uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare (OCW)

Comunicaciones Digitales

Capítulo 4

Modulaciones multipulso

Marcelino Lázaro

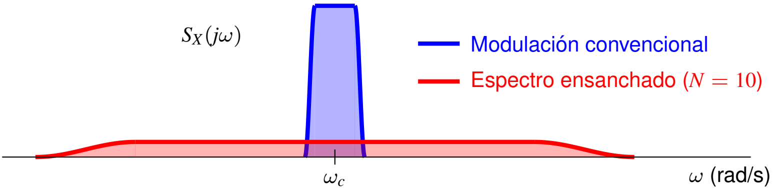
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

- Modulaciones de espectro ensanchado (SS)
  SS: *Spread Spectrum*
  - Modulaciones de espectro ensanchado por secuencia directa (DS-SS: *Direct Sequence - Spread Spectrum*)
  - Modulaciones de espectro ensanchado por salto en frecuencia (FH-SS: *Frequency Hopping - Spread Spectrum*)
  - Acceso múltiple y multiplexación basada en espectro ensanchado (CDMA)
    - CDMA: *Code Division Multiplex Access*
- Modulaciones multiportadora
  - Modulación (multiplexación) por división en frecuencia
    - FDM: *Frequency Division Multiplex*
  - Modulación por división en frecuencia ortogonal (OFDM)
    - OFDM: *Orthogonal Frequency Division Multiplex*
    - OFDM en tiempo continuo
    - OFDM en tiempo discreto

Modulaciones de espectro ensanchado

- Ancho de banda deliberadamente mayor que en modulaciones convencionales
  - Ancho de banda se incrementa (*ensancha*) por un factor N
    - Inmunidad a interferencias (desvanecimientos) de banda estrecha

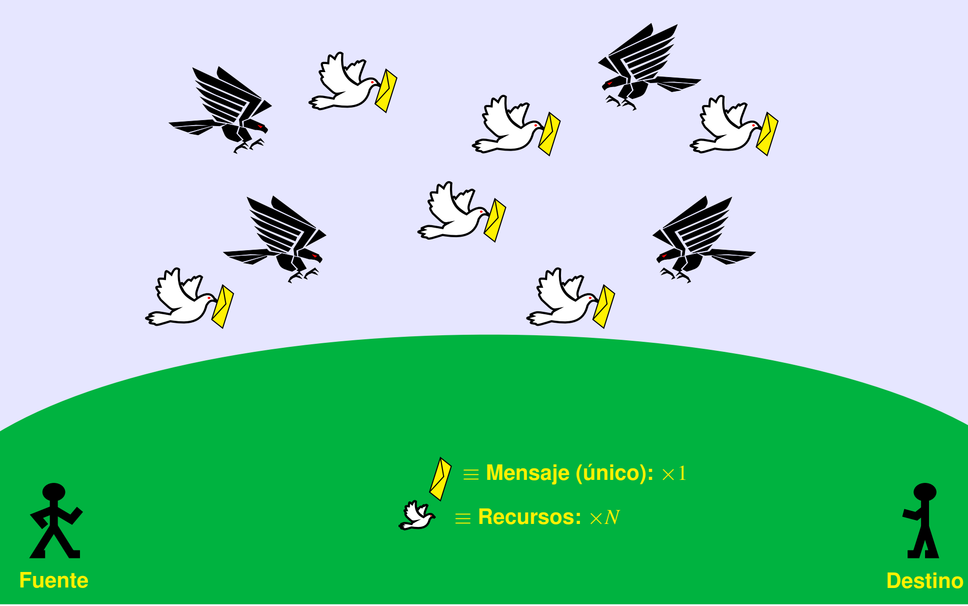


- Mito: espectro ensanchado incrementa la capacidad del sistema
  - Realidad:
    - Proporciona baja sensibilidad a distorsión del canal (incluido *jamming*)
    - Permite comunicaciones seguras
- Origen militar: combatir interferencias intencionadas (*jamming*)
  - Aplicaciones actuales
    - Aplicaciones que requieran robustez contra atenuaciones locales (en frecuencia)
    - Limita la densidad de flujo de potencia en enlaces descendentes de satélites
    - Acceso múltiple o multiplexación
      - CDMA: *Code Division Multiple Access*

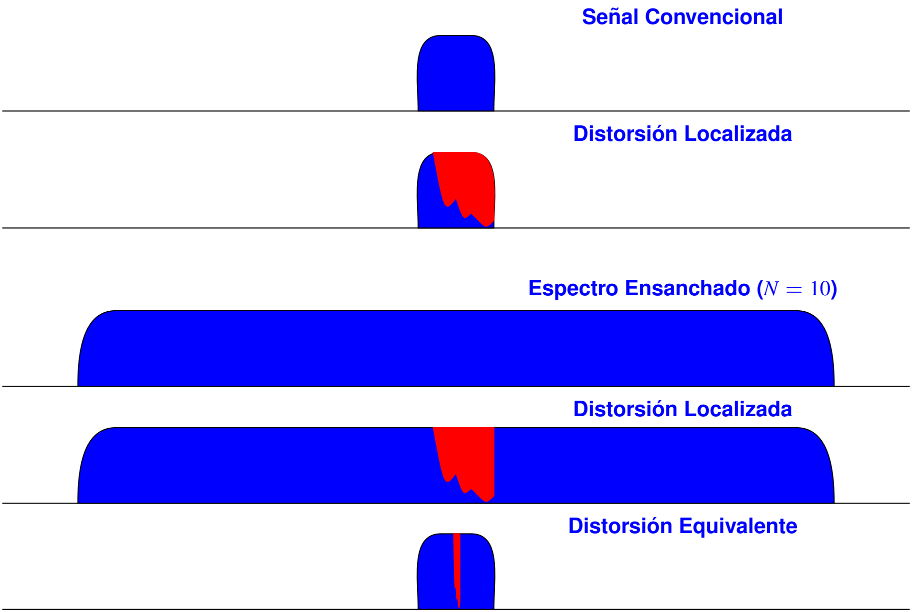
Canal ideal

Canal “agresivo”

Canal "agresivo": espectro ensanchado



Espectro ensanchado: idea intuitiva



Aumento del ancho de banda

- Señal PAM - Expresiones en tiempo y frecuencia ($R_s = \frac{1}{T}$ baudios)

$$s(t) = \sum_n A[n]\ g(t - nT),\ \ S_s(j\omega) = \frac{1}{T}\ S_A(e^{j\omega T})\ |G(j\omega)|^2$$

BB: $W = \frac{\pi}{T}(1+\alpha)$ rad/s, $B = \frac{R_s}{2}(1+\alpha)$ Hz

$$x(t) = \sqrt{2}\mathcal{R}e\{s(t)\ e^{j\omega_c}\},\ \ S_x(j\omega) = \frac{1}{2}\left[S_s(j\omega - j\omega_c) + S_s^*(-j\omega - j\omega_c)\right]$$

PB: $W = \frac{2\pi}{T}(1+\alpha)$ rad/s, $B = R_s(1+\alpha)$ Hz

  - Ancho de banda usando $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$
    - Transmisión a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios con factor de caída α

- Objetivo: Aumentar el ancho de banda por un factor N
  - Filtros transmisores en raíz de coseno alzado

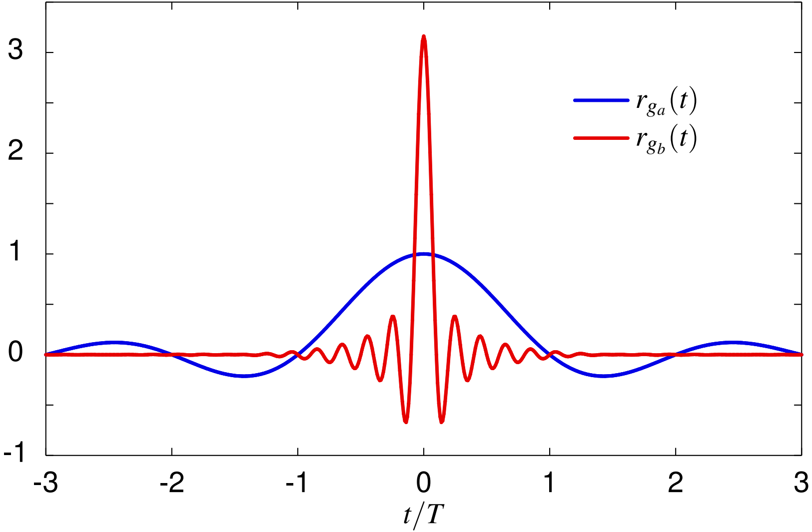
$$\text{BB: } W = N \times \frac{\pi}{T}(1+\alpha) \text{ rad/s},\ \ \text{PB: } W = N \times \frac{2\pi}{T}(1+\alpha) \text{ rad/s}$$

$$\text{BB: } B = N \times \frac{R_s}{2}(1+\alpha) \text{ Hz},\ \ \text{PB: } B = N \times R_s(1+\alpha) \text{ Hz}$$

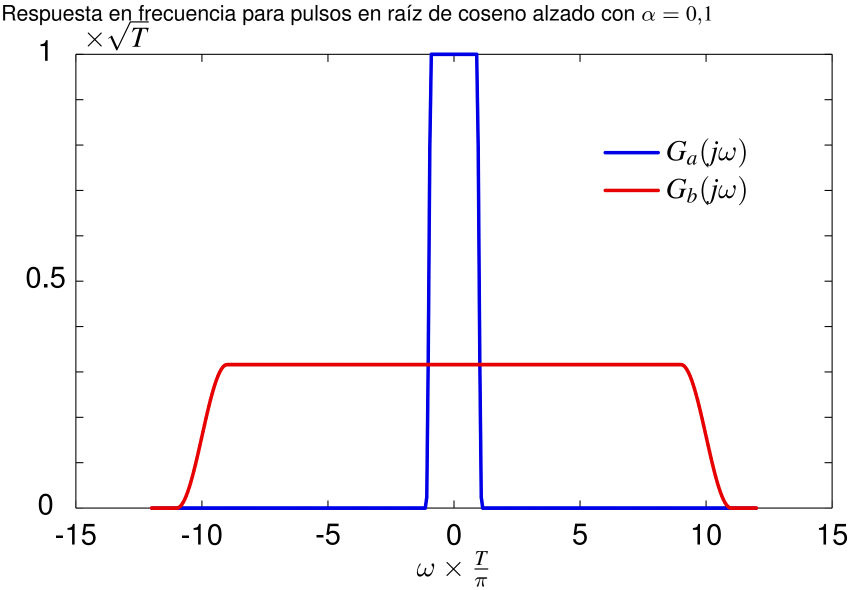
- Transmisión sin ISI - Posible opción: pulsos cumpliendo Nyquist a T/N
  - Si se cumple Nyquist a T/N se cumple a T
  - El ancho de banda aumenta por un factor N
  - Problema: función de ambigüedad localizada en el tiempo
    $\Rightarrow$ Potencia de la señal localizada en tiempo

Pulsos coseno alzado: $g_a(t)$ a T y $g_b(t)$ a T/N ($N = 10, \alpha = 0{,}1$)

Función de ambigüedad para pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0{,}1$

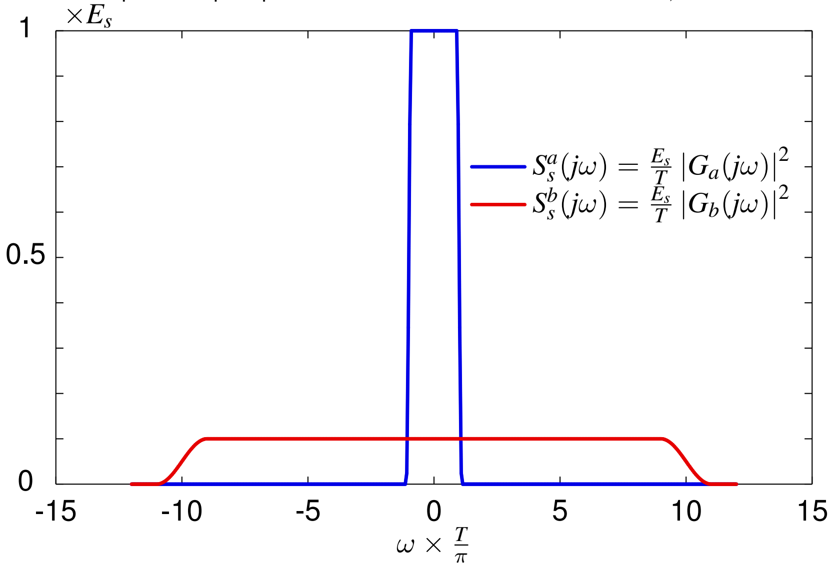


Respuesta en frecuencia a T y T/N ($N = 10, \alpha = 0{,}1$)

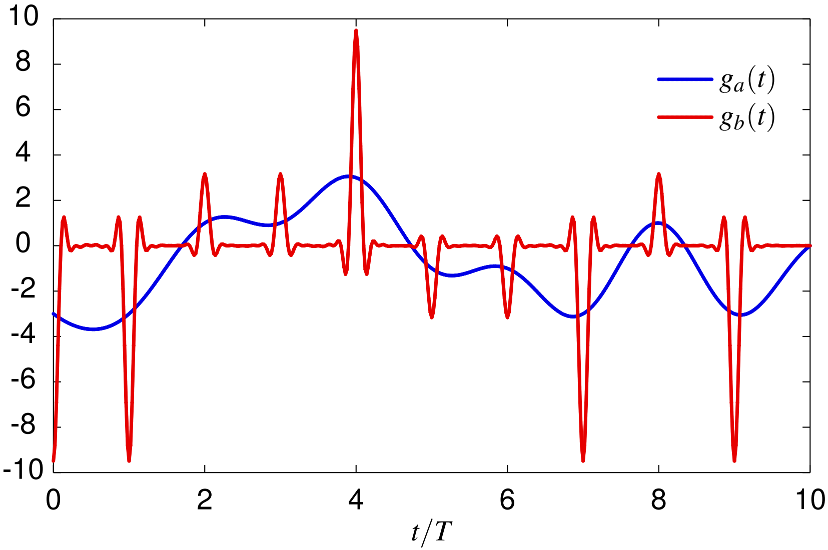


$S_s(j\omega)$ usando pulsos a T y T/N ($N=10, \alpha=0{,}1$)

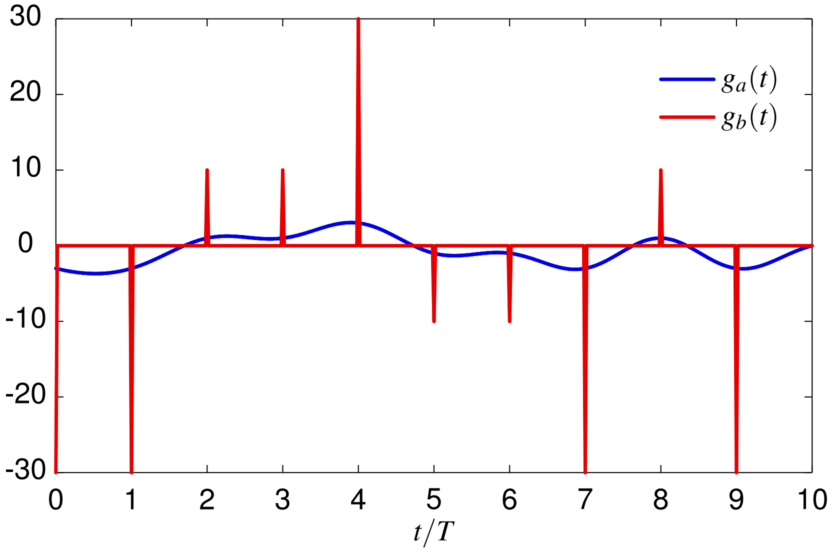
Densidades espectrales para pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0{,}1$



Forma de onda: 4-PAM, $N = 10$, $\alpha = 0{,}5$



Forma de onda: 4-PAM, $N = 100$, $\alpha = 0{,}5$



Espectro ensanchado por secuencia directa

DSSS: *Direct Sequence Spread Spectrum*

- Alternativa que evita la localización en tiempo de la potencia de la señal
- Familia de pulsos

$$\boxed{g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; g_c(t - mT_c)}$$

Combinación lineal de N réplicas de un pulso, $g_c(t)$, desplazadas múltiplos de $T_c = \frac{T}{N}$ con coeficientes $x[m]$

  - $x[m]$: secuencia ensanchadora (secuencia de *chip*)
    - N valores: $\{x[0], x[1], x[2], \cdots, x[N-1]\}$
  - T_c: período de *chip* $T_c = \frac{T}{N}$
  - $g_c(t)$: pulso tal que $r_{g_c}(t)$ cumple Nyquist a T_c

- Expresión analítica de la señal modulada

$$\boxed{s(t) = \sum_n A[n]\; g(t - nT) = \sum_n A[n] \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; g_c(t - mT_c - nT)}_{g(t-nT)}}$$

Ejemplo de pulso: rectangular $N = 4$

- Tiempo de chip: $T_c = \frac{T}{N} = \frac{T}{4}$
- Filtro a tiempo de chip

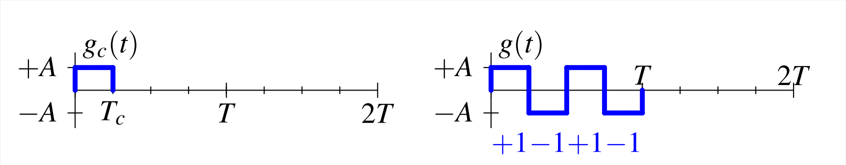
$$g_c(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < T_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Filtro transmisor (a tiempo de símbolo)

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; g_c(t - mT_c)$$

- Secuencia de ensanchado

n	0	1	2	3
$x[n]$	$+1$	-1	$+1$	-1

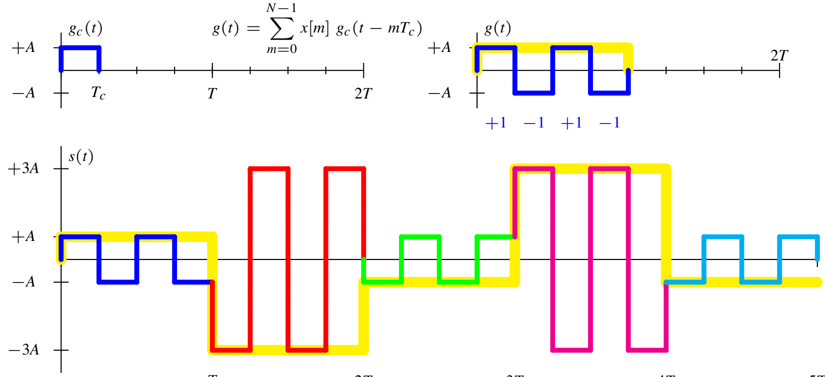


Generación de las señales $s(t)$ (Ejemplo $N=4$)

- Secuencia a transmitir:

n	0	1	2	3	4
$A[n]$	$+1$	-3	-1	$+3$	-1

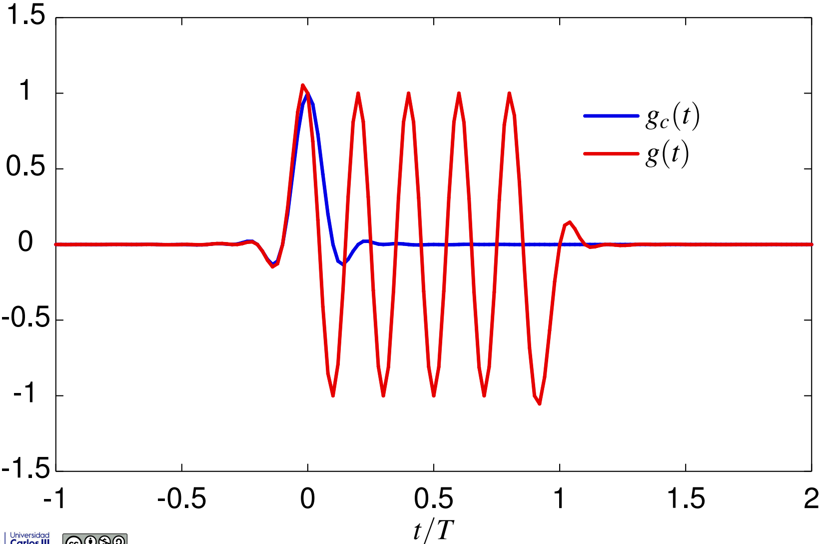
- Secuencia de ensanchado ($N=4$): $x[0]=+1,\ x[1]=-1,\ x[2]=+1,\ x[3]=-1$



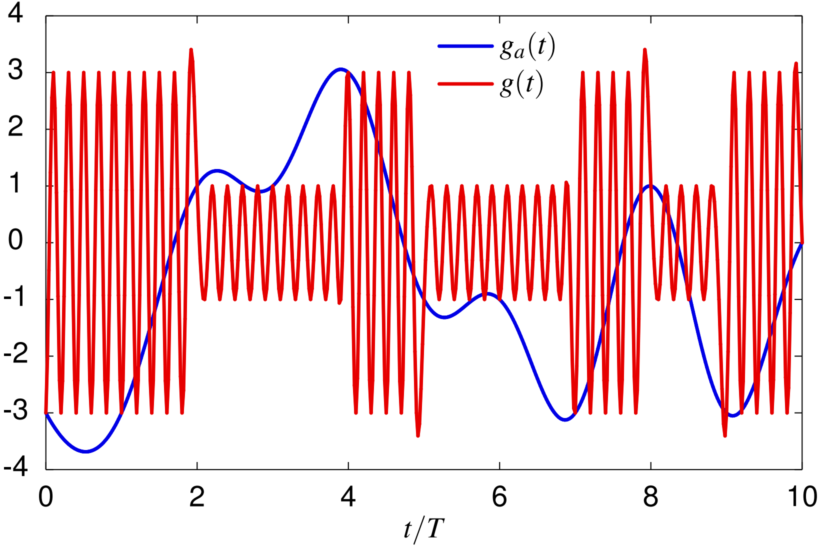
$s[m]$	$+1$	-1	$+1$	-1	-3	$+3$	-3	$+3$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+3$	-3	$+3$	-3	-1	$+1$	-1	$+1$
$A[n]$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-3	-3	-3	-3	-1	-1	-1	-1	$+3$	$+3$	$+3$	$+3$	-1	-1	-1	-1
$\hat{x}[m]$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

Ejemplo de pulso: coseno alzado $N = 10$, $\alpha = 0{,}5$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1



Ejemplo de forma de onda: Coseno alzado $N = 10$, $\alpha = 0{,}5$

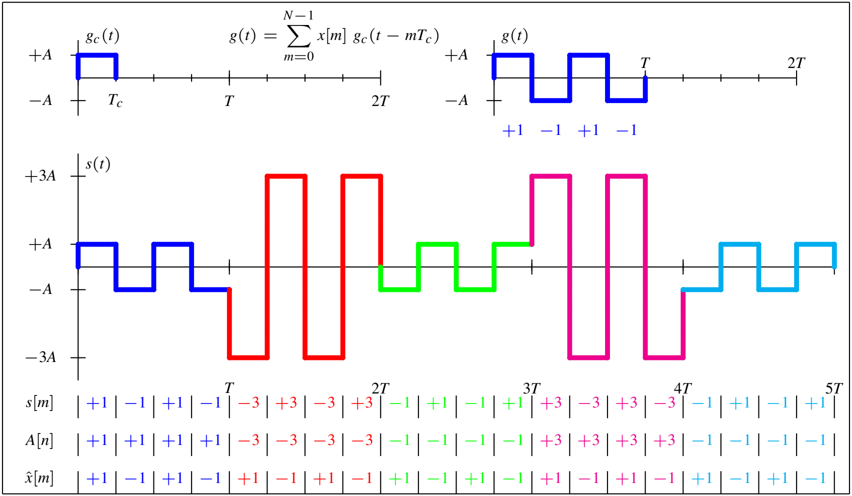


Generación de las señales $s(t)$ (Ejemplo $N = 4$)

- Secuencia a transmitir:

n	0	1	2	3	4
$A[n]$	$+1$	-3	-1	$+3$	-1

- Secuencia de ensanchado ($N = 4$): $x[0] = +1,\ x[1] = -1,\ x[2] = +1,\ x[3] = -1$



DSSS - Notación alternativa

- Algunas definiciones
  - Secuencia períodica $\tilde{x}[m]$ a partir de la secuencia de ensanchado

$$\tilde{x}[m] = \sum_k x[m - kN]$$

  - Ventana causal discreta de N muestras

$$w_N[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

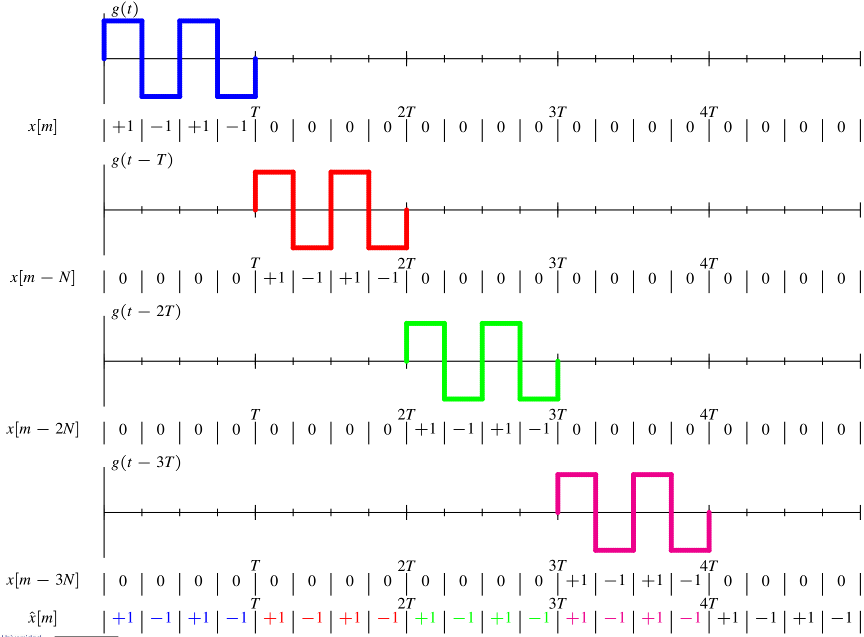
- Se reescribe la ecuación para $s(t)$, reescribiendo $g(t - nT)$

$$s(t) = \sum_n A[n] \times \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, g_c(t - mT_c - nT)}_{g(t-nT)}$$

$$= \sum_n A[n] \times \sum_{m=nN}^{nN+N-1} x[m - nN]\, g_c(t - mT_c)$$

$$= \sum_n A[n] \times \sum_m \tilde{x}[m]\, w_N[m - nN]\, g_c(t - mT_c)$$

Expresiones para los pulsos retardados (Ejemplo $N = 4$)



DSSS - Notación alternativa (II)

- Se reordena la expresión anterior

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_n A[n] \sum_m \tilde{x}[m]\; w_N[m-nN]\; g_c(t-mT_c) \\ &= \sum_m \underbrace{\tilde{x}[m]\; \sum_n A[n]\; w_N[m-nN]}_{s[m]}\; g_c(t-mT_c) \\ &= \sum_m s[m]\; g_c(t-mT_c) \end{aligned}$$

- Interpretación de la expresión analítica resultante
  - Generación de la señal $s(t)$ transmitiendo la secuencia de muestras $s[m]$ a tiempo de chip, T_c, con filtro transmisor a T_c
  - Generación de la secuencia de muestras a tiempo de chip, $s[m]$

$$\boxed{s[m] = \tilde{x}[m]\; \sum_n A[n]\; w_N[m-nN]}$$

Transmisor DSSS - Generación de muestras y señal

- Muestras de la señal a T_c (muestras $s[m]$)

$$\boxed{s[m]=\tilde{x}[m]\sum_n A[n]\,w_N[m-nN],\qquad s[m]=A[n]\otimes x[m]}$$

- Generación de $s[m]$ por bloques de tamaño N muestras

$$s[m]=\{\underbrace{s[0],s[1],\cdots,s[N-1]}_{s^{(0)}[m]},\underbrace{s[N],s[N+1],\cdots,s[2N-1]}_{s^{(1)}[m]},\cdots,\underbrace{s[nN],s[nN+1],\cdots,s[(n+1)N-1]}_{s^{(n)}[m]},\cdots\}$$

Bloque de índice n: $s^{(n)}[m]$, N muestras $\{s^{(n)}[0],s^{(n)}[1],\cdots,s^{(n)}[N-1]\}$

Muestras del bloque de índice n: $s^{(n)}[m]=s[nN+m],\ m\in\{0,1,\cdots,N-1\}$

Secuencia de muestras en el transmisor: $s[m]=\sum_n s^{(n)}[m-nN]$

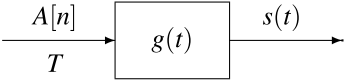
- Cada símbolo $A[n]$ genera las N muestras de un bloque (índice n)
  - El valor de $A[n]$ se multiplica por la secuencia de ensanchado

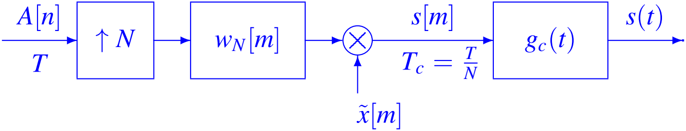
$$\boxed{s^{(n)}[m]=A[n]\times x[m]}$$

$$\boxed{\left\{s^{(n)}[m]\right\}_{m=0}^{N-1}\equiv\{\underbrace{A[n]\times x[0]}_{s[nN]},\underbrace{A[n]\times x[1]}_{s[nN+1]},\underbrace{A[n]\times x[2]}_{s[nN+2]},\cdots,\underbrace{A[n]\times x[N-1]}_{s[nN+N-1]}\}}$$

Transmisor DSSS - Diagrama de bloques

- Diagramas de bloques del transmisor





- Las dos estructuras son equivalentes
  - Modular la secuencia de símbolos (a tiempo de símbolo T) con un filtro $g(t)$ definido a tiempo de símbolo T
  - Modular la secuencia de muestras (a tiempo de chip T_c) con un filtro $g_c(t)$ definido a tiempo de chip T_c
- La implementación de la segunda opción es más simple
  - La implementación del filtro transmisor $g(t)$ puede ser compleja
    - ★ Combinación lineal de N filtros con $r_{g_c}(t)$ cumpliendo Nyquist
  - La implementación del filtro transmisor $g_c(t)$ es simple
    - ★ Generación de las muestras $s[m]$ a partir de $A[n]$ eficiente vía software

Espectro de la señal DSSS en banda base

- Densidad espectral de potencia de la señal en banda base $s(t)$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T}\, S_A\left(e^{j\omega T}\right)\ |G(j\omega)|^2$$

- Respuesta en frecuencia del pulso $g(t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ g_c(t - mT_c)$$

$$G(j\omega) = G_c(j\omega)\ \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ e^{-j\omega m T_c} = G_c(j\omega)\ X\left(e^{j\omega T_c}\right)$$

- Densidad espectral de potencia de la señal DSSS

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T}\, S_A\left(e^{j\omega T}\right)\ \left|X\left(e^{j\omega T_c}\right)\right|^2\ |G_c(j\omega)|^2$$

Ancho de banda de las señales DSSS

- Ancho de banda de la señal en banda base

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T}\, S_A\left(e^{j\omega T}\right)\, \left|X\left(e^{j\omega T_c}\right)\right|^2\, |G_c(j\omega)|^2$$

  - El ancho de banda lo define el filtro a tiempo de chip
    - Filtros de la familia del coseno alzado (raíz)

$$B = \frac{R_s}{2}\,(1+\alpha)\times N \text{ Hz}$$

- Ancho de banda de la señal paso banda

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2}\left[S_s(j\omega - j\omega_c) + S_s^*(-(j\omega + j\omega_c))\right]$$

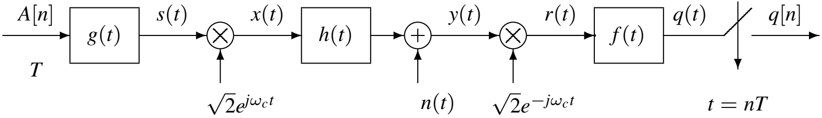
  - Para una tasa de símbolo dada, se dobla el ancho de banda

$$B = R_s\,(1+\alpha)\times N \text{ Hz}$$

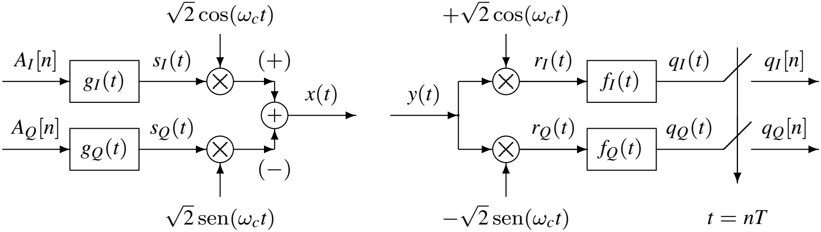
    - Cada T seg. ahora se transmiten dos símbolos ($A_I[n]$ y $A_Q[n]$)
      - Se mantiene la eficiencia espectral

Transmisión paso banda

- Modulación paso banda - Representación compleja



- Representación en componentes en fase y cuadratura



- Secuencia de ensanchado y filtro $g(t)$ complejos

$$\boxed{x[m] = x_I[m] + jx_Q[m],\ g(t) = g_I(t) + jg_Q(t)}$$

  - Habitualmente, $x_I[m] = x_Q[m]$ (aunque no es necesario)

Receptor (complejo) en banda base

- Filtro receptor $f(t) = g^*(-t)$ y señal recibida en banda base $r(t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ g_c(t - mT_c) \Rightarrow g^*(-t) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\ g_c^*(-t - mT_c) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\ g_c(-t - mT_c)$$

<u>NOTA</u>: $g_c^*(-t) = g_c(-t)$, ya que $g_c(t)$ es un filtro real

$$q[n] = (r(t) * g^*(-t))\Big|_{t=nT} = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\ (r(t) * g_c(\underbrace{-t - mT_c}_{-(t+mT_c)}))\Big|_{t=nT}$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\ \left(\underbrace{r(t) * g_c(-t)}_{v(t)}\right)\Bigg|_{t=\underbrace{nT + mT_c}_{(nN+m)T_c}}$$

  - Señal de salida del filtro receptor a tiempo de chip: $v(t) = r(t) * g_c(-t)$
  - Señal en tiempo discreto muestreada a T_c: $v[m] = v(t)\Big|_{t=mT_c=m\frac{T}{N}} = v(mT_c)$

- La salida del demodulador se puede escribir como

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\ v[nN + m]$$

Proceso por bloques de N muestras

- Procesando por bloques de N muestras de la secuencia $v[m]$

$$v[m] = \{\underbrace{v[0], v[1], \cdots, v[N-1]}_{v^{(0)}[m]}, \underbrace{v[N], v[N+1], \cdots, v[2N-1]}_{v^{(1)}[m]}, \cdots, \underbrace{v[nN], v[nN+1], \cdots, v[(n+1)N-1]}_{v^{(n)}[m]}, \cdots\}$$

Bloque de índice n: $v^{(n)}[m]$, N muestras $\{v^{(n)}[0], v^{(n)}[1], \cdots, v^{(n)}[N-1]\}$

Muestras del bloque de índice n: $v^{(n)}[m] = v[nN+m],\ m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$

Secuencia de muestras en el receptor: $v[m] = \sum_n v^{(n)}[m-nN]$

- Obtención de $q[n]$: procesado del bloque de índice n

$$\boxed{q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\, v[nN+m] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\, v^{(n)}[m]}$$

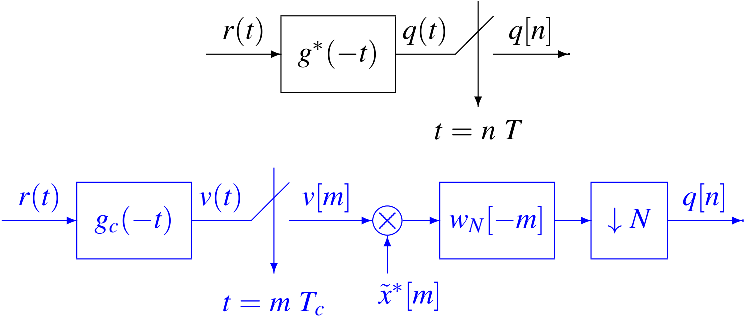
$$q[n] = \underbrace{v^{(n)}[0]}_{v[nN]} \times x^*[0] + \underbrace{v^{(n)}[1]}_{v[nN+1]} \times x^*[1] + \underbrace{v^{(n)}[2]}_{v[nN+2]} \times x^*[2] + \cdots + \underbrace{v^{(n)}[N-1]}_{v[nN+N-1]} \times x^*[N-1]$$

Receptor en banda base - Diagrama de bloques

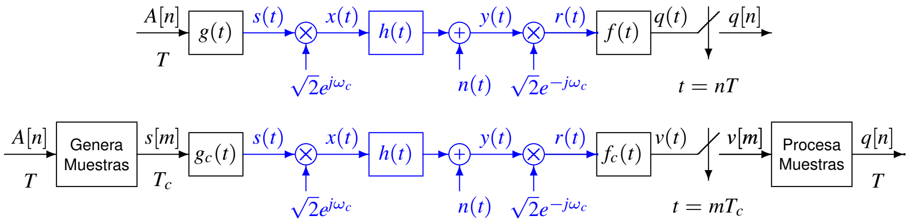
- Expresión para la salida del demodulador

$$
\begin{aligned}
q[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]\; v[nN+m] \\
&= (v[m]\; \tilde{x}^*[m]) * w_N[-m-nN]
\end{aligned}
$$

- Diagrama de bloques del receptor



Canales discretos equivalentes



- Filtros receptores - filtros adaptados: $f(t) = g^*(-t), \;\; f_c(t) = g_c(-t)$
- Respuestas conjuntas transmisor/receptor/canal
  - Transmisión de $A[n]$ a tiempo de símbolo: $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) = r_g(t) * h_{eq}(t)$
  - Transmisión de $s[m]$ a tiempo de chip: $d(t) = g_c(t) * h_{eq}(t) * f_c(t) = r_{g_c}(t) * h_{eq}(t)$
- Canales discretos equivalentes
  - A tiempo de símbolo

    $p[n] = p(t)\big|_{t=nT} = p(nT)$ relaciona $q[n]$ con $A[n]$: $q[n] = A[n] * p[n] + z[n]$

  - A tiempo de chip

    $d[m] = d(t)\big|_{t=mT_c} = d(mT_c)$ relaciona $v[m]$ con $s[m]$: $v[m] = s[m] * d[m] + z_c[m]$

Características de ruido del receptor (paso banda)

- El canal introduce ruido aditivo blanco y gausiano $n(t)$ con DEP $S_n(j\omega)$
- Si se cumplen las siguientes condiciones
  - $f(t) = g^*(-t)$
  - $n(t)$ es blanco y $S_n(j\omega) = N_0/2$ W/Hz

$z[n]$ es blanco y gausiano con varianza

$$\boxed{\sigma_z^2 = N_0\ \mathcal{E}\left\{g(t)\right\}}$$

Parte real e imaginaria independientes y con varianzas $\frac{N_0}{2}\ \mathcal{E}\left\{g(t)\right\}$

$z_c[m]$ es blanco y con varianza

$$\boxed{\sigma_{z_c}^2 = N_0\ \mathcal{E}\left\{g_c(t)\right\}}$$

Parte real e imaginaria independientes y con varianzas $\frac{N_0}{2}\ \mathcal{E}\left\{g_c(t)\right\}$

Energía de los pulsos $g_c(t)$ y $g(t)$

- Definición del pulso a tiempo de símbolo $\boxed{g(t)=\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; g_c(t-mT_c)}$
- Energía del pulso $g(t)$

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{E}\{g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\; g^*(t)\; dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; g_c(t-mT_c)\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell]\; g_c(t-\ell T_c)\right)\; dt\\
&= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell] \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t-mT_c)\; g_c(t-\ell T_c)\; dt\\
&= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_c(\tau)\; g_c(\underbrace{\tau-\ell T_c+mT_c}_{-([\ell-m]T_c-\tau)})\; d\tau}_{r_{g_c}([\ell-m]T_c)}\\
&= \left[\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2\right] \times \mathcal{E}\{g_c(t)\}
\end{aligned}}$$

NOTA: Si $r_{g_c}(t)$ cumple Nyquist a T_c, $r_{g_c}([\ell-m]T_c)$ es nulo para $\ell \neq m$, y para $\ell = m$ (propiedad de una función de ambigüedad temporal) vale la energía de $g_c(t)$, es decir $r_{g_c}([\ell-m]T_c = \mathcal{E}\{g_c(t)\}\;\delta[\ell-m]$

Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo, $p[n]$

- El filtro receptor es $f(t) = g^*(-t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; g_c(t - mT_c),\;\; f(t) = g^*(-t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell]\; g_c(-t - \ell T_c)$$

- Canal discreto equivalente

$$p[n] = \left(g(t) * h_{eq}(t) * f(t)\right)\Big|_{t=nT}$$

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell] \left(g_c(t - mT_c) * h_{eq}(t) * g_c(\underbrace{-t - \ell T_c}_{-(t+\ell T_c)})) \right)\Bigg|_{t=nT}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell] \left(\underbrace{g_c(t) * h_{eq}(t) * g_c(-t)}_{d(t)} \right)\Bigg|_{t=\underbrace{nT + \ell T_c - mT_c}_{(nN+\ell-m)T_c}}$$

$$\boxed{p[n] = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell]\; d[nN + \ell - m]}$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo

- Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo

$$\boxed{p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell]\; d[nN+\ell-m]}$$

- Factor de ensanchado $N = 10$
  - Secuencia de ensanchado

$$x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6], x[7], x[8], x[9]$$

- Canal discreto equivalente a tiempo de chip

$$d[m] = a\;\delta[m] + b\;\delta[m-2] + c\;\delta[m-14]$$

  - Valores no nulos de $d[nN+\ell-m]$
    - ★ $nN+\ell-m = 0$
    - ★ $nN+\ell-m = 2$
    - ★ $nN+\ell-m = 14$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (II)

- Caso $nN+\ell-m=0 \Rightarrow d[nN+\ell-m]=a$
  - $n=0 \rightarrow \ell-m=0 \rightarrow \ell=m$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, x^*[m] = \sum_{m=0}^{9} |x[m]|^2 = a_1$$

- Caso $nN+\ell-m=2 \Rightarrow d[nN+\ell-m]=b$
  - $n=0 \rightarrow \ell-m=2 \rightarrow \ell=m+2$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, x^*[m+2] = \sum_{m=0}^{7} x[m]\, x^*[m+2] = b_1$$

  - $n=1 \rightarrow N+\ell-m=2 \rightarrow \ell=m-8$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, x^*[m-8] = \sum_{m=8}^{9} x[m]\, x^*[m-8] = b_2$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (III)

- Caso $nN + \ell - m = 14 \Rightarrow d[nN + \ell - m] = c$
  - $n = 1 \rightarrow N + \ell - m = 14 \rightarrow \ell = m + 4$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ x^*[m+4] = \sum_{m=0}^{5} x[m]\ x^*[m+4] = c_1$$

  - $n = 2 \rightarrow 2N + \ell - m = 14 \rightarrow \ell = m - 6$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ x^*[m-6] = \sum_{m=6}^{9} x[m]\ x^*[m-6] = c_2$$

- Canal discreto equivalente

$$\begin{aligned} p[n] = &(a \times a_1 + b \times b_1)\ \delta[n] \\ &+ (b \times b_2 + c \times c_1)\ \delta[n-1] \\ &+ (c \times c_2)\ \delta[n-2] \end{aligned}$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (IV)

- Secuencia de ensanchado

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[m]$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1

- Valores relacionados con $p[n]$, para $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$

$$a_1 = 10,\ b_1 = -2,\ b_2 = 0,\ c_1 = +2,\ c_2 = 0$$

$$p[n] = 11\ \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

  - Términos relacionados con la ISI

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ x^*[m-k_a],\ \ \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ x^*[m+k_b]}$$

Condiciones para evitar la ISI

- No hay interferencia intersimbólica si $d[m] = C\ \delta[m]$
  - Si no hay interferencia sobre $s[m]$ no hay interferencia sobre $A[n]$
- Si $d[m] \neq C\ \delta[m]$, la ISI se evita si

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ x^*[m \pm k] = C\ \delta[k]}$$

  Esta condición se cumple cuando
  - La función de ambigüedad de $x[m]$ es una delta
  - Espectro de $x[m]$ constante $\boxed{\left|X(e^{j\omega})\right|^2 = C}$
- Ejemplos de secuencias con espectro (casi) plano
  - $x[m] = e^{j\theta}\ \delta[m-k]$ (problema: localización)
  - Secuencias de pseudo-ruido: $\left|X(e^{j\omega})\right|^2 \approx C$

Energía de los pulsos $g_c(t)$ y $g(t)$ - Implicación práctica

- Transmisión sobre un canal ideal ($h_{eq}(t) = \delta(t)$)
- Canal discreto equivalente a tiempo de chip

$$d[m] = d(t)\big|_{t=mT_c} = (g_c(t) * h_{eq}(t) * g_c(-t))\big|_{t=mT_c} = r_{g_c}(t)\big|_{t=mT_c} = \mathcal{E}\left\{g_c(t)\right\}\ \delta[m]$$

- Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo

$$\boxed{p[n] = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\ x^*[\ell]\ d[nN+\ell-m]}$$

  - Dado $d[m]$, términos no nulos sólo para $nN+\ell-m=0$
    - ★ Esto sólo es posible si $n=0$ y $\ell=m$

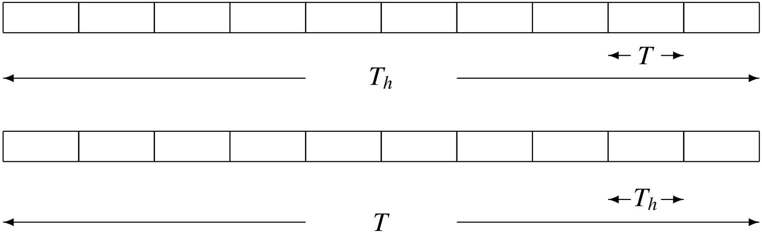
$$\boxed{p[n] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 \times \mathcal{E}\left\{g_c(t)\right\}\right]\ \delta[n] = \mathcal{E}\left\{g(t)\right\}\ \delta[n]}$$

NOTA: $p[n] = p(t)\big|_{t=nT} = (g(t) * h_{eq}(t) * g(-t))\big|_{t=nT} = r_g(t)\big|_{t=nT} = \mathcal{E}\left\{g(t)\right\}\ \delta[n]$

Espectro ensanchado por salto en frecuencia

FHSS: *Frequency Hopping Spread Spectrum*

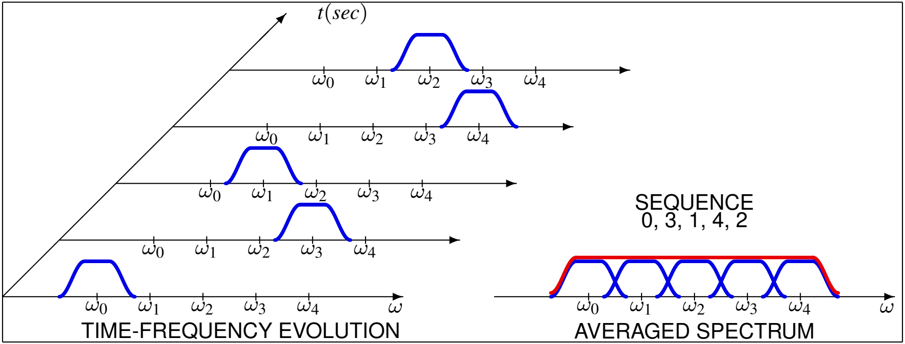
- Canal con "valles" de atenuación
  - Repartir casos favorables y desfavorables
    - Frecuencia portadora con cambios periódicos
    - Período de salto T_h seg.
- Clasificación
  - De salto lento: $T_h/T = N \in \mathbb{Z} > 1$
  - De salto rápido: $T/T_h = N \in \mathbb{Z} > 1$



- Se puede implementar para múltiples modulaciones
  - Opción más utilizada: FSK de fase continua (CPFSK)

Espectro FHSS - Evolución cíclica en el tiempo

- Saltos en frecuencia guiados por una secuencia de ensanchado
  - Secuencia pseudoaleatoria que define el orden de portadoras en los saltos
  - Debe ser conocida por transmisor y receptor
- Ejemplo usando 5 portadoras



Expresiones para una CPFSK

- Señal CPFSK M-aria: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm(M-1)\}$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \text{sen}\left(\omega_c t + I[n]\frac{\pi}{T}t\right) \; w_T(t-nT)$$

- Señal de espectro ensanchado de salto lento

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_m \sum_{n=0}^{T_h/T-1} \text{sen}\left(\omega_c t + x[m]\frac{\pi}{T}t + I[n+mN]\frac{\pi}{T}t\right) \; w_T(t-nT-mT_h)$$

- Señal de espectro ensanchado de salto rápido

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \sum_{m=0}^{T/T_h-1} \text{sen}\left(\omega_c t + x[m+nN]\frac{\pi}{T_h}t + I[n]\frac{\pi}{T_h}t\right) \; w_{T_h}(t-nT-mT_h)$$

- $x[m]$: secuencia determinista que hace variar la frecuencia ($2kM$)

Acceso al medio de múltiples usuarios - CDMA

- Una de las aplicaciones del espectro ensanchado es el acceso múltiple
  - Varios usuarios acceden simúltaneamente al sistema utilizando la misma banda de frecuencias
    - Acceso por división de código
      CDMA: *Code Division Medium Access*
- Cada usuario utiliza una secuencia de ensanchado diferente
  - Código de usuario
- Las condiciones para seleccionar secuencias de ensanchado apropiadas dependen de la variante particular de espectro ensanchado

CDMA - DSSS

- Parámetros idénticos para todos los usuarios
  - $g_c(t)$, T, T_c
- Señales multiusuario CDMA: L usuarios
  - Cada usuario tiene una secuencia de ensanchado $\boxed{x_i[m]}$
  - Filtro transmisor a tiempo de símbolo para el usuario i-ésimo

$$\boxed{g_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m]\ g_c(t - m\ T_c)}$$

  - Señal compleja en banda base

$$s(t) = \sum_{i=0}^{L-1} s_i(t)$$

$$\boxed{s_i(t) = \sum_n A_i[n]\ g_i(t - nT) = \sum_n A_i[n] \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m]\ g_c(t - mT_c - nT)}$$

- Separación de las señales de cada usuario
  - Filtros transmisores ortogonales: $\boxed{\langle g_i(t), g_j(t)\rangle = 0, \quad \forall i \neq j}$

Condición de ortogonalidad de los pulsos

- Producto escalar de dos filtros distintos a período de símbolo

$$g_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m]\; g_c(t - m\; T_c)$$

$$g_j(t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_j[\ell]\; g_c(t - \ell\; T_c)$$

$$\begin{aligned}\langle g_i(t), g_j(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t)\; g_j^*(t)\; dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m]\; x_j^*[\ell]\; \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t - mT_c)\; g_c^*(t - \ell T_c)\; dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m]\; x_j^*[\ell]\; \left(g_c(t - mT_c) * g_c^*(-t - \ell T_c)\right)_{t=0} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m]\; x_j^*[m]\end{aligned}$$

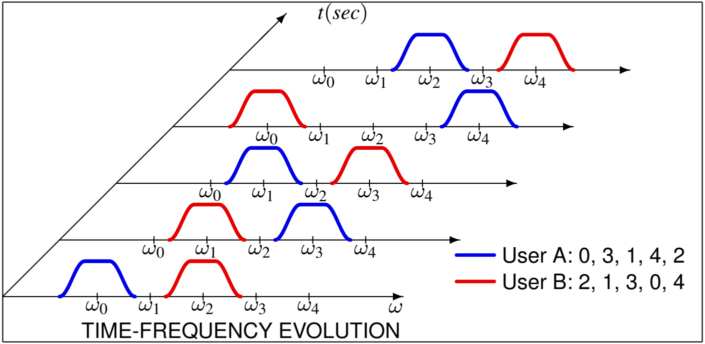
- Condición de ortogonalidad sobre las secuencias de código

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} x_i[m]\; x_j^*[m] = \begin{cases} C, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = C\;\delta[i - j], \quad i, j = 0, \cdots, L - 1}$$

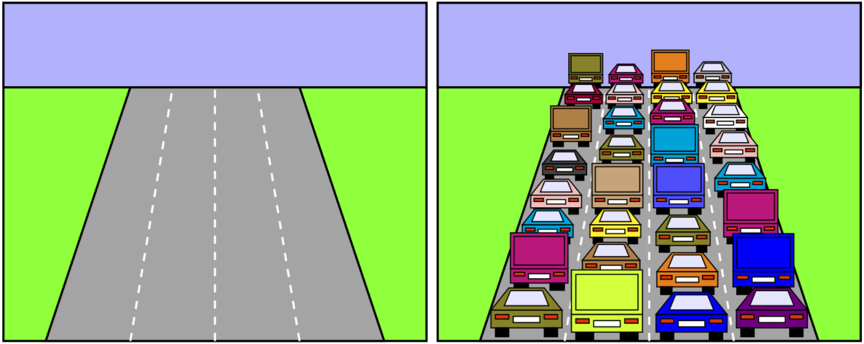
- Varios tipos de secuencias se usan en la práctica
  - Secuencias de Gold (1967), código de Kasami, secuencias de Welch,...

CDMA - FH-SS

- Usuarios diferentes usan distintas secuencias de ensanchado
  - Las secuencias no deben producir solapamiento espectral en ningún instante
- Ejemplo simple con 5 portadoras y dos usuarios

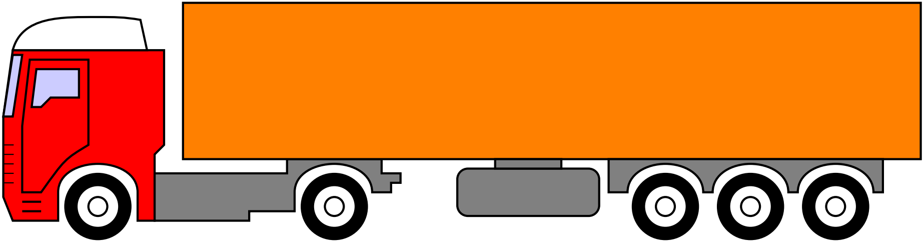


Algunos tipos de “canal”

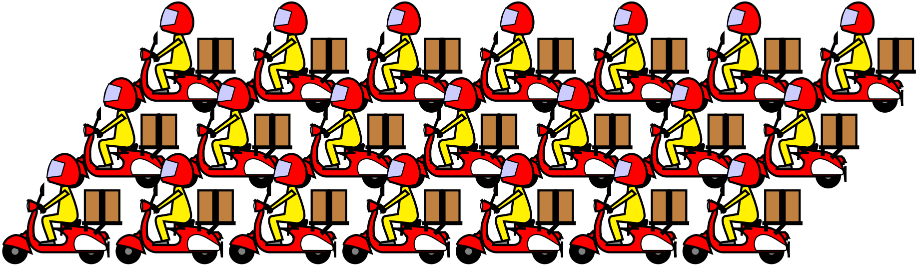


Canal A   Canal B

Posibles soluciones



Portadora Única



Múltiples Portadoras

Modulación con múltiples portadoras - FDM

FDM - Frequency division multiplex

- Ancho de banda disponible para el sistema FDM: $\boxed{W^{FDM} \text{ rad/s}}$
- División del ancho de banda disponible en N subcanales
  - Ancho de banda de cada subcanal: $\boxed{W = \frac{W^{FDM}}{N} \text{ rad/s}}$
  - Secuencia de datos $A[n]$ dividida en N secuencias
    - Transmisión de una señal en cada subcanal (p.e. PAM)
  - Tasa de cada subcanal: $\boxed{R_s = \frac{1}{T} \text{ baudios}}$
  - Relación ancho de banda / tasa de transmisión en cada subcanal
    - Utilizando filtros de la familia coseno alzado: $\boxed{W = \frac{2\pi}{T}(1+\alpha) \text{ rad/s}}$
- Tasa total del sistema FDM:

$$\boxed{R_s^{FDM} = \frac{1}{T^{FDM}} = N \times R_s \text{ baudios}} \qquad \boxed{T^{FDM} = \frac{T}{N} \text{ segundos}}$$

Modulación con múltiples portadoras - FDM (II)

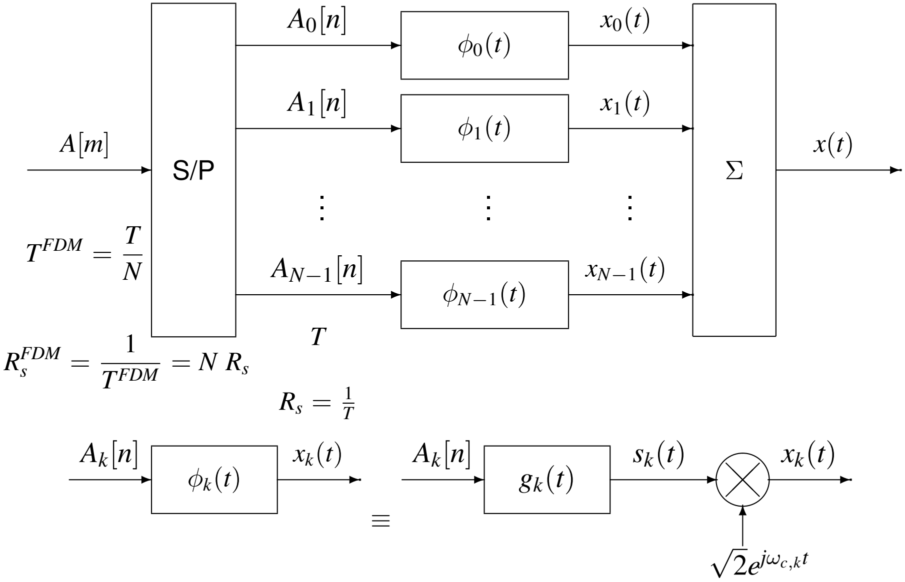
- Transmisor
  - Conversión serie a paralelo: $\boxed{A[m] \rightarrow \{A_0[n], \cdots, A_{N-1}\}}$
    - ★ Conversión de tasas:

      $\boxed{R_s^{FDM} \text{ baudios (sistema FDM)} \rightarrow R_s \text{ baudios (por canal)}}$
  - N ramas con señales PAM paso banda
    - ★ Filtro transmisor en la rama k-ésima: $\phi_k(t)$, $k = 0, \cdots, N-1$

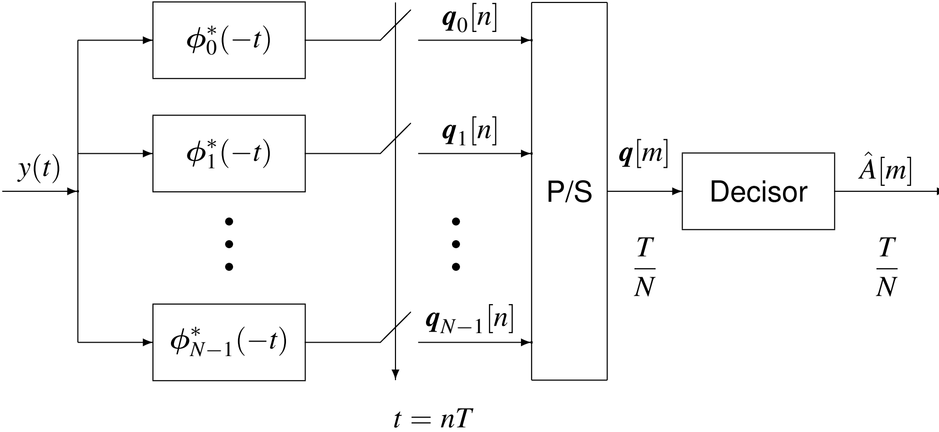
      - Parámetros: filtro transmisor $g_k(t)$, frecuencia central $\omega_{c,k}$
    - ★ Señal modulada en la rama k-ésima: $x_k(t)$
- Receptor
  - N filtros adaptados al transmisor
  - Conversión paralelo a serie: $\boxed{\{\hat{A}_0[n], \cdots, \hat{A}_{N-1}\} \rightarrow \hat{A}[m]}$
    - ★ Conversión de tasas

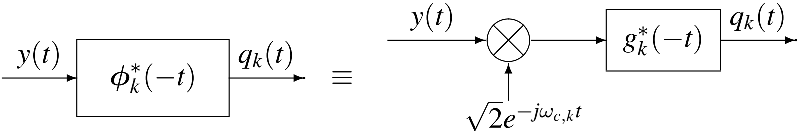
      $\boxed{R_s \text{ baudios (por canal)} \rightarrow R_s^{FDM} \text{ baudios (sistema FDM)}}$

Modulador FDM

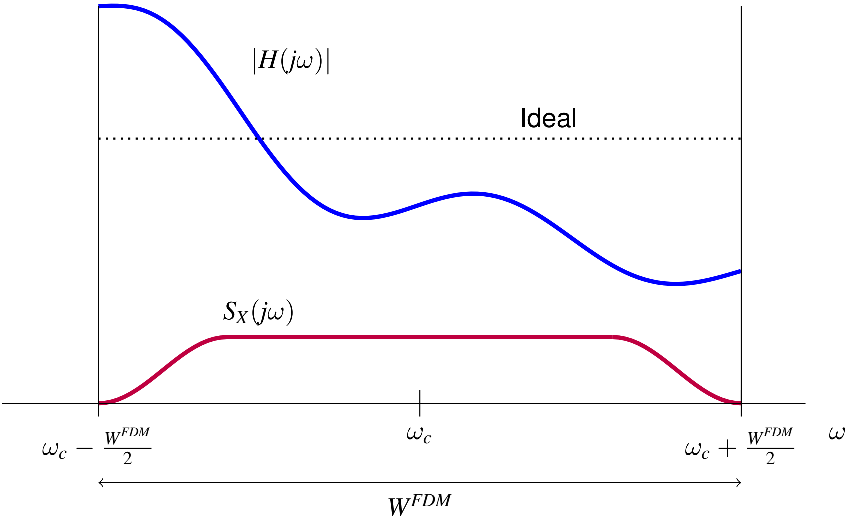


Demodulador FDM

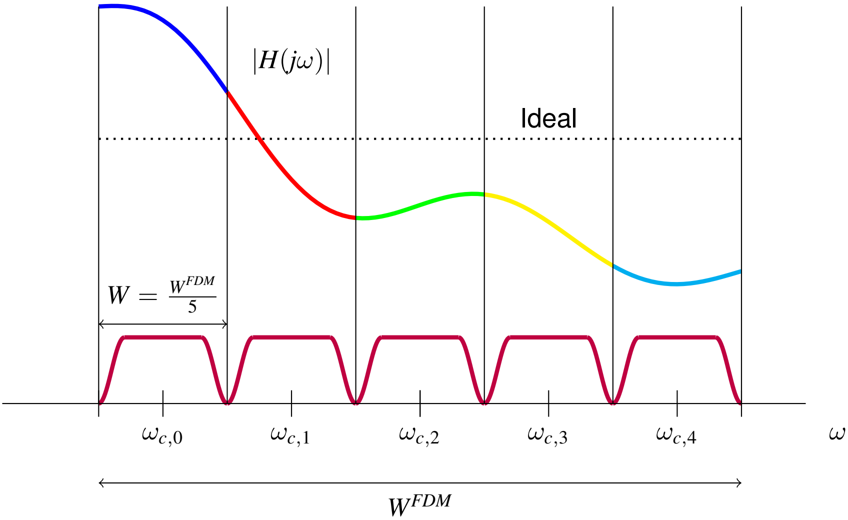




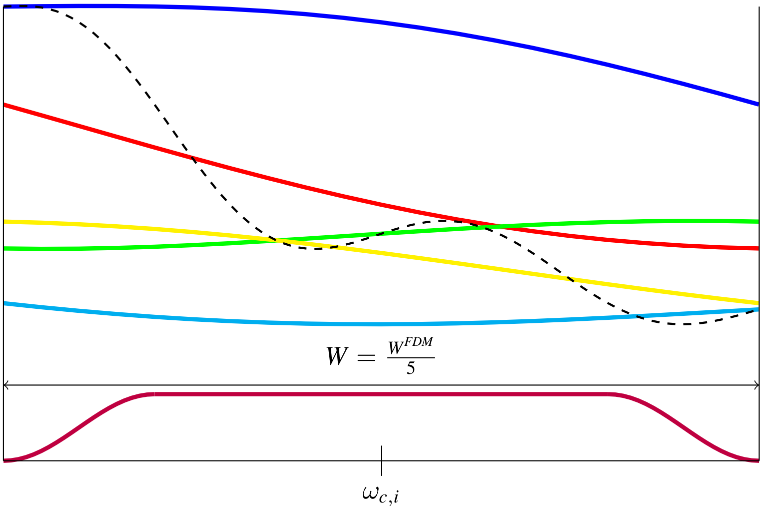
FDM - Distorsión del canal



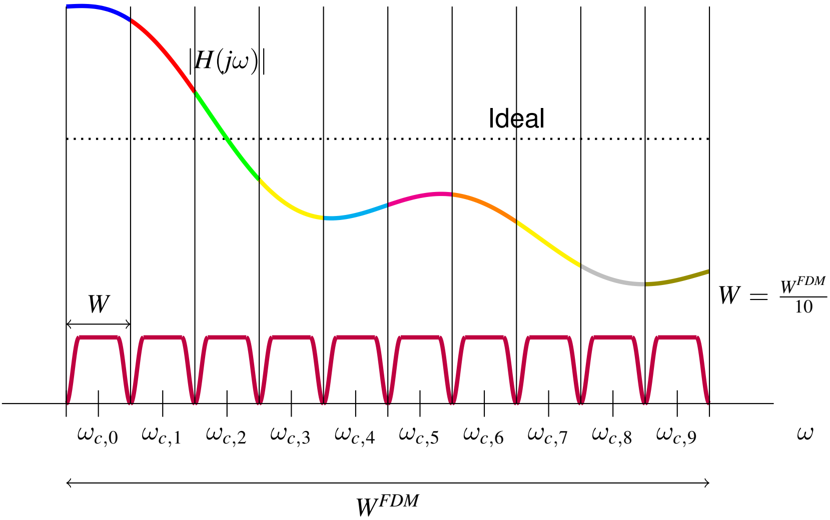
FDM - Distorsión del canal (II)



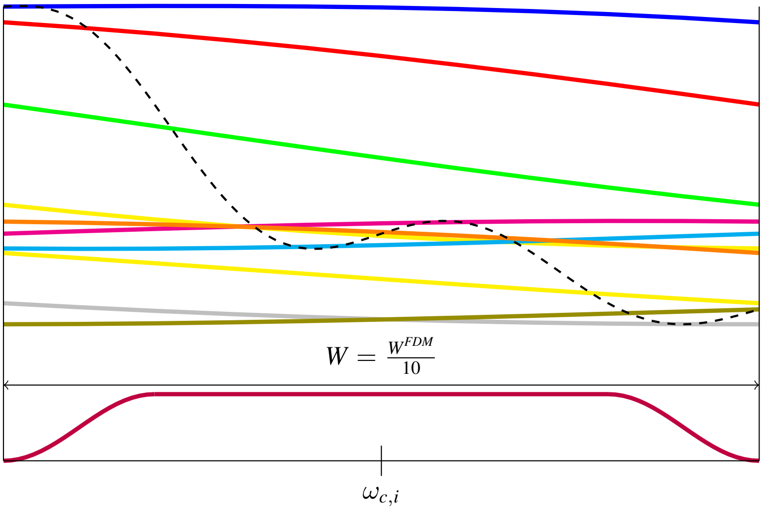
FDM - Distorsión del canal (III)



FDM - Distorsión del canal (IV)



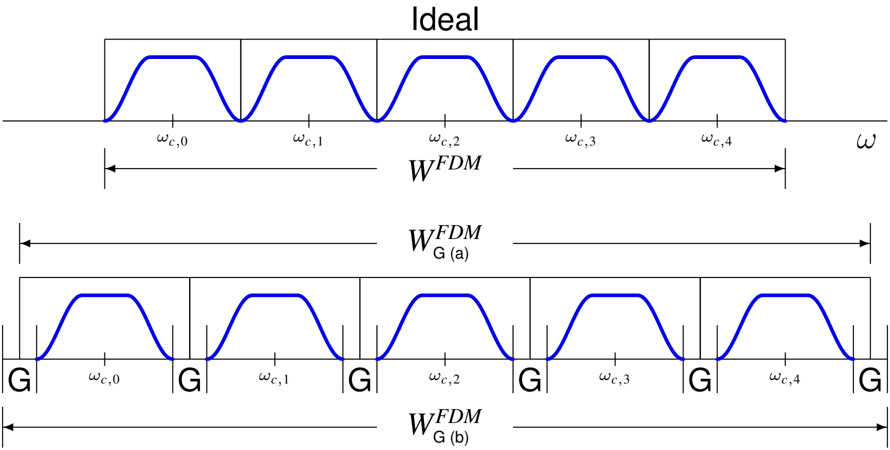
FDM - Distorsión del canal (V)



Inconvenientes solución FDM

- Complejidad hardware del sistema
  - N filtros transmisores (paso banda: componentes en fase y cuadratura)
  - N moduladores / demoduladores (paso banda)
  - N filtros complejos
  - N muestreadores síncronos (paso banda)
- Se necesitan filtros ideales para optimizar el uso del ancho de banda disponible
  - Sin filtros ideales, hay que introducir intervalos de guarda para separar los canales
    - ⋆ Pérdida de eficiencia espectral
- Solución alternativa:
  - Modulación FDM ortogonal (OFDM)
    - ⋆ N pulsos ortogonales (con solapamiento espectral)
    - ⋆ Uso eficiente del ancho de banda disponible
    - ⋆ Implementación eficiente: baja complejidad hardware

FDM - Bandas de guarda



$$W^{FDM}_{\text{G (a)}} = W^{FDM} + N \times \text{G}$$

$$W^{FDM}_{\text{G (b)}} = W^{FDM} + (N+1) \times \text{G}$$

<u>NOTA</u>: en algunos sistemas, las guardas en ambos extremos son de la mitad (a)

Modulación OFDM en tiempo continuo

- Señal modulada en términos de la señal compleja en banda base

$$\boxed{x(t) = \sqrt{2}\, \mathcal{R}e\{s(t)\ e^{j\omega_c t}\}}$$

Notación habitual para señales moduladas paso banda

- Señal compleja en banda base
  - Suma de N señales, una para cada secuencia de datos $A_k[n]$

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sum_n A_k[n]\ \phi_k(t-nT)}_{s_k(t)}}$$

Cada señal $s_k(t)$ es una señal PAM con filtro transmisor $\phi_k(t)$

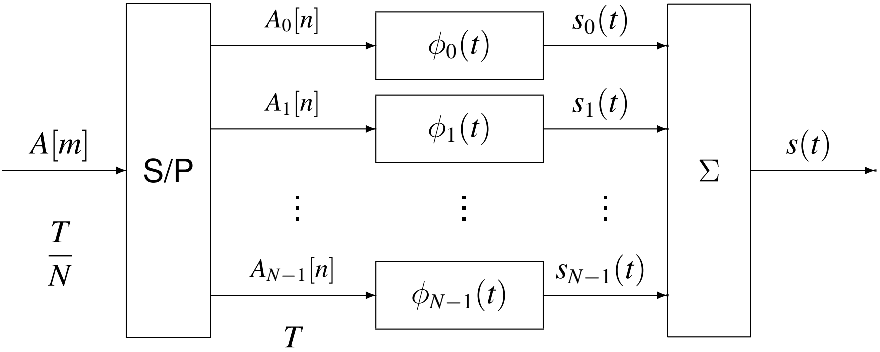
- N pulsos: pulso prototipo $\times$ N diferentes portadoras
  - Pulso $\phi_k(t)$: k períodos de una exponencial compleja normalizada en T seg.

$$\boxed{\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\ w_T(t)\ e^{j\frac{2\pi k}{T}\ t}}$$

$w_T(t)$: ventana temporal causal de duración T segundos $w_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Modulador OFDM en tiempo continuo

- Conversión serie paralelo de secuencia de símbolos $A[m]$
  - Secuencias $A_k[n]$, $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$
  - Tiempo de símbolo OFDM
    - Tiempo de símbolo de cada secuencia $A_k[n]$: T seg.
    - Tasa por portadora OFDM: $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
  - Tasa de transmisión total
    - Tasa total: $R_s^{TOTAL} = N \times R_s$ baudios
    - Tiempo de símbolo total (sobre $A[m]$): $T^{TOTAL} = \frac{T}{N}$ seg.



Ortonormalidad de los pulsos

- Los pulsos OFDM forman una base ortonormal
  - Producto escalar

$$\begin{aligned}\langle \phi_k, \phi_\ell \rangle =& \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\frac{2\pi k}{T}\,t}\, e^{-j\frac{2\pi \ell}{T}\,t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{T}\,t}\, dt\\ =& \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T}\,t\right) dt + j\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T}\,t\right) dt\\ =& \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & k = \ell \end{cases} = \delta[k-\ell]\end{aligned}$$

- Relación de los pulsos con el pulso prototipo $\phi_0(t)$

$$\boxed{\phi_k(t) = \phi_0(t) \times e^{\frac{2\pi k}{T}\,t}}$$

$$\boxed{\phi_k(t-nT) = \phi_0(t-nT)\, e^{\frac{2\pi k}{T}\,(t-nT)} = \phi_0(t-nT)\, e^{\frac{2\pi k}{T}\,t}}$$

Espectro de la OFDM en tiempo continuo

- Respuesta en frecuencia de los pulsos

$$|\Phi_k(j\omega)|^2 = T\ \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)T}{2\pi}\right),\ k = 0, \cdots, N-1$$

- $A_k[n]$ y $A_\ell[n]$ no están correladas y $A_k[n]$ es blanca $\forall k$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k}\ |\Phi_k(j\omega)|^2$$

$E_{s,k}$: Energía media por símbolo de la constelación de la secuencia $A_k[n]$

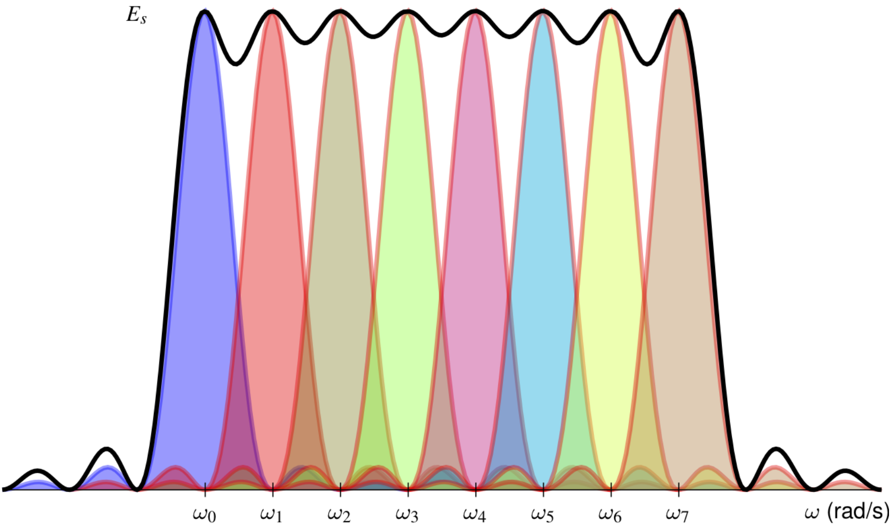
- Potencia de la señal transmitida

$$P_S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega)\ d\omega = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k}$$

- Cuando las constelaciones de las N secuencias son idénticas

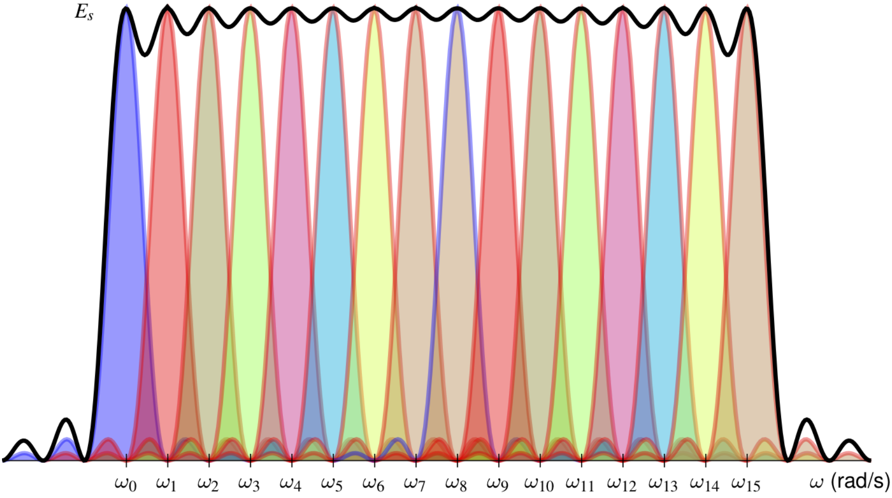
$$P_S = \frac{E_s}{T} \times N = E_s \times R_s \times N \text{ Watts}$$

Espectro OFDM - $N = 8$

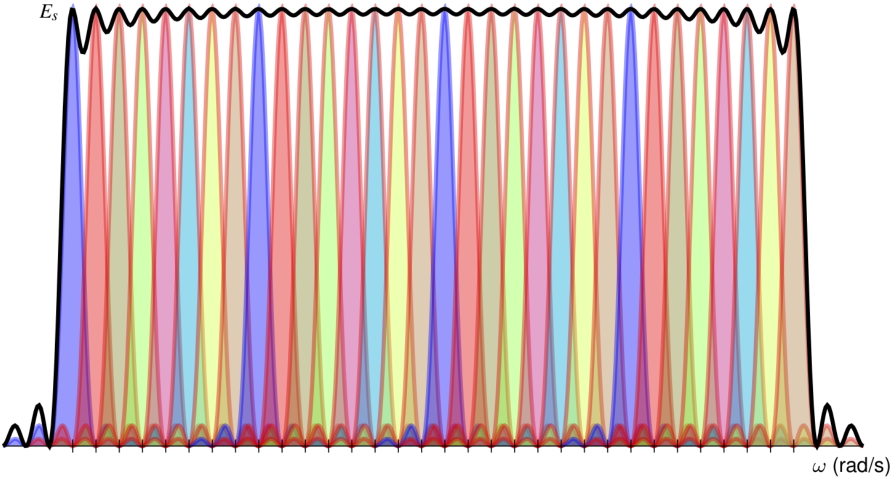


$$\omega_k = \frac{2\pi}{T} k$$

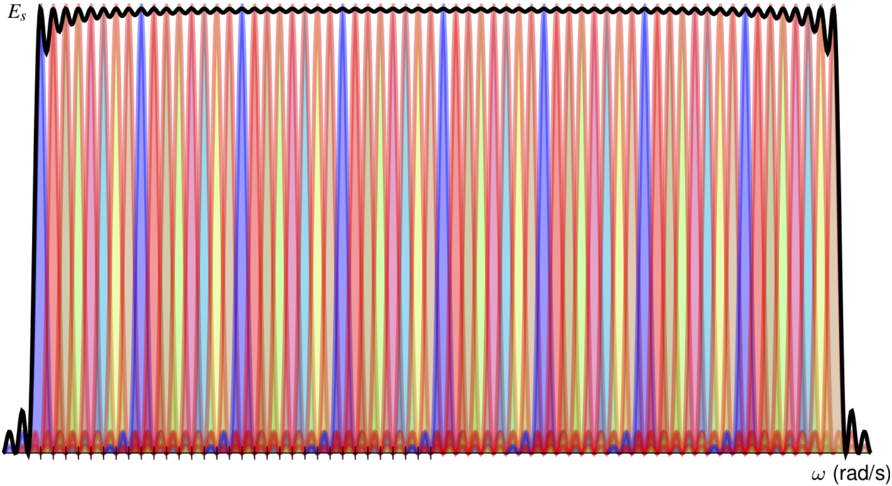
Espectro OFDM - $N = 16$



Espectro OFDM - $N = 32$



Espectro OFDM - $N = 64$



Espectro asintóticamente plano

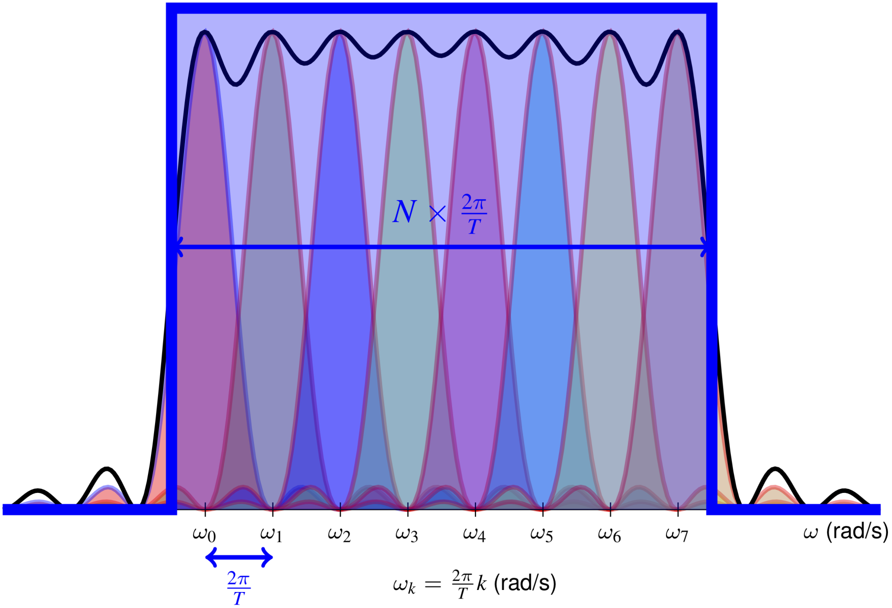
- Si se consideran infinitas portadoras y constelaciones idénticas

$$
\begin{aligned}
S_s(j\omega) =& E_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)T}{2\pi}\right)\\
=& E_s \ \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)
\end{aligned}
$$

- La densidad espectral de potencia es plana si se cumple

$$
\frac{E_s}{T}\ (\phi_0(t) * \phi_0(-t)) \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = C\ \delta(t)
$$

Espectro OFDM - $N = 8$



$\omega_k = \frac{2\pi}{T} k$ (rad/s)

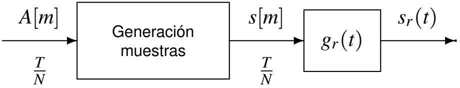
Modulación OFDM en tiempo discreto

- Aproximación: se considera ancho de banda limitado
  - Ancho de banda aproximado $W^{OFDM} \approx \frac{2\pi}{T} \times N$ rad./s
- Alternativa para la generación de la señal
  - Síntesis de muestras de la señal a la velocidad de muestreo dada por Nyquist
    Con la aproximación, significa tomar muestras cada T/N s
  - Conversión Digital / Analógica (reconstrucción a T/N)
- Procedimiento de generación de la señal
  - Obtención de las muestras de la señal (generación *software*)
    - ★ Dependerán de los símbolos transmitidos

$$s[m] = s(t)\big|_{t=m\frac{T}{N}} = s\left(m\frac{T}{N}\right)$$

  - Reconstrucción de la señal (conversión D/A)
    - ★ Filtro de reconstrucción ideal (interpolación con sincs a $\frac{T}{N}$)

$$g_r(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{N}{T}\,t\right) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad G_r(j\omega) = \frac{T}{N}\,\Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi N}\right)$$



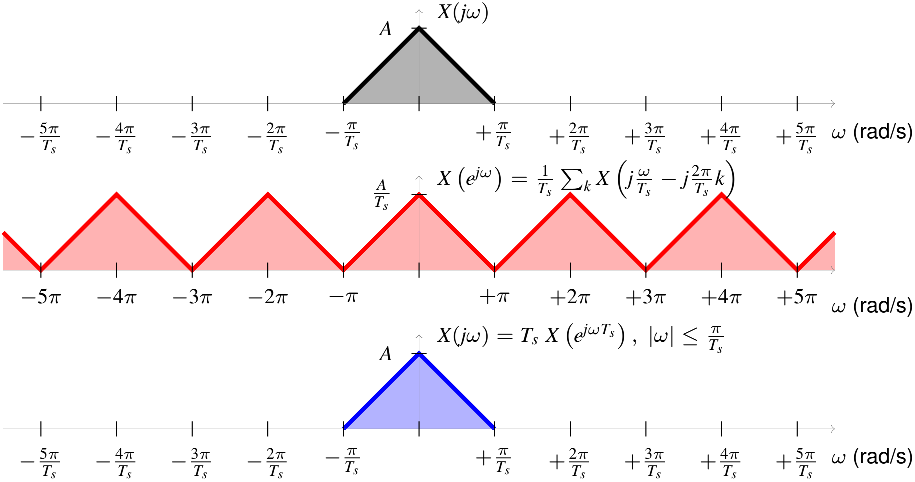
$$s_r(t) = \sum_m s[m]\; g_r\left(t - m\frac{T}{N}\right)$$

NOTA: La señal resconstruida $s_r(t) \neq s(t)$ ($s_r(t)$ tiene ancho de banda $\frac{2\pi}{T} \times N$ rad/s)

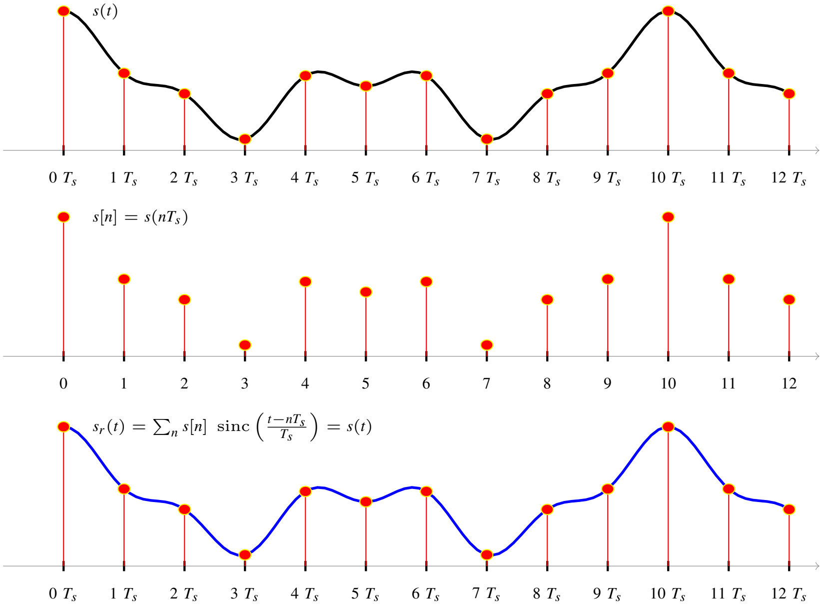
Muestreo en el dominio de la frecuencia cumpliendo Nyquist

- Muestreo de una señal real en banda base con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B = \frac{W}{\pi} \text{ samples/s (Nyquist)}$$



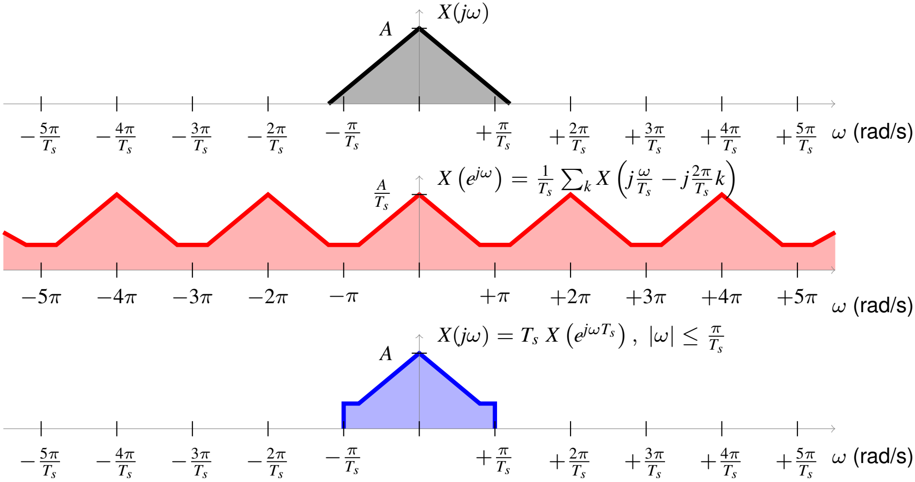
Reconstrucción a partir de muestras cumpliendo Nyquist



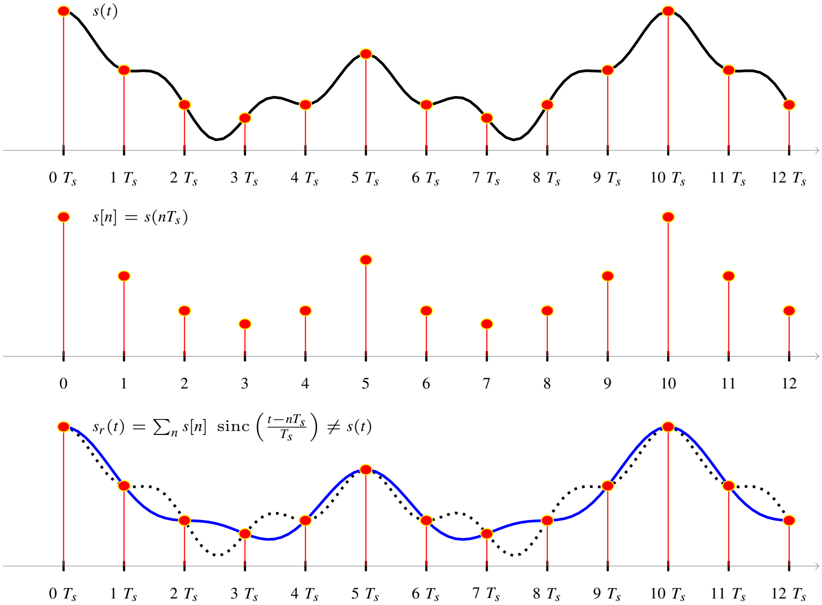
Muestreo en frecuencia con solapamiento espectral

- Muestreo de una señal real con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)

$$f_s = \frac{1}{T_s} < 2B = \frac{W}{\pi} \text{ muestras/s (aliasing)}$$



Reconstrucción de muestras con solapamiento espectral



Tasas de muestreo de Nyquist para señales complejas

- Señal con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)
- Tasa de muestreo para reconstrucción perfecta a partir de muestras (Nyquist sampling rate)
  - Señales reales en banda base

$$\boxed{f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B = \frac{W}{\pi} \text{ muestras/s}}$$

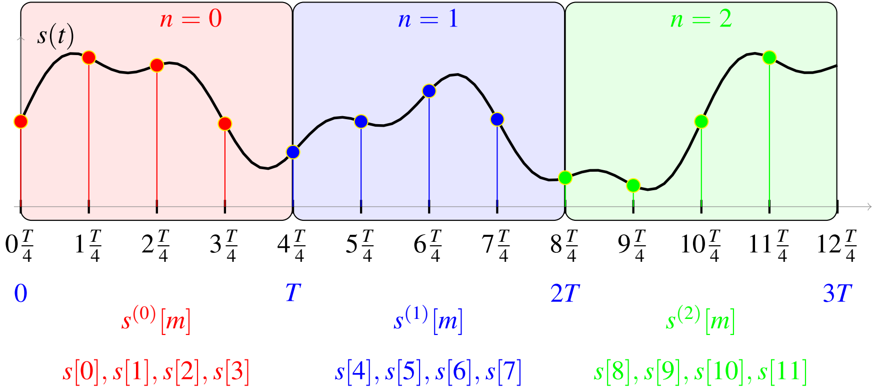
  - Señales complejas paso banda

$$\boxed{f_s = \frac{1}{T_s} \geq B = \frac{W}{2\pi} \text{ muestras/s}}$$

Muestreo : proceso por bloques (N) - Ejemplo $N = 4$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n} A_k[n] \; \phi_k(t - nT)$$

$$s[m] = s(t)\Big|_{t=m\,\frac{T}{N}=m\,\frac{T}{4}} \quad \forall m, \qquad s^{(n)}[m] = s[m+nN], \quad m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$$



Muestras de la señal en el primer intervalo de símbolo

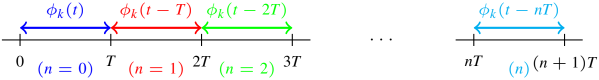
- Expresión analítica de las muestras en el intervalo $0 \leq t < T$
  - Primeras N muestras: $m \in \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$:Instantes de tiempo asociados

$$\boxed{t = m\frac{T}{N} \rightarrow \left\{0, \frac{T}{N}, 2\frac{T}{N}, \cdots, (N-1)\frac{T}{N}\right\}}$$

- Expresión de la señal OFDM en tiempo continuo

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n} A_k[n]\ \phi_k(t - nT), \quad \phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, w_T(t)\ e^{\frac{2\pi k}{T} t}$$

NOTA: Soporte funciones base: en $0 \leq t < T$, $\phi_k(t - nT)$ es sólo distinto de cero para $n = 0$



- Señal y muestras de la señal en ese primer intervalo de símbolo

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0]\ \phi_k(t), \quad s[m] = s\left(m\frac{T}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0]\ \phi_k\left(m\frac{T}{N}\right)$$

  - Expresión equivalente para estas muestras

$$\boxed{s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0]\ e^{j\frac{2\pi k}{T}\ m\frac{T}{N}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0]\ e^{j\frac{2\pi k}{N}\ m}}$$

Muestras de la señal a través de la DFT inversa

- DFT y DFT inversa (IDFT) de secuencias de N muestras
  Para $m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ y $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$

$$X[k] = \text{DFT}_N\{x[m]\}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; e^{-j\frac{2\pi k}{N}\; m}$$

$$x[m] = \text{IDFT}_N\{X[k]\}[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\; e^{j\frac{2\pi k}{N}\; m}$$

- Muestras de la señal (en el primer intervalo de símbolo)

$$s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{k=0}^{N-1} A_k[0]\; e^{j\frac{2\pi k}{N}\; m}$$

- Identificación de términos en la IDFT

$$X[k] \equiv A_k[0], \text{ distintos factores de escala } \tfrac{1}{N} \text{ vs } \tfrac{1}{\sqrt{T}}$$

  Por tanto

$$\{s[m]\}_{m=0}^{N-1} = \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N\;\{A_k[0]\}_{k=0}^{N-1}$$

Expresion general para las muestras

- Muestras de la señal OFDM

$$s[m] = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\ \phi_k(mT/N - nT)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\ e^{j\frac{2\pi k}{N}\ (m-nN)}\ w_N[m-nN]$$

$w_N[m]$: ventana causal en tiempo discreto de N muestras $w_N[m] = \begin{cases} 1 & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

  - Generación de secuencia $s[m]$ por bloques de N muestras

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N\ (\{A_0[n], A_1[n], \cdots, A_{N-1}[n]\}) \rightarrow \{s[nN], s[nN+1], \cdots, s[(n+1)N-1]\}}$$

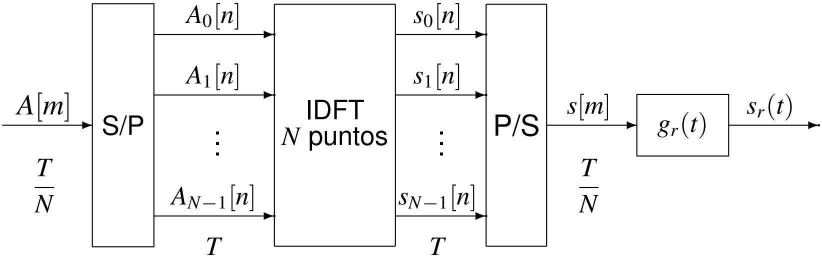
Notación: bloque de índice n: $\boxed{s^{(n)}[m] = s[nN+m]}$

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N\left(\{A_k[n]\}_{k=0}^{N-1}\right) \rightarrow \left\{s^{(n)}[m]\right\}_{m=0}^{N-1}}$$

Modulador OFDM en tiempo discreto

Generación de muestras

$$\left\{ \begin{array}{cccccc}
\underbrace{A_0[0], A_1[0], \cdots, A_{N-1}[0]} & \underbrace{A_0[1], A_1[1], \cdots, A_{N-1}[1]} & \cdots & \underbrace{A_0[n], A_1[n], \cdots, A_{N-1}[n]} & \cdots \\
A_k[0] & A_k[1] & & A_k[n] & \\
\downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\
\frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N & \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N & \cdots & \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\
s^{(0)}[m] & s^{(1)}[m] & & s^{(n)}[m] & \\
\overbrace{s[0], s[1], \cdots, s[N-1]} & \overbrace{s[N], s[N+1], \cdots, s[2N-1]} & \cdots & \overbrace{s[nN], s[nN+1], \cdots, s[nN+N-1]} & \cdots
\end{array} \right\}$$



$$s_r(t) = \sum_m s[m]\, g_r(t - mT/N)$$

Ejemplo síntesis OFDM tiempo discreto: $N = 4$

- Secuencia de símbolos

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A[m]$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L

- Conversión Serie a Paralelo

n	0	1	2
$A_0[n]$	A	E	I
$A_1[n]$	B	F	J
$A_2[n]$	C	G	K
$A_3[n]$	D	H	L

- Muestras OFDM

$$n = 0 : s^{(0)}[m] = \{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A, B, C, D\}$$

$$n = 1 : s^{(1)}[m] = \{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{E, F, G, H\}$$

$$n = 2 : s^{(1)}[m] = \{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{I, J, K, L\}$$

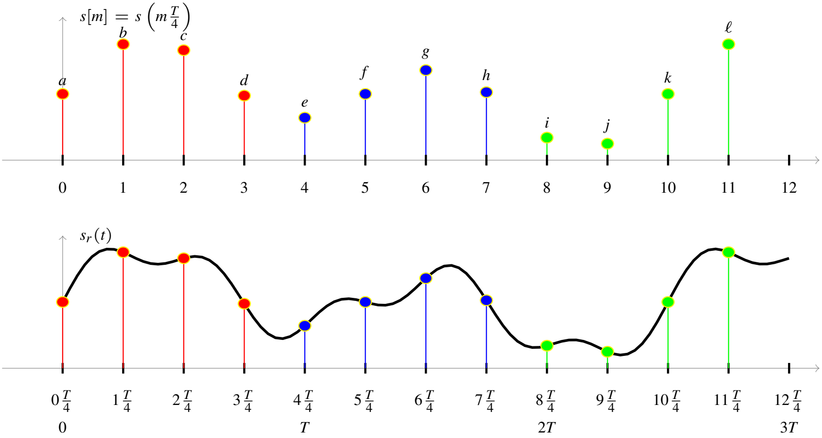
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s[m]$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l

Ejemplo síntesis OFDM tiempo discreto: $N = 4$

$$n = 0 : s^{(0)}[m] = \{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A, B, C, D\}$$

$$n = 1 : s^{(1)}[m] = \{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{E, F, G, H\}$$

$$n = 2 : s^{(2)}[m] = \{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{I, J, K, L\}$$



Base ortonormal en tiempo discreto

- Funciones base en tiempo discreto

$$\xi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}}\, w_N[m]\, e^{j\frac{2\pi k}{N}\, m}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

- Base ortonormal

$$\langle \xi_k, \xi_\ell \rangle = \sum_m \xi_k[m]\, \xi_\ell^*[m] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{N}\, m} = \delta[k-\ell]$$

- Muestras de la señal: expansión sobre la base ortonormal

$$s[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\, \xi_k[m-nN]$$

Base ortonormal equivalente en tiempo continuo

- Expresión de la señal reconstruida

$$s_r(t) = \sum_m s[m]\ g_r(t - mT/N)$$

$$s_r(t) = \sqrt{\frac{N}{T}}\ \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\ \sum_m \xi_k[m - nN]\ g_r(t - mT/N)$$

$$s(t) = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\ \phi_k(t - nT)$$

$$s_r(t) = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\ \hat{\phi}_k(t - nT)$$

- Funciones base equivalentes en tiempo continuo

$$\hat{\phi}_k(t) = \sqrt{\frac{N}{T}}\ \sum_m \xi_k[m]\ g_r(t - mT/N) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N}\ m}\ \operatorname{sinc}\left(\frac{N}{T}\ \left(t - m\frac{T}{N}\right)\right)$$

Ortonormalidad de las funciones base equivalentes

$$\langle\hat{\phi}_k,\hat{\phi}_\ell\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k(t)\ \hat{\phi}_\ell^*(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N}\ m} e^{-j\frac{2\pi \ell}{N}\ i}\ \int_{-\infty}^{\infty} g_r(t-mT/N)\ g_r(t-iT/N)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_r(\tau-mT/N)\ g_r(\tau-iT/N)d\tau = (g_r(t)*g_r(-t))|_{t=(m-i)T/N}$$

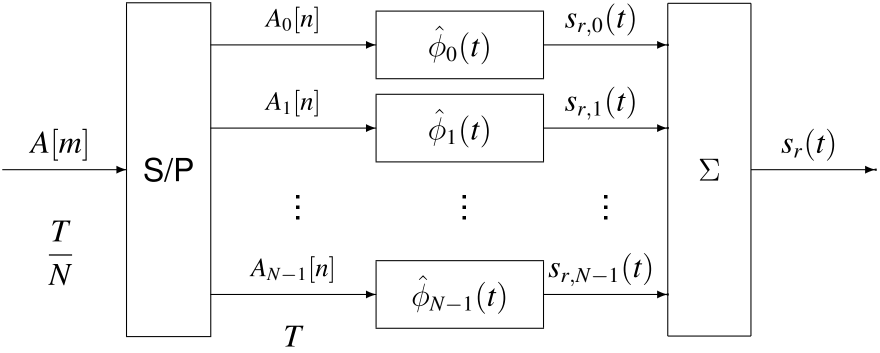
Teniendo en cuenta que $g(t)$ cumple el criterio de Nyquist a T/N

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_r(\tau-mT/N)\ g_r(\tau-iT/N)d\tau = \frac{T}{N}\ \delta[m-i]$$

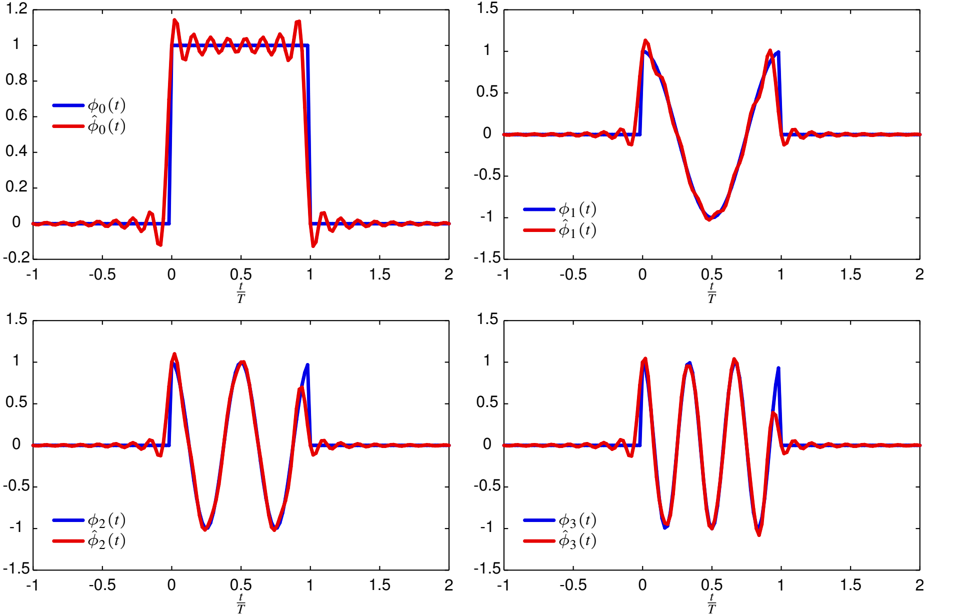
$$\boxed{\langle\hat{\phi}_k,\hat{\phi}_\ell\rangle = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{N}\ m} = \begin{cases} 0 & k\neq\ell \\ 1 & k=\ell \end{cases} = \delta[k-\ell]}$$

Modulador OFDM en tiempo discreto (equivalente)

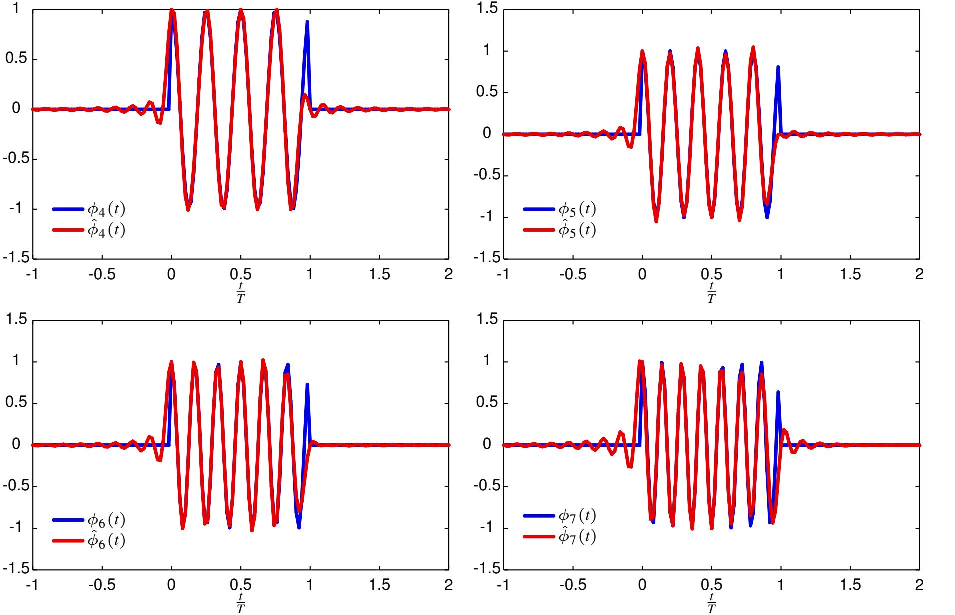
- Estructura del modulador en función de las funciones base equivalentes
  - Esquema conceptual
  - No se usa para la implementación, sino para el análisis



Comparación de funciones base - Parte real



Comparación de funciones base - Parte real



Espectro de OFDM en tiempo discreto

- Densidad espectral de potencia

$$S_{sr}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \left|\hat{\Phi}_k(j\omega)\right|^2$$

- Respuesta en frecuencia de las funciones base discretas

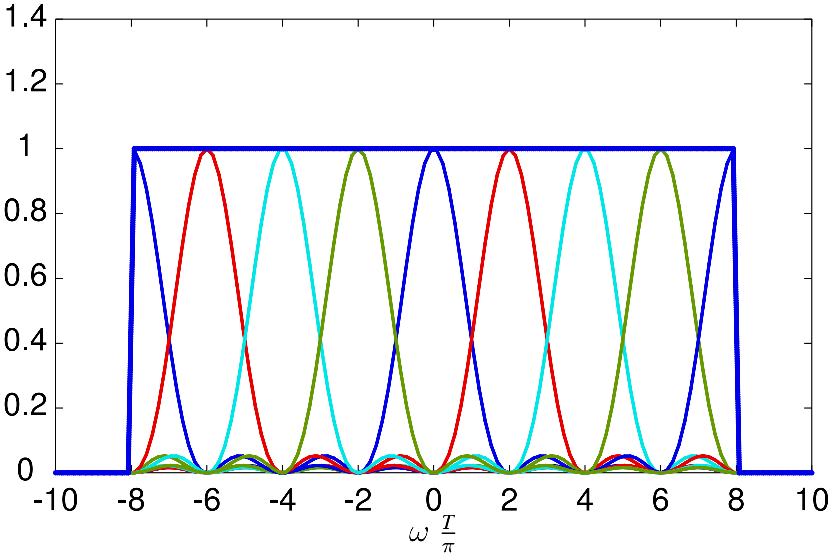
$$\left|\Xi_k\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{1}{N} \frac{\operatorname{sen}^2[(\omega - 2\pi k/N)N/2]}{\operatorname{sen}^2[(\omega - 2\pi k/N)/2]}$$

- Respuesta en frecuencia de las funciones base continuas

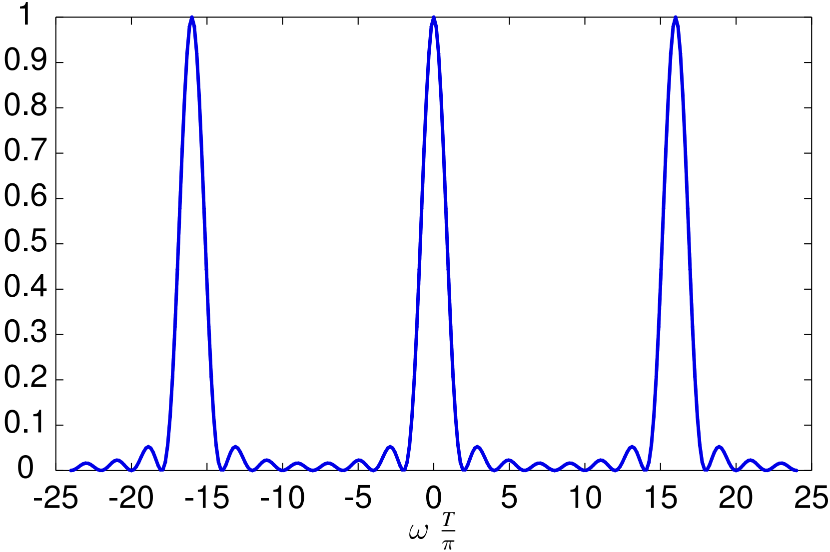
$$\left|\hat{\Phi}_k(j\omega)\right|^2 = \frac{N}{T} \left|\Xi_k\left(e^{j\omega\frac{T}{N}}\right)\right|^2 \left(\frac{T}{N}\right)^2 \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi N}\right)$$

$$\left|\hat{\Phi}_k(j\omega)\right|^2 = \frac{T}{N^2} \frac{\operatorname{sen}^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2]}{\operatorname{sen}^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2N]}, \qquad |\omega| < \frac{\pi}{T} N$$

Espectro OFDM en tiempo discreto - $N = 8$

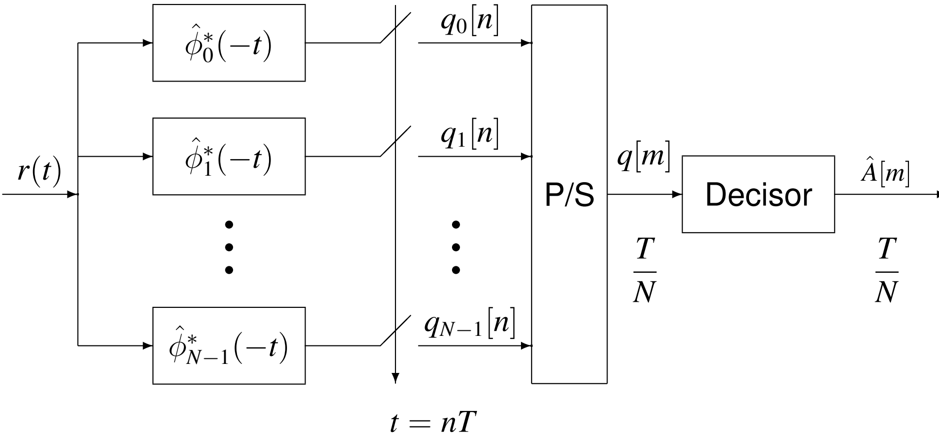


Espectro OFDM en tiempo discreto - Periodicidad de $\left|\Xi_k\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2$



Receptor para OFDM en tiempo discreto

- Estructura del receptor en función de las funciones base equivalentes (banco de N filtros adaptados)
  - Esquema conceptual
  - No se usa para la implementación, sino para el análisis



Ruido en el receptor

- Filtro receptor para la portadora de índice k: $\sqrt{2}\, f_k(t)$
- Densidad espectral de potencia de la secuencia de ruido en esa portadora, $z_k[n]$

$$\boxed{S_{z_k}(e^{j\omega}) = \frac{2}{T} \sum_i S_n\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{\omega_c}{T} - j\frac{2\pi i}{T}\right) \left|F_k\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi i}{T}\right)\right|^2}$$

- Receptor, filtro adaptado $f_k(t) = \hat{\phi}_k^*(-t)$
  - Normalizado, $r_{f_k}(t)$ cumple Nyquist
- $n(t)$: blanco, gausiano, estacionario $S_n(j\omega) = N_0/2$
  - $z_k[n]$ blanco, gausiano, circularmente simétrico

$$\boxed{\sigma_{z_k}^2 = N_0,\ k = 0, \cdots, N-1}$$

  - Una consecuencia de la ortogonalidad de los pulsos de cada portadora

$$\boxed{E\{z_i[n]\ z_k^*[n]\} = 0,\ \text{if } i \neq k}$$

Receptor para OFDM en tiempo discreto

- Filtros adaptados

$$\hat{\phi}_k^*(-t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_m \xi_k^*[m]\, g_r(-t - mT/N), \text{ con } \xi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}}\, e^{j\frac{2\pi k}{N}\, m}\, w_N[m]$$

- Expresión analítica para la salida de los demoduladores

$$\begin{aligned} q_k[n] &= \left(r(t) * \hat{\phi}_k^*(-t) \right)\Big|_{t=nT} \\ &= \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_m \xi_k^*[m] \left(r(t) * g_r\left(-t - m\frac{T}{N} \right) \right)\Big|_{t=nT} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\, m} \left(r(t) * g_r(-t) \right)\big|_{t=nT+m\frac{T}{N}} \end{aligned}$$

- Se define la salida del filtro adaptado $g_r(-t)$ como $v(t) = r(t) * g(-t)$
- Definiendo la secuencia $v[m] = v(t)\big|_{t=m\frac{T}{N}} = r(t) * g_r(-t)\big|_{t=m\frac{T}{N}}$, ahora

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\, m}\, v[nN + m]$$

Observaciones $q_k[n]$ a través de la DFT

- DFT y DFT inversa (IDFT) de secuencias de N muestras
  Para $m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ y $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$

$$\boxed{X[k] = \text{DFT}_N\{x[m]\}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ e^{-j\frac{2\pi k}{N}\ m}}$$

$$\boxed{x[m] = \text{IDFT}_N\{X[k]\}[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\ e^{j\frac{2\pi k}{N}\ m}}$$

- Observaciones $q_k[n]$

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\ m}\ v[nN+m]$$

- Identificación de términos en la DFT

$$x[m] \equiv v[nN+m] = v^{(n)}[m],\ \text{factor de escala } \frac{1}{\sqrt{T}}$$

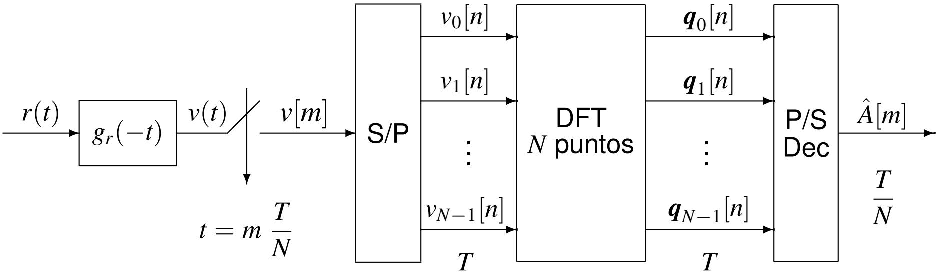
  Por tanto

$$\boxed{\{q_k[n]\}_{k=0}^{N-1} = \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N\left\{v^{(n)}[m]\right\}_{m=0}^{N-1}}$$

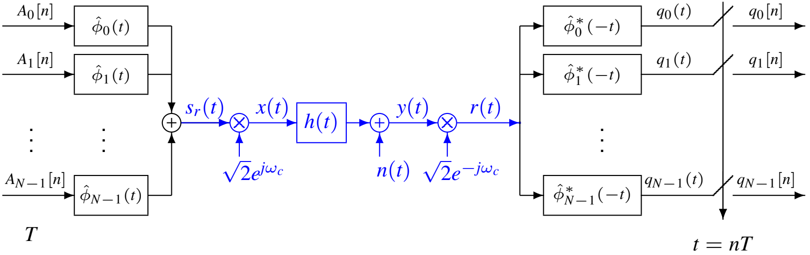
Receptor para OFDM en tiempo discreto

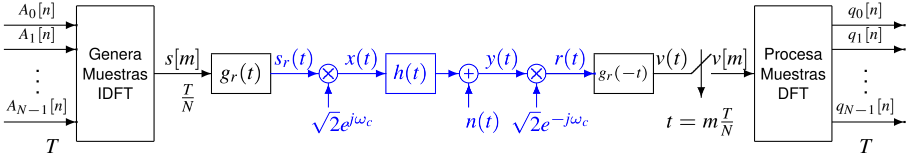
Generación de observaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \overbrace{v[0], v[1], \cdots, v[N-1]}^{v^{(0)}[m]} & \overbrace{v[N], v[N+1], \cdots, v[2N-1]}^{v^{(1)}[m]} & \cdots & \overbrace{v[nN], v[nN+1], \cdots, v[nN+N-1]}^{v^{(n)}[m]} & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N & \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N & \cdots & \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \underbrace{q_0[0], q_1[0], \cdots, q_{N-1}[0]}_{q_k[0]} & \underbrace{q_0[1], q_1[1], \cdots, q_{N-1}[1]}_{q_k[1]} & \cdots & \underbrace{q_0[n], q_1[n], \cdots, q_{N-1}[n]}_{q_k[n]} & \cdots \end{array} \right\}$$



Transmisión OFDM en tiempo discreto





- Canal entre la entrada de índice i ($A_i[n]$) y salida de índice k ($q_k[n]$)

$$p_{k,i}[n] = p_{k,i}(t)\Big|_{t=nT}, \text{ con } p_{k,i}(t) = \hat{\phi}_i(t) * h_{eq}(t) * \hat{\phi}_k^*(-t)$$

- Canal para transmisión de muestras a $\frac{T}{N}$

$$d[m] = d(t)\Big|_{t=m\frac{T}{N}}, \text{ con } d(t) = g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)$$

OFDM interpretada como proceso por bloques

- Proceso de muestras por bloques de tamaño N
- Transmisor: muestras para el n-ésimo bloque

$$\text{Bloque de índice } n : s^{(n)}[m] = s[nN + m], \; m = \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

$s^{(n)}[m]$ para $m = 0, \cdots, N-1$ vienen dadas por N valores de $\text{IDFT}_N(A_k[n])$

- Canal discreto equivalente para las muestras $s[m]$ (a tiempo $\frac{T}{N}$)

$$d[m] = d(t)\Big|_{t=m\frac{T}{N}}, \; \text{con } d(t) = g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)$$

- Transmisión a través de $d[m]$

$$v[m] = s[m] * d[m] + z[m]$$

- Demodulación
  - Se divide $v[m]$ en bloques de N muestras

$$v^{(n)}[m] = v[nN + m], \; m = \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

  - Procesado de cada bloque para obtener las observaciones en n

$q_k[n]$ para $k = 0, \cdots, N-1$ son los N valores de $\text{DFT}_N(v^{(n)}[m])$

Canal discreto equivalente (a tiempo de símbolo)

- Salida del filtro adaptado (antes del muestreo)

$$q_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\ell} A_i[\ell]\, p_{k,i}(t-\ell T) + z_k(t), \qquad k = 0, \cdots, N-1$$

- Respuesta conjunta del i-ésimo transmisor, k-ésimo receptor y canal complejo equivalente en banda base

OFDM en tiempo continuo: $p_{k,i}(t) = \phi_i(t) * h_{eq}(t) * \phi_k^*(-t)$

OFDM en tiempo discreto: $p_{k,i}(t) = \hat{\phi}_i(t) * h_{eq}(t) * \hat{\phi}_k^*(-t)$

- Salida muestreada

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\ell} A_i[\ell]\, p_{k,i}[n-\ell] + z_k[n], \qquad k = 0, \cdots, N-1$$

$$\boxed{q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} A_i[n] * p_{k,i}[n] + z_k[n], \qquad k = 0, \cdots, N-1}$$

  - Se definen N^2 canales discretos equivalentes

$$\boxed{p_{k,i}[n],\ i \in \{0, 1, \cdots, N-1\},\ k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}}$$

conectando todas las N entradas (índice i) con todas las N salidas (índice k)

Generalización del criterio de Nyquist para la ISI

- Interferencia entre símbolos (ISI, Inter-symbol Interference)
  - Contribución en $q_k[n]$ de símbolos en $A_k[n-j]$ para $j \neq 0$
- Interferencia entre portadoras (ICI, Inter-carrier interference)
  - Contribución en $q_k[n]$ de símbolos en $A_i[n]$ para $i \neq k$
- Condición para evitar la interferencia intersimbólica (ISI)

$$\boxed{p_{i,i}[n] = C\,\delta[n]}$$

- Condición para evitar la interferencia entre portadoras (ICI)

$$\boxed{p_{k,i}[n] = 0, \text{ for } k \neq i, \ \forall n}$$

- Ambas condiciones juntas

$$\boxed{p_{k,i}[n] = C\,\delta[n]\,\delta[k-i]}$$

- Generalización del criterio de Nyquist para la ISI en frecuencia

$$\boxed{\mathbf{P}(e^{j\omega}) = C\,\mathbf{I}_{N\times N}}$$

$P_{k,i}(e^{j\omega})$: Transformada de Fourier de $p_{k,i}[n]$

$\mathbf{P}(e^{j\omega})$: Matriz con elementos $P_{k,i}(e^{j\omega})$ (fila k, columna i)

  - Difícil cumplir todas las resctricciones: N^2 restricciones, N grados de libertad

Particularización para OFDM en tiempo discreto

- Respuestas conjuntas entrada-canal-salida

$$p_{k,i}(t) = \frac{N}{T} \sum_m \sum_\ell \xi_i[m]\, \xi_k^*[\ell] \left[g_r\left(t - m\frac{T}{N}\right) * h_{eq}(t) * g_r\left(-t - \ell\frac{T}{N}\right) \right]$$

- Canales discretos equivalentes son $p_{k,i}[n] = p_{k,i}(nT)$

$$\boxed{p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N}\, m}\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}\, \ell}\, d[nN + \ell - m]}$$

$d[m]$: muestras de la respuesta conjunta del filtro reconstructor, canal complejo equivalente en banda base y filtro receptor a $\frac{T}{N}$

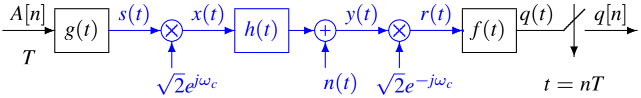
$$\boxed{d[m] = \left(g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)\right)\Big|_{t=m\frac{T}{N}}}$$

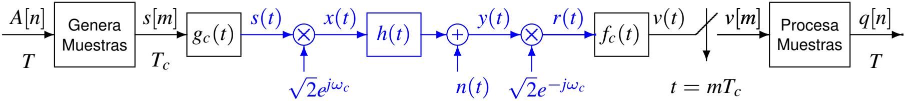
<u>NOTA</u>: con esta definición $v[m] = s[m] * d[m] + z[m]$

- Las condiciones del criterio de Nyquist generalizado se cumplen si

$$d[m] = K\, \delta[m]$$

Transmisión DSSS





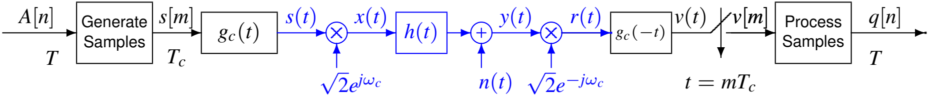
- Filtros receptores - filtros adaptados: $f(t) = g^*(-t), \;\; f_c(t) = g_c(-t)$
- Respuestas conjuntas transmisor/receptor/canal
  - Transmisión de $A[n]$ a tiempo de símbolo: $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) = r_g(t) * h_{eq}(t)$
  - Transmisión de $s[m]$ a tiempo de chip: $d(t) = g_c(t) * h_{eq}(t) * f_c(t) = r_{g_c}(t) * h_{eq}(t)$
- Canales discretos equivalentes
  - A tiempo de símbolo

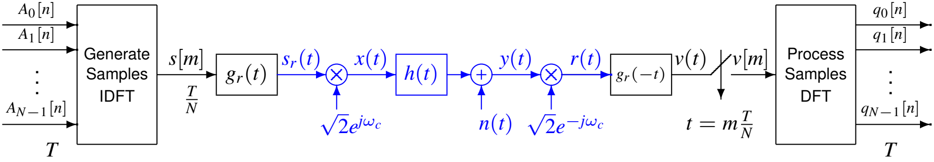
    $p[n] = p(t)\big|_{t=nT} = p(nT)$ relaciona $q[n]$ con $A[n]$: $q[n] = A[n] * p[n] + z[n]$

  - A tiempo de chip

    $d[m] = d(t)\big|_{t=mT_c} = d(mT_c)$ relaciona $v[m]$ con $s[m]$: $v[m] = s[m] * d[m] + z_c[m]$

Comparación DSSS/OFDM





$$T_c \equiv \frac{T}{N} \qquad g_c(t) \equiv g_r(t)$$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c) \equiv \hat{\phi}_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi i}{N}m} g_r\left(t - m\frac{T}{N}\right) \qquad x[m] \equiv \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi i}{N}m}$$

$$g^*(-t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] g_c(-t - \ell T_c) \equiv \hat{\phi}_k^*(-t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\ell} g_r\left(-t - \ell\frac{T}{N}\right) \qquad x^*[\ell] \equiv \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\ell}$$

Comparación DSSS/OFDM (II)

- DSSS

$$s^{(n)}[m] = A[n]\; x[m]$$

$$q[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell]\; v[nN+\ell] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell]\; v^{(n)}[\ell]$$

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell]\; d[nN+\ell-m]$$

- OFDM

$$s^{(n)}[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] e^{j\frac{2\pi k}{N}m} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}\{A_k[n]\}$$

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\ell}\; v[nN+\ell] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\ell}\; v^{(n)}[\ell] = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}\{v^{(n)}[m]\}$$

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N}\,m}\; e^{-j\frac{2\pi k}{N}\,\ell}\; d[nN+\ell-m]$$

Eliminación de ISI e ICI - Extensión cíclica

- Asunción: respuesta $d[m]$ es causal y de longitud finita $K_d + 1$
  - Canal $d[m]$ tiene memoria de K_d muestras
- Con una extensión cíclica de las muestras, incluyendo un prefijo cíclico de C muestras, tal que $C \geq K_d$, los canales son

$$\boxed{p_{k,i}[n] = \frac{N}{T}\ \delta[n]\ \delta[k-i]\ D[k]}$$

- ISI e ICI son completamente eliminadas
- Observación para la portadora de índice k, $q_k[n]$, es ahora

$$\boxed{q_k[n] = \frac{N}{T}\ A_k[n]\ D[k] + z_k[n]}$$

$D[k]$: coeficiente de índice k de la DFT de N puntos de $d[m]$

- Diferente relación señal a ruido en cada portadora (factor de ganancia $D[k]$)

NOTA: con la extensión, se transmitirán $N + C$ muestras cada T segundos, por lo que la nueva definición del canal discreto equivalente $d[m]$ será

$$\boxed{d[m] = d(t)\Big|_{t=m\frac{T}{N+C}}}$$

Extensión cíclica - proceso por bloques

- Proceso de muestras por bloque
- Muestras para el n-ésimo bloque

  $s^{(n)}[m]$ para $m = 0, \cdots, N-1$ vienen dadas por N valores de $\text{IDFT}_N(A_k[n])$

- Extesión cíclica de cada bloque - Prefijo cíclico

$$\tilde{s}^{(n)}[m] = \begin{cases} s^{(n)}[m+N] & m = -C, \cdots, -1 \\ s^{(n)}[m] & m = 0, \cdots, N-1 \end{cases}$$

- Transmisión a través de $d[m]$ (a tiempo $\frac{T}{T+C}$)

$$\tilde{v}^{(n)}[m] = \tilde{s}^{(n)}[m] * d[m] + \tilde{z}^{(n)}[m]$$

- Eliminación del prefijo cíclico

$$v^{(n)}[m] = \tilde{v}^{(n)}[m]\ w_N[m]$$

- Demodulación

  $q_k[n]$ para $k = 0, \cdots, N-1$ son los N valores de $\text{DFT}_N(v^{(n)}[m])$

Extensión cíclica - proceso por bloques (II)

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
\begin{array}{c} \underbrace{A_0[0],A_1[0],\cdots,A_{N-1}[0]}_{A_k[0]} \\ \downarrow \\ \frac{N}{\sqrt{T}}\times \text{IDFT}_N \\ \downarrow \\ \overbrace{s[0],s[1],\cdots,s[N-1]}^{s^{(0)}[m]} \\ \downarrow \\ \tilde{s}^{(0)}[m] \end{array} &
\begin{array}{c} \underbrace{A_0[1],A_1[1],\cdots,A_{N-1}[1]}_{A_k[1]} \\ \downarrow \\ \frac{N}{\sqrt{T}}\times \text{IDFT}_N \\ \downarrow \\ \overbrace{s[N],s[N+1],\cdots,s[2N-1]}^{s^{(1)}[m]} \\ \downarrow \\ \tilde{s}^{(1)}[m] \end{array} &
\begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} &
\begin{array}{c} \underbrace{A_0[n],A_1[n],\cdots,A_{N-1}[n]}_{A_k[n]} \\ \downarrow \\ \frac{N}{\sqrt{T}}\times \text{IDFT}_N \\ \downarrow \\ \overbrace{s[nN],s[nN+1],\cdots,s[nN+N-1]}^{s^{(n)}[m]} \\ \downarrow \\ \tilde{s}^{(n)}[m] \end{array} &
\begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array}
\end{array}\right\}$$

$$\overbrace{\underbrace{s[N-C],\cdots,s[N-2],s[N-1]}_{C},\ \underbrace{s[0],s[1],\cdots,\underbrace{s[N-C],\cdots,s[N-2],s[N-1]}_{C}}_{N}}^{\tilde{s}^{(0)}[m]}$$

$$\overbrace{\underbrace{s[2N-C],\cdots,s[2N-2],s[2N-1]}_{C},\ \underbrace{s[N],s[N+1],\cdots,\underbrace{s[2N-C],\cdots,s[2N-2],s[2N-1]}_{C}}_{N}}^{\tilde{s}^{(1)}[m]}$$

$$\overbrace{\underbrace{s[(n+1)N-C],\cdots,s[(n+1)N-2],s[(n+1)N-1]}_{C},\ \underbrace{s[nN],s[nN+1],\cdots,\underbrace{s[(n+1)N-C],\cdots,s[(n+1)N-1]}_{C}}_{N}}^{\tilde{s}^{(n)}[m]}$$

Extensión cíclica - proceso por bloques (III)

- $q_k[n]$: se obtiene a partir de la DFT de N puntos de $v^{(n)}[m]$
- El prefijo cíclico se introduce para simular una convolución circular
  - La convolución de $\tilde{s}^{(n)}[m]$ con $d[m]$ es equivalente a la convolución circular de $s^{(n)}[m]$ con $d[m]$
- Utilidad por la propiedad de la DFT de ser multiplicativa bajo convolución circular

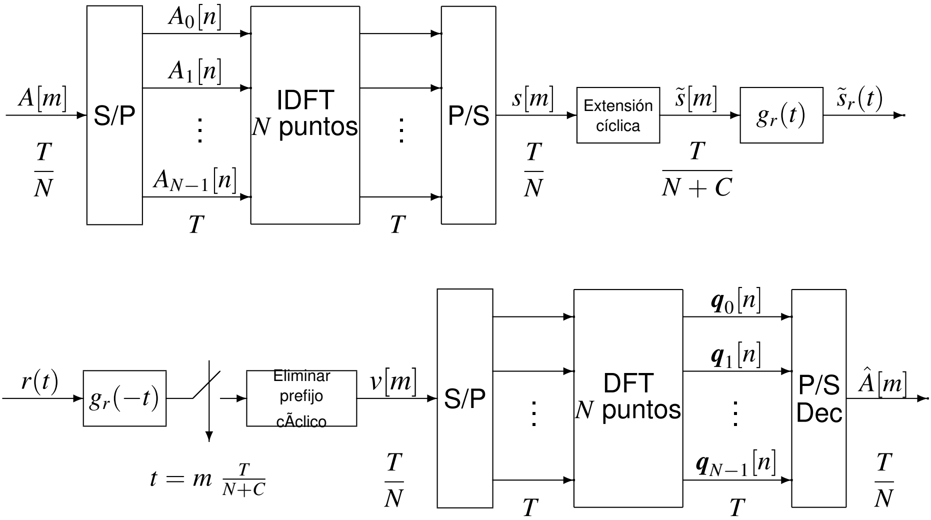
$$\text{Si } \boxed{z[n] = x[n] \circledast y[n]} \text{ entonces}$$

$$\boxed{\text{DFT}_N(z[n]) = \text{DFT}_N(x[n]) \times \text{DFT}_N(y[n])}$$

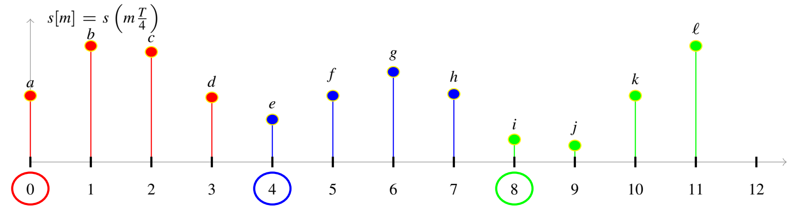
- Teniendo esto en cuenta, sin ruido, y abusando de la notación

$$\begin{aligned}
q_k[n] &= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N(\tilde{s}^{(n)}[m] * d[m]) \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N(s^{(n)}[m] \circledast d[m]) \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N(s^{(n)}[m]) \times \text{DFT}_N(d[m]) \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N\left(\frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_N(A_k[n])\right) \times \text{DFT}_N(d[m]) \\
&= A_k[n] \times \frac{N}{T} D[k]
\end{aligned}$$

Modulador/demodulador OFDM con prefijo cíclico



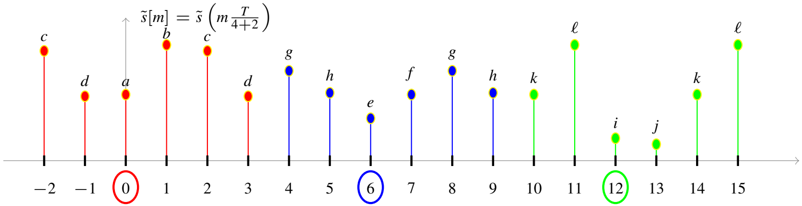
Prefijo cíclico: $N=4$, $C=2$



$$\{a,b,c,d\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[0],A_1[0],A_2[0],A_3[0]\}$$

$$\{e,f,g,h\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[1],A_1[1],A_2[1],A_3[1]\}$$

$$\{i,j,k,\ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}}\text{IDFT}_4\{A_0[2],A_1[2],A_2[2],A_3[2]\}$$



Eliminación de ISI e ICI - Estudio analítico

- Asunción: respuesta $d[m]$ es causal y de longitud finita $K_d + 1$
  - Canal $d[m]$ tiene memoria de K_d muestras
- Nuevas funciones base en tiempo discreto (longitud se extiende C muestras)

$$\boxed{\tilde{\xi}_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}}\, e^{j\frac{2\pi k}{N}\, m}\, w_{N+C}[m+C], \qquad k = 0, \cdots, N-1}$$

  - Valores no nulos para $m \in [-C, N-1]$ (en lugar de $m \in [0, N-1]$)
  - Condición para eliminar ISI e ICI:

$$C \geq K_d$$

- Muestras de la señal generada son ahora dadas por

$$\boxed{\tilde{s}[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\, \tilde{\xi}_k[m - n(N+C)]}$$

  - Ahora hay $N + C$ muestras por intervalo de símbolo (T s)
- Señal en el demodulador se obtiene como

$$\boxed{q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} \xi_k^*[m]\, v[n(N+C)+m]}$$

Nuevos canales discretos equivalentes

- Con esta modificación los canales son

$$
\begin{aligned}
p_{k,i}[n] &= \frac{1}{T} \sum_{m=-C}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N}\, m}\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}\, \ell}\, d[n(N+C)+\ell-m] \\
&= \frac{1}{T} \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{u=\ell-N+1}^{\ell+C} e^{-j\frac{2\pi i}{N}\, u}\, e^{j\frac{2\pi(i-k)}{N}\, \ell}\, d[n(N+C)+u] \\
&= \frac{1}{T} \sum_{u=0}^{K_d} e^{-j\frac{2\pi i}{N}\, u}\, d[u]\, \delta[n] \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(i-k)}{N}\, \ell} \\
&= \frac{N}{T}\, \delta[n]\, \delta[k-i] \underbrace{\sum_{u=0}^{K_d} e^{-j\frac{2\pi i}{N}\, u}\, d[u]}_{\text{DFT de } d[m]} = \frac{N}{T}\, \delta[n]\, \delta[k-i]\, D[i]
\end{aligned}
$$

$D[k]$: coeficiente de índice k de la DFT de N puntos de $d[m]$

- ISI e ICI son eliminadas

Eficiencia espectral de OFDM con prefijo cíclico

- Señal OFDM se construye a partir de muestras: filtro reconstructor $g_r(t)$

$$s_r(t) = \sum_m s[m]\, g_r(t - mT_s),\ \text{con } g_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{N}{T_s}t\right)$$

T_s: tiempo asociado a la secuencia de muestras $s[m]$
  - Ancho de banda de la señal modulada paso banda $x(t)$ es

$$\boxed{W = \frac{2\pi}{T_s}\ \text{rad/s},\ B = \frac{1}{T_s}\ \text{Hz}}$$

- OFDM sin prefijo cíclico
  - En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N}$

$$\boxed{W = \frac{2\pi}{T} \times N\ \text{rad/s},\ B = R_s \times N\ \text{Hz}}$$

- OFDM con prefijo cíclico
  - En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N+C}$

$$\boxed{W = \frac{2\pi}{T} \times (N + C)\ \text{rad/s},\ B = R_s \times (N + C)\ \text{Hz}}$$

- Eficiencia de OFDM utilizando un prefijo cíclico de longitud C

$$\boxed{\eta = \frac{N}{N + C}}$$

Relación señal a ruido en cada portadora

- Observaciones a tiempo de símbolo

$$\boxed{q_k[n] = \frac{N}{T}\, D[k]\, A_k[n] + z_k[n]}$$

- Relación señal a ruido en cada portadora

$$\boxed{\left.\frac{S}{N}\right|_k = \frac{\mathcal{E}\left\{\frac{N}{T}\, D[k]\, A_k[n]\right\}}{\mathcal{E}\left\{z_k[n]\right\}} = \frac{E\left[\left|\frac{N}{T}\, D[k]\, A_k[n]\right|^2\right]}{E\left[\left|z_k[n]\right|^2\right]} = \frac{\left|\frac{N}{T}\, D[k]\right|^2 E_s}{\sigma_z^2}}$$

  - Relación $\left.\frac{S}{N}\right|_k$ proporcional a $|D[k]|^2$
  - Las prestaciones serán diferentes para cada portadora
    - ★ Cuanto mayor el valor de $|D[k]|$, mejor serán las prestaciones de la portadora de índice k