uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía I (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Estudio de funciones paso a paso

Estudio y representación de funciones

1. Dominio, simetría, puntos de corte y periodicidad

1.1. Dominio

Al conjunto de valores de x para los cuales está definida la función se le denomina dominio. Se suele representar por D o Dom.
Para determinar el dominio de una función debemos calcular los valores de x que anulan el denominador, que hacen negativo el radicando de una raíz de orden par, o que hacen negativo o nulo el argumento de un logaritmo, así como los valores que quedan limitados por la definición propia de la función. Estos valores son los que no pertenecen al dominio.

- La función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 8x + 15}$ no está definida para $x = -3$ y $x = -5$, porque para estos valores el denominador se anula. El dominio de esta función es $D = \Re - \{-5, -3\}$

- La función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ sólo tiene sentido para valores de $x^2 - 4 \geq 0$, es decir el dominio de la función sería: $D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

1.2. Simetrías

Existen dos tipos de simetría, respecto al eje OY y respecto del origen:

- Respecto de OY (funciones pares): $f(-x) = f(x)$
  Supongamos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
  En este caso $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = f(x)$, luego es simétrica respecto del eje OY.

- Respecto del origen (funciones impares):$f(-x) = -f(x)$
  Supongamos ahora la función $f(x) = x^3$.
  En este caso $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, luego es simétrica respecto del origen de coordenadas.

1.3. Puntos de corte con los ejes

- Con el eje OX: $f(x) = 0$
  Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 8x + 15}$
  Al hacer $f(x) = 0$ se obtiene $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. La función corta al eje OX en el punto (0,0).
  Con el eje OX puede haber 0, 1, 2... puntos de corte.

- Con el eje OY: $x = 0$
  Sea ahora la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$
  Al hacer $x = 0$ obtenemos $f(0) = 3$. Con lo que la función corta al eje OY en el punto

(0,3).
Con el eje OY puede haber un punto de corte o ninguno.

1.4. Periodicidad

La periodicidad de una función es uno de los aspectos que no se suelen estudiar con demasiada frecuencia, queda prácticamente restringido a funciones de tipo trigonométrico tales como sen, cos, tg...

Una función $f(x)$ es periódica de periodo k, cuando se verifica que $f(x) = f(x+k) = f(x-k) = f(x+2k) = ...$ para todos los x pertenecientes al dominio de la función. La periodicidad de una función nos sirve para obtener la gráfica de la función estudiando únicamente en el intervalo [0,k].

La función $f(x) = sen(x)$ es periódica de periodo k=2π.

2. Asintotas de una función

2.1. Asintotas verticales

Una función $f(x)$ tiene por asíntota vertical la recta de ecuación $x = a$ cuando existe al menos uno de los límites laterales de la función en dicho punto y vale $+\infty$ o $-\infty$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

La idea para calcular las asíntotas verticales es estudiar los límites por la izquierda y por la derecha de la función en los puntos que no pertenecen al dominio.

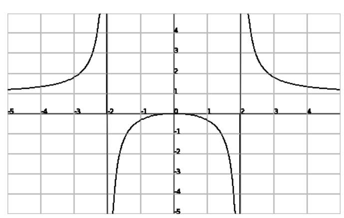

Figura 1: $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}$

En la Figura 1 se puede observar que cuando x tiende a 2^+ la función tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a 2^- la función tiende a $-\infty$, es decir:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = -\infty$$

2.2. Asíntotas horizontales

Una función $f(x)$ tiene por asíntota horizontal la recta de ecuación $y = b$ cuando existe al menos uno de los límites laterales de la función al tender x a $+\infty$ o $-\infty$ y éste vale b.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Para calcular las asíntotas horizontales debemos calcular los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de la función, si el valor obtenido es un número finito existirá la asíntota horizontal, no existiendo en caso contrario.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función va tomando valores cada vez más próximos a 1, igualmente sucede cuando x tiende a $-\infty$, la función también se aproxima a 1. En este caso tenemos que la recta de ecuación $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función, como se puede comprobar en la figura 2.

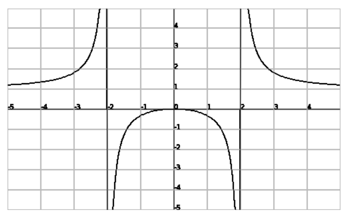

Figura 2: $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}$

2.3. Asíntotas oblicuas

Para determinar si una función tiene asíntota oblicua $y = mx + n$ debemos calcular los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{o } m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

La función tiene asíntota oblicua cuando m es finito y distinto de cero.

Una vez conocida la pendiente m, se puede pasar a calcular la ordenada en el origen, n, obteniendo el valor del límite de $f(x) - mx$ cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$:

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \qquad n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

Una truco bastante útil para ver si una función tiene asíntota oblicua es comprobar que el grado del denominador debe ser una unidad mayor que el del denominador. En cualquier caso si antes hemos calculado la asíntota horizontal y hemos visto que existe directamente podemos asegurar que no hay asíntota oblicua.

Podemos ver a continuación como calcular la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$:

Calculamos m, $m = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{x^2 - 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - x} = 1$

Para calcular n, $n = \lim_{x \to +\infty} (\dfrac{x^2 - 2}{x - 1} - x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2 - x^2 + x}{x - 1} = 1$

Con lo que la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$

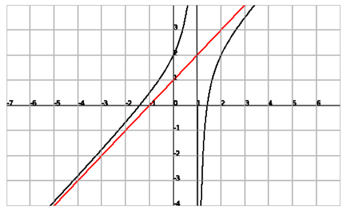

Figura 3: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$

3. Crecimiento y decrecimiento

Dada una función $y = f(x)$, derivable en el intervalo (a,b):
Si $f'(x)\,0, \forall x \in (a, b), f(x)$ es creciente en el intervalo.
Si $f'(x)0, \forall x \in (a, b), f(x)$ es decreciente en el intervalo.
Si $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b), f(x)$ es constante en el intervalo.

Una vez vista la definición formal de funciones crecientes y decrecientes la idea a la hora de estudiar la monotonía de una función es seguir los siguientes pasos:

1. Calculamos $f'(x)$.
2. Hallamos los puntos que anulan $f'(x)$, con lo que se nos determinarán una serie de intervalos en el dominio.
3. Calculamos el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos. En aquellos en los que $f'(x)\,0$, la función será creciente y donde $f'(x)0$ la función será decreciente.

Lo vemos a continuación con un ejemplo:
Sea la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$:

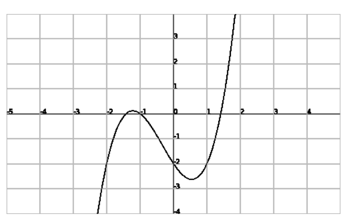

Figura 4: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$

1. Calculamos la derivada: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$
2. Hallamos los puntos que anulan $f'(x)$: $f'(x) = 0$; $3x^2 + 2x - 2 = 0$, de donde obtenemos $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{3}$ y $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{3}$.
   Estos puntos determinan en el dominio los siguientes intervalos:
   $(-\infty, \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{3}), (\dfrac{-1 - \sqrt{7}}{3}, \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{3}), (\dfrac{-1 + \sqrt{7}}{3}, +\infty)$
3. Cuando $x \in (-\infty, \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{3}), f'(x)\,0$
   por ejemplo $f'(-2) = 6 > 0$

Cuando $x \in (\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}), f'(x)0$
por ejemplo $f'(0) = -2 < 0$
Cuando $x \in (\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, +\infty), f'(x)\, 0$
por ejemplo $f'(1) = 3 > 0$
En los intervalos $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3})$ y $(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, +\infty$, la función es creciente, mientras que en el intervalo $(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3})$, la función es decreciente.

Como podemos comprobar en la gráfica de la función (ver figura 4)no hubiera sido fácil calcular a priori los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función.

4. Máximos y mínimos

Una vez estudiado el crecimiento y el decrecimiento de una función pasamos al estudio de sus máximos y sus mínimos. Se puede observar que conociendo los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función podemos saber si está tiene máximos o mínimos por simple deducción. Si una función es creciente hasta un punto y a partir de ese punto pasa a ser decreciente, resulta bastante obvio que en ese punto la función tiene un máximo. De todos modos es necesario ver esto de una manera más formal.

En principio vamos a partir de la idea de que si en un punto $x = a$ existe un máximo o un mínimo entonces $f'(a) = 0$. En cualquier caso la implicación la implicación en sentido contrario no indica necesariamente que si $f'(a) = 0$ vaya a haber un máximo o un mínimo en $x = a$. Ejemplo de esto tenemos en la función $f(x) = x^3$. Su derivada primera $f'(x) = 3x^2$ se anula cuando $x = 0$ pero esto no significa que en $x = 0$ haya un máximo o un mínimo como se puede comprobar en la gráfica de la función (ver figura5). Los puntos de la función en los que

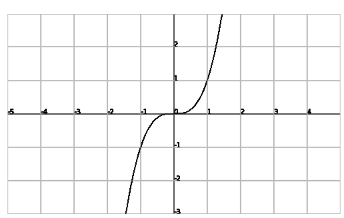

Figura 5: $f(x) = x^3$

la derivada es cero o no está definida se llaman **puntos críticos** y son los candidatos a ser posibles máximos y minímos de la función.
Veamos un sencillo ejemplo de ello:
Para determinar los puntos críticos (posibles máximos y mínimos) de la función $f(x) = x^3 - 3x$, calculamos en primer lugar $f'(x)$ y hallamos los valores que anulan esta primera derivada:
$f'(x) = 3x^2 - 3; \quad f'(x) = 0; 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ y $x_2 = 1$
Puesto que la función $f(x)$ está definida en todo el dominio, el conjunto de los puntos críticos es $\{-1, 1\}$
Por tanto es en -1 y en 1 en los únicos puntos en los que la función puede tener sus máximos o sus mínimos.

Existen dos criterios para determinar cuáles son los máximos y los mínimos de una función:

Criterio de la derivada primera
La idea es muy sencilla, se trata simplemente de observar que en los puntos donde hay un máximo la función pasa de ser creciente a decreciente y donde hay un mínimo pasa de ser decreciente a creciente. Una vez determinados los puntos críticos de la función lo único que hay que comprobar es como se comporta la derivada primera en cada uno de los intervalos, es decir si es creciente o decreciente y a partir de aquí, simplemente utilizando la lógica podemos determinar los máximos y los mínimos de la función.

Criterio de la derivada segunda
El criterio de la derivada segunda nos dice lo siguiente:
Sea la función $y = f(x)$ derivable en $x = a$ y con $f'(a) = 0$:
Si $f''(a) < 0$, la función tiene un máximo relativo en $x = a$.
Si $f''(a) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en $x = a$.
Este criterio no se puede utilizar cuando $f''(a) = 0$.

5. Concavidad y convexidad

Con la información obtenida hasta el momento normalmente suele ser suficiente para realizar la representación gráfica de la función, aunque a veces se hace necesario conocer alguna característica más.

Antes de nada conviene aclarar que no todos los autores se ponen de acuerdo con la idea de concavidad y convexidad, y así lo que para unos es cóncavo para otros es convexo y viceversa. El motivo es que estos términos son relativos, es decir dependen del punto en el que se encuentra el observador. En ocasiones para evitar estos problemas se habla de concavidad hacia arriba (convexidad) y concavidad hacia abajo (concavidad).

Analíticamente podemos decir que la función $y = f(x)$ es convexa en un intervalo si $f''(x) > 0$ en dicho intervalo. Análogamente, $y = f(x)$ es cóncava en un intervalo si $f''(x) < 0$ en ese intervalo. De lo anterior se deduce claramente que la determinación de los intervalos de concavidad y convexidad se basa en el estudio del signo de la derivada segunda.

Veremos el procedimiento que se sigue en estos casos con un sencillo ejemplo:
Sea $f(x) = x^4 - 6x^2$, definida en todos los reales.

1. Calculamos la derivada segunda de la función: $f'(x) = 4x^3 - 12x$, $f''(x) = 12x^2 - 12$
2. Igualamos a cero la derivada segunda y hallamos las raíces: $12x^2 - 12 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$
3. Representamos sobre la recta las raíces que hemos obtenido, con lo que en este caso la recta queda dividida en tres tramos, en los cuales $f''(x)$ debe tener signo fijo:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty$

4. Tomamos un punto en cada tramo y estudiamos el signo de $f''(x)$ en él:
   $f''(-2) = 36 > 0$; Convexa
   $f''(0) = -12 < 0$; Cóncava
   $f''(2) = 36 > 0$; Convexa

   Se suele representar del siguiente modo:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty$
$f''(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa
	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$

6. Puntos de inflexión

Los puntos de inflexión de una curva son aquellos en los que se produce un cambio de concavidad a convexidad o vicecersa.

Para confirmar la existencia de un punto de inflexión en $x = a$ basta con comprobar que hay cambio de signo de $f''(x)$ al pasar de la izquierda a la derecha de a.