de f y que $f'(c)$ existe. por definición de mínimo local, tenemos que $f(c+h) \geq f(c)$ para todo h con $|h| < \delta$. Para $h > 0$ consideramos el cociente

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Es no negatico y su límite existe cuando $h \to 0$, tomando el valor $f'(c)$, dado que f es derivable en c por hipótesis. Por supuesto, el límite es también no negativo, luego $f'(c) \geq 0$. Sea ahora $h < 0$. El cociente anterior es no positivo y tomando límites cuando $h \to 0$, $f'(c) \leq 0$. Luego $f'(c) = 0$. □

Los puntos donde la función no es derivable o es derivable pero la derivada se anula son los únicos posibles extremos locales de f. Por este motivo se denominan *puntos críticos* de f. Los puntos críticos de f que no son extremos se denominan *puntos de silla* de f.

Ejemplo 3.2.7. Hallar los puntos críticos de $f(x) = 3x - x^3$ y de $g(x) = |x|$.

SOLUCIÓN: f is derivable en todo punto y su derivada es $f'(x) = 3(1 - x^2)$. Luego, $f'(x) = 0$ si y sólo si if $x = 1$ or $x = -1$. Estos son los únicos puntos críticos de f. La función g es derivable en todo punto excepto en $c = 0$. La derivada es

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0; \\ -1, & \text{if } x < 0, \end{cases},$$

que nunca se anula. El único punto crítico de g es $c = 0$.

El siguiente resultado es importante porque completa la condición necesaria de ser punto crítico con una condición suficiente, de manera que el punto en cuestión es un extremos local.

Teorema 3.2.8. *Sea f continua en un intervalo $I = (c - \delta, c + \delta)$ centrado en c y derivable en todo I excepto posiblemente en el punto c.*

- *Si la derivada de f cambia su signo de positivo a negativo en el punto c, entonces c es un máximo local de f. Es decir, si $f'(x) > 0$ para $c - \delta < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < c + \delta$, se tiene que c es un máximo local de f.*

- *Si la derivada de f cambia su signo de negativo a positivo en el punto c, entonces c es un mínimo local de f. Es decir, si $f'(x) < 0$ para $c - \delta < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < c + \delta$, se tiene que c es un mínimo local de f.*

- *Si la derivada de f no cambia de signo en el punto c, entonces c no es extremo de f.*

Ejemplo 3.2.9. Hallar los extremos locales de $f(x) = 3x - x^3$ y de $g(x) = |x|$.

SOLUCIÓN: Sabemos del Ejemplo 3.2.4 que los únicos candidatos para f son los puntos 1 y -1. Dado que $f'(x) = 3 - 3x^2$, es fácil ver que $f'(x) < 0$ si $|x| > 1$ y que $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$. Por tanto, f' cambia de positivo a negativo al pasar por -1 y f tiene un máximo local en -1; de la misma forma, f' cambia de negativo a positivo al pasar por 1, luego f tiene un mínimo local en 1.

En cuanto a g, esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto 0. La derivada para $x < 0$ es $g'(x) = -1 < 0$ y para $x > 0$ es $g'(x) = 1 > 0$, por lo que 0 es un mínimo local de g. En realidad, dado que este comportamiento es cierto en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y no sólo en un intervalo particular $(-\delta, \delta)$ alrededor de 0, el mínimo es global y no sólo local.

3.2.3 Teoremas de Rolle y de Lagrange

Teorema 3.2.10 (Teorema de Rolle)**.** *Sea una función f que satisface las condiciones:*

1. *f es continua en $[a, b]$;*

2. *f es derivable en (a, b);*

3. *$f(a) = f(b)$.*

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

El Teorema de Rolle establece que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto del plano $(c, f(c))$ que es paralela al eje OX.

Teorema 3.2.11 (Teorema de Lagrange). *Sea una función f que satisface las condiciones:*

1. *f es continua en $[a, b]$;*

2. *f es derivable en (a, b);*

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

El Teorema de Lagrange es también conocido como el Teorema de los Valores Intermedios. El Teorema de Rolle es una consecuencia de éste, pues si $f(a) = f(b)$, entonces de la igualdad $0 = f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ se deduce que $f'(c) = 0$. Es interesante saber que el Teorema de Lagrange puede probarse también mediante el Teorema de Rolle! Aquí está una función auxiliar que facilita esta demostración. Sea

$$g(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x.$$

Notar que $g(a) = bf(a) - af(b) = g(b)$. Aplicando el Teorema de Rolle, tendremos que $g'(c) = 0$ para algún punto $c \in (a, b)$. Pero $g'(x) = (b - a)f'(x) - (f(b) - f(a))$, luego $0 = (f - a)f'(c) - (f(b) - f(a))$, es decir, $f(b) - f(a) = f'(c)(b.a)$.

El Teorema de Lagrange puede interpretarse como sigue: El cociente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos de la gráfica de f $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$. El teorema nos dice que esta recta secante r es paraleta a alguna de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

3.3 Regla de L'Hopital

Esta regla es muy útil para resolver indeterminaciones en límites de la forma

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

cuando las dos funciones f y g son derivables.

Teorema 3.3.1 (Indeterminación 0/0). *Suponemos que se satisfacen las siguientes hipótesis:*

1. *Las funciones f y g están definidas y son derivables en un intervalo $I = (c - \delta, c + \delta)$ centrado en c (excepto, quizá en el punto c);*

2. $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$*;*

3. La derivada $g'(x) \neq 0$ para cualquier $x \in I$ (excepto, quizá en el punto c).

4. Existe el límite del cociente de las derivadas, $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo 3.3.2. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\tan bx}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: La indeterminación es del tipo $0/0$ y todas las condiciones del Teorema 3.3.1 se cumplen. Por tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{\frac{b}{\cos^2 bx}} = \frac{a}{b}.$$

Teorema 3.3.3 (Indeterminación $\pm\infty/\infty$)**.** *Supongamos que (1), (3) y (4) del Teorema 3.3.1 se cumplen y que (2) es reemplazada por*

(2') $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$.

Entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo 3.3.4. Evaluar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Solución: La indeterminación es de la forma ∞/∞. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Ejemplo 3.3.5. Calcular $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

Solución: La indeterminación es de la forma $0\cdot\infty$. Escribiendo $x\ln x$ como $\dfrac{\ln x}{1/x}$, se transforma en una del tipo ∞/∞. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Nota 3.3.6. La regla de L'Hôpital puede aplicarse también cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, con resultados totalmente análogos a los mostrados en los teoremas 3.3.1 y 3.3.3. En estos casos, tenemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nota 3.3.7. Las formas indeterminadas $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 o ∞^0, pueden ser reducidas a las formas $0/0$ o ∞/∞.

Ejemplo 3.3.8. Calcular $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

SOLUCIÓN: La indeterminación es de la forma ∞^0. Notar que $x^{1/x} = e^{\ln x/x}$ y entonces

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x/x} = e^{\lim_{x\to\infty} \ln x/x} = e^0 = 1.$$

Ejemplo 3.3.9. Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

SOLUCIÓN: La indeterminación es de la forma $\infty - \infty$. Operando

$$\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x},$$

que es de la forma $0/0$ en $x = 1$. Por la regla de L'Hôpital

$$\frac{\ln x}{1 - x^{-1} + \ln x}$$

que de nuevio es del tipo $0/0$ en $x = 1$. Una segunda aplicación de la regla de L'Hôpital da

$$\frac{x^{-1}}{x^{-2} + x^{-1}} = \frac{x}{1+x}$$

que tiene límite $1/2$ cuando $x \to 1$.

El siguiente ejemplo muestra que la aplicación de la regla de L'Hôpital puede llevar a resultados incorrectos si no se respetan las hipótesis de los teoremas anteriores.

Ejemplo 3.3.10. Es obvio que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$. Si en lugar de este enfoque directo intentamos aplicar la regla de L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{1} = +\infty,$$

que es obviamente incorrecto. El problema aquí es que el límite no es una indeterminación, por lo que la regla de L'Hôpital no puede aplicarse.

3.4 Optimización de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados $[a, b]$

Sea f una función continua definida en el intervalo $I = [a, b]$. Por el teorema de Weierstrass, f tiene en $[a, b]$ extremos globales (o absolutos). Por otra parte, dado que un extremo global es también local, si este extremo es interior y estén el intervalo abierto (a, b), entonces debe ser uno de los puntos críticos de f. Como consecuencia de esta reflexión, para hallar y clasificar los extremos de f en $[a, b]$, podemos usar el siguiente esquema.

1. Hallar los puntos críticos de f en (a, b);

2. Evaluar f en cada uno de los puntos críticos y en los extremos del intervalo, es decir, en a y en b;

3. Seleccionar aquellos puntos donde se alcanzan los valores mayores (máximos globales de f en $[a, b]$) y menores (míximos globales de f en $[a, b]$).

4. Estudiar el carácter del resto de puntos críticos y de a, b mediante el test de la derivada primera dado en el Teorema 3.2.8 (o mediante la segunda derivada que veremos más adelante). Para los extremos del intervalo, notar que si $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), entonces a es un mínimo (máximo) local de f en $[a, b]$, y si $f'(b) < 0$ ($f'(b) > 0$), entonces b es un mínimo (máximo) local de f en $[a, b]$.

Ejemplo 3.4.1. Hallar y clasificar los extremos de la función $f(x) = 3x - x^3$ en el intervalo $[-2, 2]$.

SOLUCIÓN: f es continua y $I = [-2, 2]$ es cerrado y acotado. El Teorema de Weierstrass asegura que f alcanza en I extremos globales. Éstos se hallan entre los puntos críticos de f en $(-2, 2)$. Del Ejemplo 3.2.9 sabemos que de hecho $-1 \in I$ es un minimizador local y que $1 \in I$ es un maximizador local de f. Además $f(-1) = -2$ y $f(1) = 2$. Por otra parte, $f(-2) = 2$ y $f(2) = -2$. En consecuencia, -1 y 2 son minimizadores globales de f en I y -2, 1 son maximizadores globales de f en I.

Tema 4

Aplicaciones de la derivada

4.1 Derivadas de orden superior

Si f es derivable en un intervalo abierto (a, b), entonces la derivada de f es una nueva función, $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Nada impide preguntarnos por la derivada de f'. Si existe, esta será la *segunda derivada* de f y escribiremos $(f')' = f''$. La *tercera derivada* de f es $(f'')' = f'''$ y podemos continuar de esta forma para definir derivadas de cualquier orden n. La derivada de orden n se escribe de manera general como $f^{n)}$, pero para valores concretos de n utilizamos la notación: f', f'', f''', f^{iv}, f^{v}, $\ldots$, es decir, números romanos desde la derivada cuarta en adelante.

Diremos que una función es de clase C^1 si su primera derivada es continua, de clase C^2 si su segunda derivada es continua, etc. Es de clase C^∞ si las derivadas de cualquier orden de f son funciones continuas. Todas las funciones elementales son de clase C^∞ en su dominio.

Ejemplo 4.1.1. Dada la función $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1$, tenemos que sus derivadas sucesivas son: $f'(x) = 16x^3 - 4x$, $f''(x) = 48x^2 - 4$, $f'''(x) = 96x$, $f^{(4)}(x) = 96$ y $f^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \geq 5$.

Ejemplo 4.1.2. La función $g(x) = x^{3/2}$ está definida y es continua en toda la recta real. Su derivada es $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, que también está definida y es continua en toda la recta real. La derivada segunda sin embargo es $g''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}$, que no está definida en 0. Por tanto, g es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}$, pero no de clase C^2 en $\mathbb{R}$. Por supuesto, si eliminamos el punto problemático, podremos decir que g es de clase C^∞ en $(0, \infty)$.

4.2 Polinomio de Taylor

4.2.1 Polinomio de Taylor de orden 2

Observación: la recta tangente o polinomio de Taylor de orden 1:

$$y = P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$$

se caracteriza porque cumple:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{(x-a)} = 0$$

como se puede comprobar por la regla de L'Hopital.

Pues bien, a partir del límite anterior podemos definir el polinomio de Taylor.

Definición 4.2.1. El polinomio de Taylor de orden n viene caracterizado por ser el único polinomio de grado $\leq n$ que cumple: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Del límite anterior, cuando $n = 2$, se deduce:

Teorema 4.2.2. $P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

Demostración : Usar la regla de L'Hopital.

Observación: las derivadas primera y segunda del polinomio de Taylor de orden 2 coinciden con las derivadas de la función.

4.2.2 Aproximación de segundo orden

El polinomio de Taylor, es la parábola tangente a f (si $f''(a) \neq 0$). ¿Para qué sirve el polinomio de Taylor, si $f''(a) \neq 0$? Es decir, ¿para qué sirve la parábola tangente?

1. Para conocer la posición relativa de la gráfica de f respecto a la recta tangente.
2. Además, si $f\ '(a) = 0$, para el estudio de los extremos locales, mediante el signo de $f''(a)$.

   Supongamos $f'(a) = 0, f''(a) \neq 0$. Si el polinomio tiene extremo local, f lo tiene. Obviamente, si la función no lo tiene, el polinomio tampoco.

   Ver también sección 4.3.
3. Para obtener mejores aproximaciones.

   Ejemplo 4.2.3. Hallar aproximadamente $\ln(0,9)$ y $\ln(1,2)$ utilizando:

   a) el polinomio de $f(x) = \ln(1+x)$ en $a = 0$: $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$; o bien

   b) el polinomio de $f(x) = \ln(x)$ en $a = 1$: $\ln(x) \approx (x-1) - (x-1)^2/2$

4.3 Condiciones de optimalidad de segundo orden

Sea f una función de clase C^2 en un intervalo abierto centrado en el punto c

Condiciones necesarias de segundo orden

- $f(c)$ es un mínimo local de $f \Rightarrow f''(c) \geq 0$;
- $f(c)$ es un máximo local de $f \Rightarrow f''(c) \leq 0$.

Condiciones suficientes de segundo orden

Sea c tal que $f'(c) = 0$.

- $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ mínimo local estricto de f;
- $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ máximo local estricto de f.

Ejemplo 4.3.1. Sea $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 16x^3 - 4x$ y $f''(x) = 48x^2 - 4$. El punto $c = 0$, ¿ puede ser un minimizador local de f? No, ya que $f''(0) = -4 < 0$. ¿ Es $c = 0$ un maximizador local de f? Sí, ya que es punto crítico, $f'(0) = 0$ y $f''(0)$ es negativo, como hemos calculado antes. ¿Tiene f otros extremos? Calculamos todos los puntos críticos: $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{2}$. Como, $f''(\pm\frac{1}{2}) = 8 > 0$, entonces ambos $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ son minimizadores locales.

Ejemplo 4.3.2. Sea $f(x) = 4x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 1$. Vamos a estudiar sus extremos locales mediante la primera y la segunda derivada. Tenemos que $f'(x) = 16x^3 - 8x^2$ y $f''(x) = 48x^2 - 16x$. Los puntos crı'ticos son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. Dado que $f''(0) = 0$, no podemos concluir nada con el criterio de la derivada segunda. Por otra parte, $f''(\frac{1}{2}) = \frac{48}{4} - \frac{16}{2} = 12 - 8 = 4 > 0$, luego $\frac{1}{2}$ es minimizador local de f. Si queremos saber el carácter de 0, podemos acudir al test de la derivada primera, como $f'(-1) < 0$, $f'(1/4) < 0$, luego f es decreciente si $x < \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $x = 0$ no es ni maximizador ni minimizador local.

4.4 Concavidad/convexidad y puntos de inflexión

Si la función f es derivable en cada punto de un intervalo (a, b), entonces la gráfica de f admite en cada punto $(x, f(x))$ con $x \in (a, b)$ una recta tangente que no es vertical.

Definición 4.4.1. Se dice que la función f es convexa (cóncava) en el intervalo (a, b) si en el intervalo (a, b) las rectas tangentes a la gráfica de f están por debajo o tocan (están por encima o tocan) a la gráfica de f.

Hay funciones que no son convexas ni cóncavas. Las únicas funciones que son a la vez convexas y cóncavas son las que tienen como gráfica una recta.

Teorema 4.4.2 (Caracterización de la concavidad o convexidad mediante la derivada)**.**

1. *f es convexa en I si y solo si su derivada es creciente en dicho intervalo.*
2. *f es cóncava en I si y solo si su derivada es decreciente en dicho intervalo.*

Teorema 4.4.3 (Condición suficiente de concavidad/convexidad)**.** *Supongamos que f es dos veces derivable en (a, b).*

1. *Si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es convexa en (a, b);*
2. *Si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava en (a, b).*

Teorema 4.4.4 (Extremos globales de funciones cóncavas o convexas)**.**

1. *Si f es convexa en I y c es un punto crítico de f, entonces c es un minimizador global de f en I.*

2. *Si f es cóncava en I y c es un punto crítico de f, entonces c es un maximizador global de f en I.*

Definición 4.4.5. Un punto c en el que la función f cambia de convexa a cóncava o viceversa es un punto de inflexión de f.

Teorema 4.4.6 (Condición necesaria de punto de inflexión)**.** *Si f tiene un punto de inflexión en c y f es clase C^2 en un intervalo abierto alrededor de c, entonces $f''(c) = 0$.*

Teorema 4.4.7 (Condición necesaria de punto de inflexión)**.** *Si f es dos veces derivable en un intervalo alrededor de c, $f''(c) = 0$ y el signo de f'' cambia al pasar por c, entonces c es un punto de inflexión de f.*

Si f es tres veces derivable, el teorema puede simplificarse a: si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces c es un punto de inflexión de f.

Ejemplo 4.4.8. Hallar los intervalos de concavidad/convexidad de $f(x) = (x + 6)^3(x - 2)$ y sus puntos de inflexión

Solución: El dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y la función dos veces derivable. Además

$$f'(x) = 3(x + 6)^2(x - 2) + (x + 6)^3 = (x + 6)^2(3(x - 2) + (x + 6)) = (x + 6)^2(4x),$$
$$f''(x) = 8(x + 6)x + 4(x + 6)^2 = 4(x + 6)(2x + (x + 6)) = 12(x + 6)(x + 2).$$

Luego $f'' \geq 0$ cuando $x \geq -2$ y cuando $x \leq -6$, $f'' \leq 0$ en $[-6, -2]$. Luego f es convexa en $(-\infty, -6]$ y en $[-2, +\infty)$, y es cóncava en $[-6, -2]$. Los puntos -6 y -2 son de inflexión.

4.5 Aplicaciones de la derivada en teoría de la empresa

4.5.1 Ingreso, coste y beneficio marginal

En economía aplicada, cuando hablamos de coste marginal de un producto, siendo x el nivel de producción, nos podemos referir al coste adicional de producir la última unidad, en cuyo caso el coste marginal vendría dado por la fórmula:

$$C(x) - C(x - 1) = C'(\alpha_x)$$

donde $\alpha_x \in (x - 1, x)$, por el teorema de Lagrange.

Por otro lado, cuando hablamos de coste marginal de un producto, siendo x el nivel de producción, nos podemos referir al coste adicional de producir una unidad más, en cuyo caso el coste marginal vendría dado por la fórmula:

$$C(x + 1) - C(x) = C'(\beta_x)$$

donde $\beta_x \in (x, x + 1)$, por el teorema de Lagrange.

En esta asignatura, cuando hablamos de coste marginal nos referimos siempre a la derivada de la función de costes. Si aceptamos que la derivada de la función de costes es bastante estable, los tres conceptos tienen valores aproximados, ya que podemos suponer que:

$$C'(\alpha_x) \approx C'(x) \approx C'(\beta_x)$$

Observación: las aproximaciones anteriores pueden afinarse así:

$C(x) - C(x-1) = C'(\alpha_x) < C'(x) < C'(\beta_x) = C(x+1) - C(x)$

sin más que suponer que $C(x)$ es convexa, lo que suele suceder. Y, por tanto, su derivada es creciente.

Lo mismo que hemos definido para la función de costes se puede hacer para la función de beneficios, pues:

$$B(x) - B(x-1) = B'(\alpha_x) \approx B'(x) \approx B'(\beta_x) = B(x+1) - B(x)$$

Análogamente al caso anterior, las aproximaciones anteriores pueden afinarse así:

$B(x) - B(x-1) = B'(\alpha_x) > B'(x) > B'(\beta_x) = B(x+1) - B(x)$ sin más que suponer que $B(x)$ es cóncava, lo que suele suceder. Y, por tanto, su derivada es decreciente.

4.5.2 Comportamientos de la empresa: minimización del coste medio-maximización del beneficio

1. $\dfrac{C(x)}{x}$, la función de costes medios es, en general, convexa; luego su mínimo se alcanza en el punto x_0 que satisface:
$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)'(x_0) = 0$$

   Observación: x_0 ha de ser positivo, superior a la producción mínima (si la hay) e inferior a la producción máxima (si la hay).

   Observación: una empresa que persiga la minimización del coste medio lo que esta buscando en realidad es que la probabilidad de que haya beneficios sea máxima, dado que esta empresa tiene incertidumbre sobre cual será el precio de venta de su producto. Téngase en cuenta que la empresa tiene beneficios cuando:
$$B(x) = x \cdot p(x) - C(x) > 0 \Longleftrightarrow p(x) > \frac{C(x)}{x}$$

   de ahí que dicha empresa busque que $\frac{C(x)}{x}$ tome un valor lo más pequeño posible.

2. $B(x)$, la función de beneficios es, en general, cóncava; luego su máximo se alcanza en el punto x_0 que satisface:
$$B'(x_0) = 0$$

   Observación: x_0 ha de ser positivo, superior a la producción mínima (si la hay) e inferior a la producción máxima (si la hay).

   Observación: una empresa que persiga la maximización del beneficio tiene un conocimiento cierto de cual será el precio $p(x)$ al cual venderá su producción x.

   Solo las empresas con una posición casi monopolista en el mercado en el que operan pueden tener esa certidumbre.

4.5.3 Problemas de optimización

Necesitamos recordar los conceptos de función de ingreso R, función de costes C, y función de beneficios, Π de una empresa monopolista estudiados en la lección dedicada a la continuidad de funciones. Denotábamos allí mediante $P(x)$ la función inversa de la demanda, y por x la cantidad del bien que produce y vende la empresa en el mercado. Consideramos tres problemas diferentes de optimización.

Problema del propietario: maximizar beneficios

$$\max \Pi(x) \quad \text{sujeto a las condiciones de factibilidad de } x.$$

Problema del jefe de ventas: maximizar los ingresos

$$\max R(x) \quad \text{sujeto a las condiciones de factibilidad de } x.$$

Problema del jefe de almacén: minimizar el coste medio

$$\min \frac{C(x)}{x} \quad \text{sujeto a las condiciones de factibilidad de } x.$$

Sean

$$P(x) = A - Bx;$$
$$C(x) = c + ax + bx^2,$$

donde $A > 0$, $B > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$ y $A \geq a$. Tenemos

$$R(x) = xP(x) = x(A - Bx);$$
$$\Pi(x) = R(x) - C(x) = x(A - Bx) - (c + ax + bx^2);$$
$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{c}{x} + a + bx.$$

Se supone que no hay restricciones de producción, de manera que la empresa puede producir el bien en cualquier cantidad x.

- Problema del propietario.

  $$\Pi'(x) = A - 2Bx - a - 2bx = 0 \Rightarrow x^* = \frac{A - a}{2(B + b)}.$$

  Dado que

  $$\Pi''(x) = -2(B + b) < 0,$$

  la función de beneficios es estrictamente cóncava, luego x^* maximiza beneficios (x^* es máximo global único).

- Problema del jefe de ventas.

$$R'(x) = A - 2Bx = 0 \Rightarrow x^{**} = \frac{A}{2B}.$$

Dado que

$$R''(x) = -2B < 0,$$

la función de ingresos es estrictamente cóncava, luego x^{**} maximiza beneficios (x^{**} es máximo global único)

- Problema del jefe de almacén.

$$\overline{C}'(x) = -\frac{c}{x^2} + b = 0 \Rightarrow x^{***} = \sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Dado que

$$\overline{C}''(x) = \frac{2c}{x^3} > 0,$$

el coste medio de producción es estrictamente convexo, luego x^{***} minimiza el coste medio (x^{***} es mínimo global único).