uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare (OCW)

Comunicaciones Digitales

Capítulo 5

Codificación para protección frente a errores

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice

Introducción

- Los sistemas de comunicaciones comenten errores

$$P_e = P\{\hat{A}[n] \neq A[n]\} \qquad BER = P\{\hat{B}_b[\ell] \neq B_b[\ell]\} \qquad BER \approx \frac{P_e}{m}$$

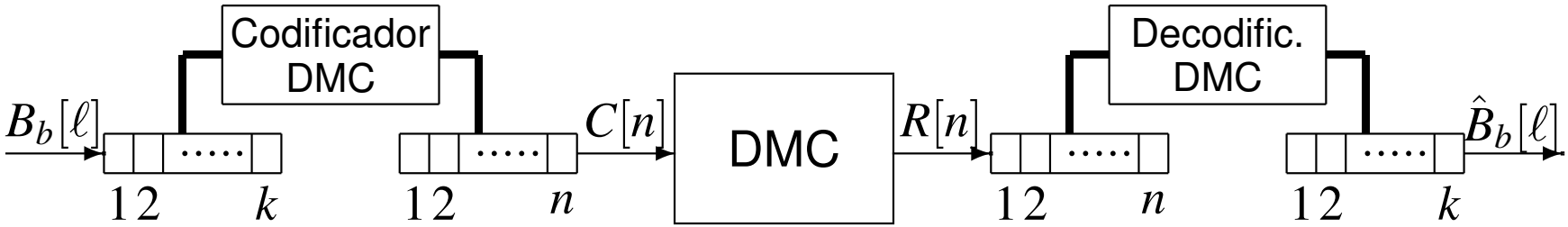
- Objetivo de un sistema de comunicaciones
  - $BER <$ Calidad
- Alternativas para reducción de los errores
  - Aumentar la energía/potencia de la señal
    - ★ Limitaciones: Econónicas, físicas, legales, interferencias, ...
  - Teorema de codificación de canales con ruido (Shannon)
    - ★ Introducción de bits de redundancia
    - ★ Tasa de codificación: R

$$R = \frac{\text{número de bits de información}}{\text{número de bits transmitidos (info+redundancia)}}$$

    - ★ Capacidad del canal: C (bits/uso)
    - ★ Posibilidad de reducción de la BER de forma arbitraria

$$R < C$$

Teorema de codificación de canal



DMC: *Discrete Memoryless Channel*

Tasa del código: $R = \dfrac{k}{n}$

Teorema de codificación de canal (Shannon 1948):

Capacidad de canal (DMC): $C = \max\limits_{p_X(x_i)} I(X,Y)$

$I(X,Y)$: información mutua entre la entrada X y la salida Y del canal

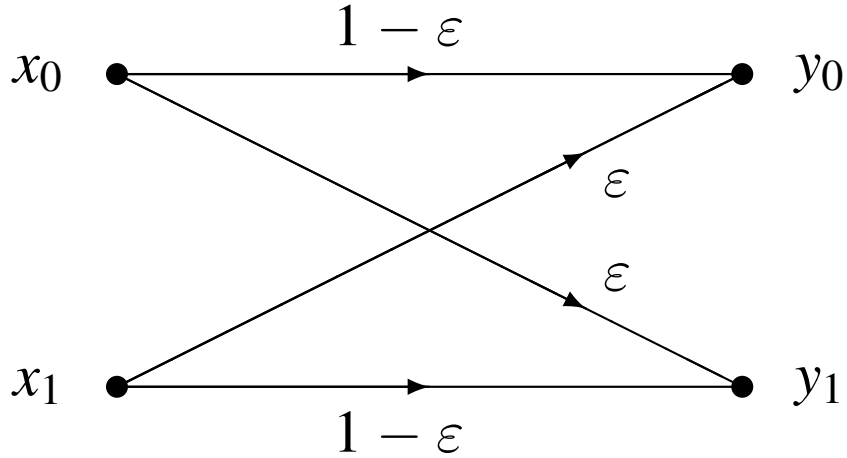
1. Si la tasa de transmisión R es menor que C, entonces para cualquier $\delta > 0$ existe un código con una longitud de bloque n suficientemente larga cuya probabilidad de error es menor que δ
2. Si $R > C$, la probabilidad de error de cualquier código con cualquier longitud de bloque está limitada por un valor no nulo
3. Existen códigos que permiten alcanzar la capacidad del canal $R = C$

Capacidad de canal - Canales digitales

- Modelo de canal discreto sin memoria (DMC)
  - Entrada y salida: variables aleatorias X e Y
  - Probabilidades de transición $p_{Y|X}(y_j|x_i)$
- Capacidad de canal

$$C = \max_{p_X(x_i)} I(X,Y) \text{ bits/uso}$$

  - Ejemplo: Canal binario simétrico ($BER = \varepsilon$)



$$C = 1 - H_b(\varepsilon) = 1 - \Omega(\varepsilon) \text{ bits/uso}$$

Ejemplo - Canal binario simétrico

- Modelo para canal digital binario con $BER = \varepsilon$
- Cálculo de la información mutua entrada / salida

$$
\begin{aligned}
I(X,Y) =& H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i)\, H(Y|X=x_i) \\
=& H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i) \left[- \sum_{j=0}^{1} p_{Y|X}(y_j|x_i)\ \log p_{Y|X}(y_j|x_i) \right] \\
=& H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i)\ [-\varepsilon\ \log(\varepsilon) - (1-\varepsilon)\ \log(1-\varepsilon)] \\
=& H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i)\, H_b(\varepsilon) = H(Y) - H_b(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

- Cálculo de la capacidad de canal
  - Se busca el máximo de la información mutua
    - ★ Para este canal, se obtiene cuando $H(Y)$ es máxima
    - ★ $H(Y)$ es máxima cuando los símbolos de salida son equiprobables
    - ★ Para este canal, ocurre cuando los símbolos de entrada son equiprobables

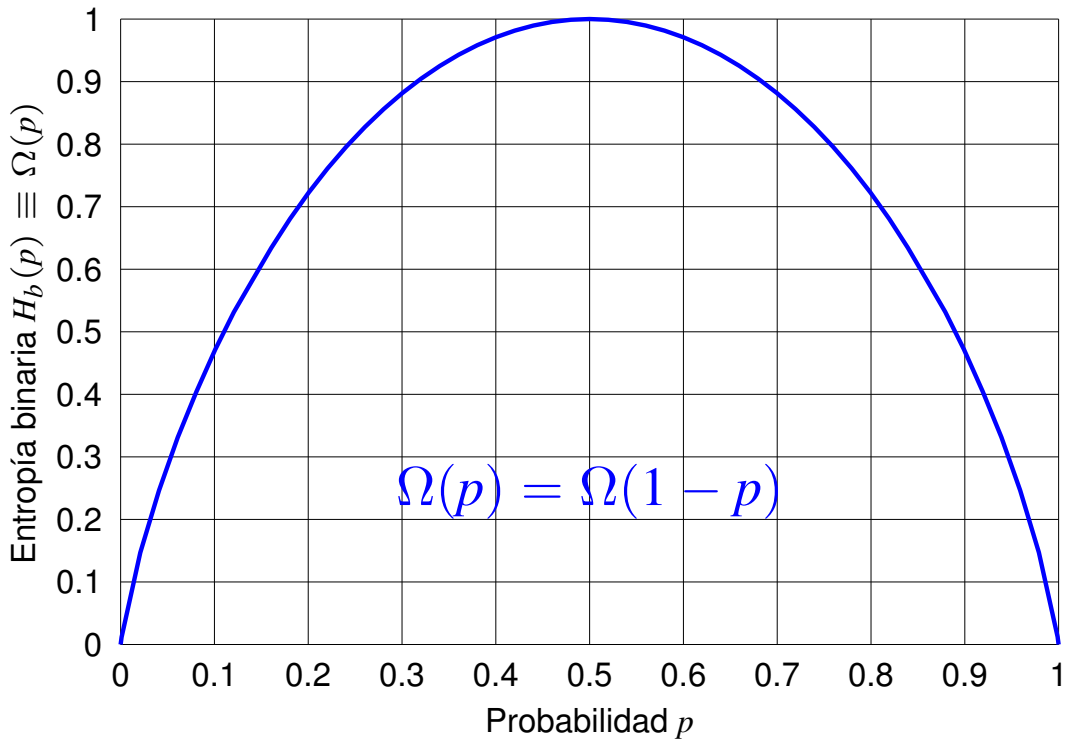
$$C = 1 - H_b(\varepsilon) \text{ bits/uso} \qquad p_X(x_0) = p_X(x_1) = \frac{1}{2}$$

Entropía binaria: $H_b(p) \equiv \Omega(p)$

- Variable aleatoria binaria
  - Alfabeto: $\{x_0, x_1\}$
  - Probabilidades: $\{p_X(x_0) = p, \quad p_X(x_1) = 1 - p\}$

$$H(X) \equiv H_b(p) \equiv \Omega(p) = -\,p\,\log_2(p) - (1-p)\,\log_2(1-p)$$

$$= p\,\log_2\left(\frac{1}{p}\right) + (1-p)\,\log_2\left(\frac{1}{1-p}\right) \text{ bits/símbolo}$$



- Valor máximo: $\max \Omega(p) = 1$ bit/símbolo
  - Se alcanza para $p = 0{,}5$ (valor de referencia)

Capacidad de canal para el canal gausiano

- Modelo de relación entrada salida en un canal gausiano

$$Y = X + Z$$

Z es una variable aleatoria gausiana, de media nula y varianza P_Z

- Capacidad de canal en las siguientes condiciones:
  - Potencia transmitida: P_X watt.
  - Ancho de banda: B Hz
    - ⋆ Potencia de ruido: $P_Z = N_0\, B$ watt.
- Cálculo a través de la información mutua

$$C = \max_{f_X(x) \mid E[X^2] \leq P_X} I(X,Y)$$

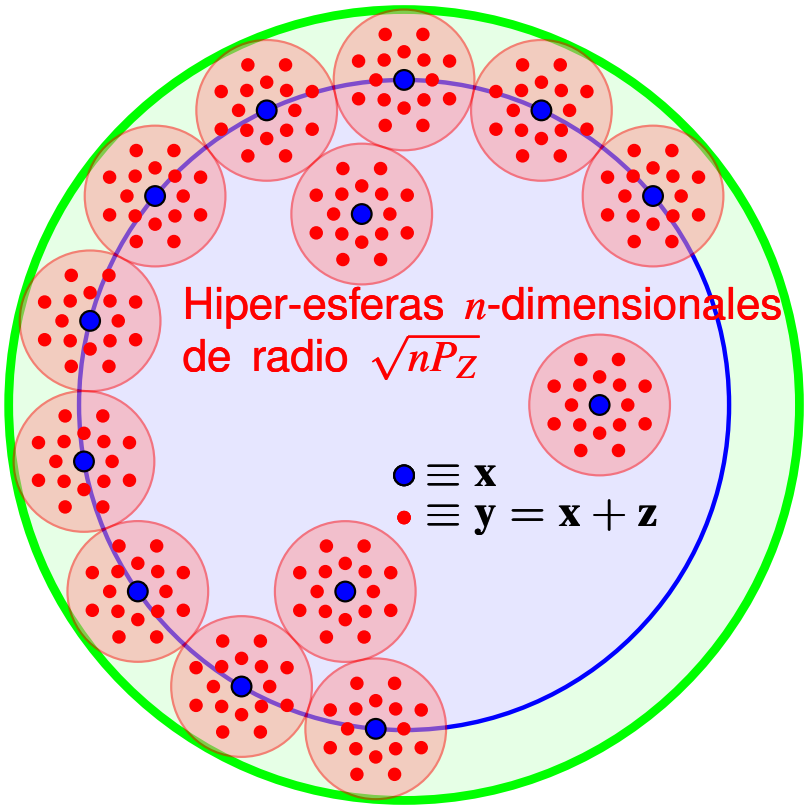
Restricción $E[X^2] \leq P_X$ dada por la limitación en potencia

- Resultado

$$C = B\, \log_2\left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/s}$$

Se obtiene para $f_X(x)$ gausiana

Capacidad de canal para canal gausiano (II)



Hiper-esfera n-dimensional: radio $\sqrt{nP_X}$

Hiper-esfera n-dim.: radio $\sqrt{n(P_X + P_Z)}$

Capacidad sobre canal gausiano en las siguientes condiciones:

- Potencia transmitida: P_X watt.
- Ancho de banda: B Hz
  - Potencia de ruido: $P_Z = N_0 B$ watt.

Capacidad: número de vectores para n usos sin solapamiento dado el ruido

$$M_{ss} = \left(1 + \frac{P_X}{P_Z}\right)^{n/2}$$

$$C = \frac{\log_2 M_{ss}}{n} = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_X}{P_Z}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/uso}$$

$$\boxed{C = B\log_2\left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/s}}$$

Capacidad del canal gausiano - Evolución

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/s}$$

- La capacidad depende de dos parámetros de diseño
  - Potencia de la señal transmitida, P_X
  - Ancho de banda disponible en Hz, B
- Capacidad de canal en función de la potencia transmitida P_X

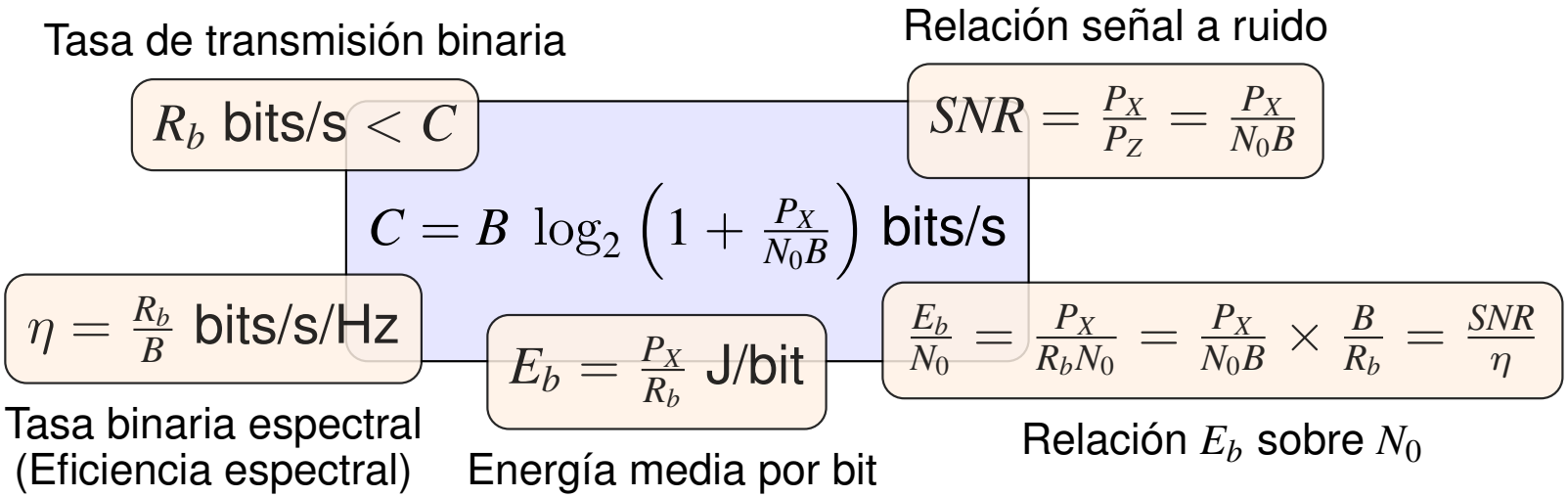
$$\lim_{P_X \to \infty} C = \infty$$

  - Se puede aumentar C de forma arbitraria aumentando P_X
  - Aumento lineal de C requiere aumento exponencial de P_X
- Capacidad de canal en función del ancho de banda (B Hz)

$$\lim_{B \to \infty} C = \frac{P_X}{N_0} \log_2(e) = 1{,}44 \frac{P_X}{N_0}$$

  - El incremento de B no permite un incremento arbitrario de C

Límites para la transmisión en un canal gausiano



- Sistema de comunicaciones práctico

$$R_b < C \rightarrow R_b < B \log_2(1 + SNR) \text{ bits/s}$$

  - Dividiendo por B en ambos lados y reordenando

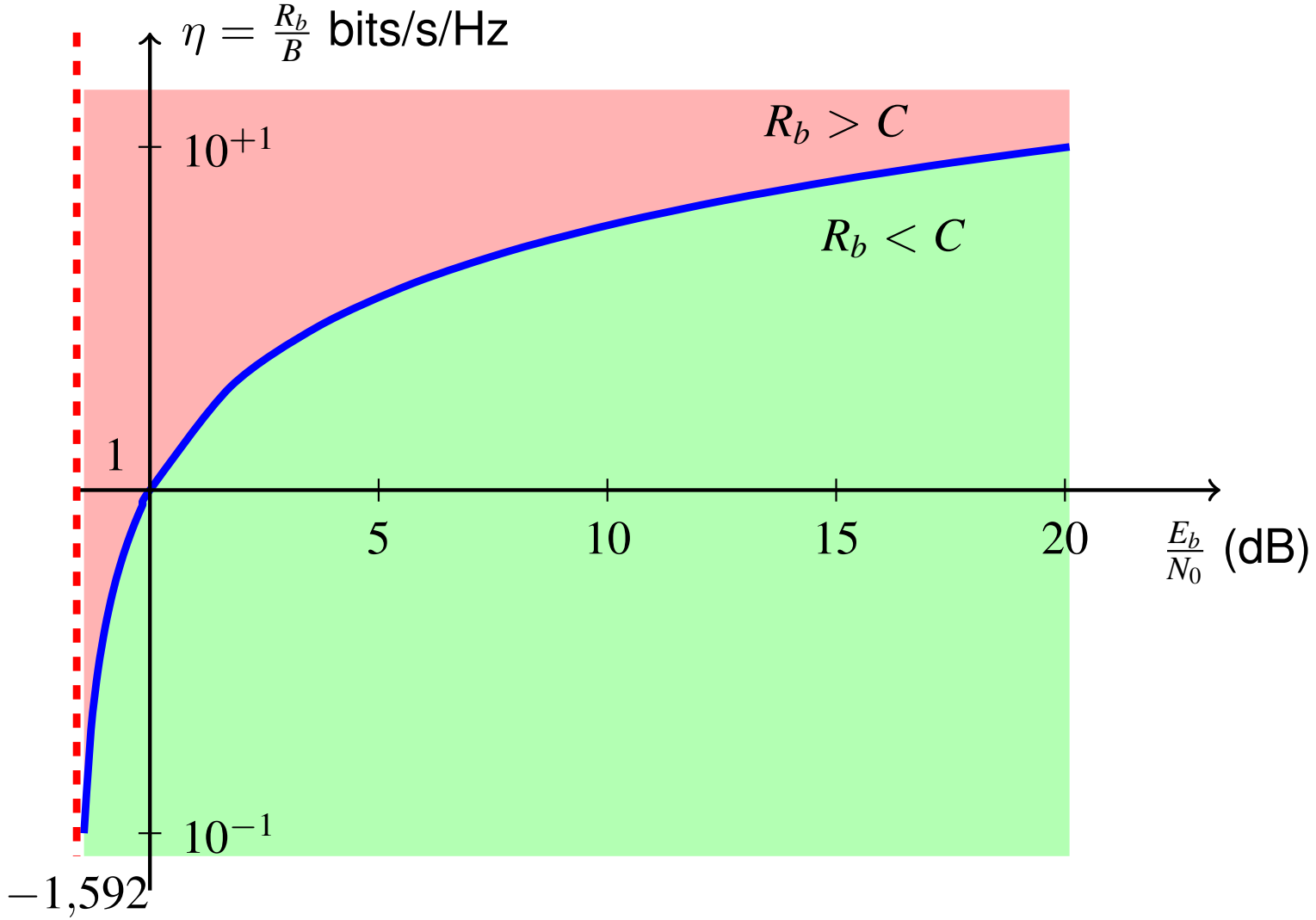
$$\eta < \log_2(1 + SNR), \qquad \eta < \log_2\left(1 + \eta \frac{E_b}{N_0}\right)$$

$$SNR > 2^{\eta} - 1, \qquad \frac{E_b}{N_0} > \frac{2^{\eta} - 1}{\eta}$$

Si $\eta \rightarrow 0$ entonces $\frac{E_b}{N_0} = \ln 2 = 0{,}693 \approx -1{,}6$ dB

Tasa binaria espectral frente a E_b/N_0

- Se representa sobre el plano η vs $\frac{E_b}{N_0}$ la curva $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^\eta - 1}{\eta}$
  - Divide el plano en dos regiones: sistemas con $R_b < C$ (prácticos) y con $R_b > C$



Relación señal a ruido normalizada

- Cota inferior para SNR

$$SNR > 2^{\eta} - 1$$

- Definición de SNR normalizada

$$SNR_{norm} = \frac{SNR}{2^{\eta} - 1}$$

- Cota inferior sobre SNR_{norm}

$$SNR_{norm} > 1 \ (0 \text{ dB})$$

Tipos de códigos

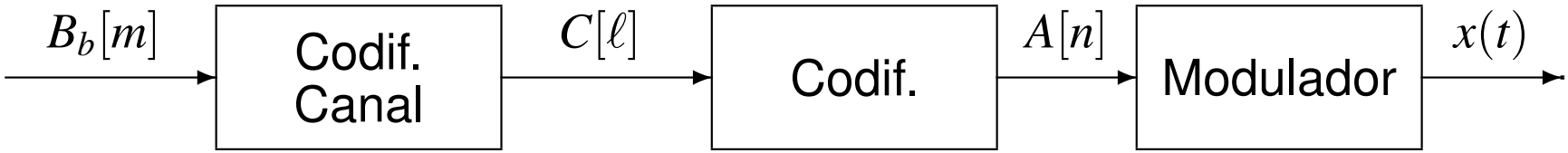
- Mecanismo de introducción de la redundancia
  - Códigos bloque
    - ★ Bloques de k bits se codifican de forma independiente
    - ★ Diccionario del código: k bits sin codificar / n bits codificados
    - ★ Concepto clave: distancia entre palabras código
    - ★ Ejemplo: código de repetición de orden $n-1$

Bits sin codificar ($k=1$)	Bits codificados (n)
1	11...1
0	00...0

  - Códigos convolucionales
    - ★ Codificación continua mediante filtrado digital
- Capacidad del código
  - Códigos de detección de errores
  - Códigos de corrección de errores
- Estadístico para la decisión
  - Salida dura: decodificación a partir de los bits decididos $\hat{C}[\ell]$
  - Salida blanda: decodificación a partir de la salida del demodulador $q[n]$
    - ★ Mejores prestaciones pero mayor complejidad
  - Borrado de bits: se "marcan" los bits/símbolos dudosos

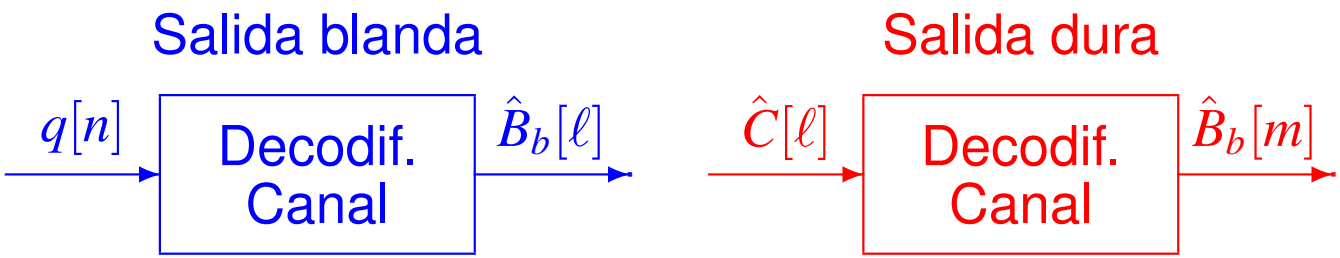
Salida blanda / salida dura

- Diagrama de bloques del transmisor



- Diagrama de bloques del receptor

- Decodificador de canal: salida blanda / salida dura



$B_b[m]$: bits de información (sin codificar)

$C[\ell]$: bits codificados

Salida dura / salida blanda

- Ejemplo: código repetición orden 2, modulación 2-PAM
  - Asignación binaria sobre la constelación: $0 \equiv -1$ / $1 \equiv +1$
  - Observación blanda: $\boldsymbol{q} = [-0{,}01,\ +1{,}2,\ -0{,}05]$
  - Observación dura: $\hat{\mathbf{c}} = [0,\ 1,\ 0]$
- Decodificación
  - Decodificación dura: por mayoría $\hat{B} = 0$
  - Decodificación blanda: comparar la observación $\boldsymbol{q}$ con:

$$\boldsymbol{q}_0 = [-1,-1,-1] \quad \text{y} \quad \boldsymbol{q}_1 = [+1,+1,+1]$$

$$d(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_0) = \sqrt{(-0{,}01-(-1))^2 + (+1{,}2-(-1))^2 + (-0{,}05-(-1))^2} = 2{,}59$$

$$d(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1) = \sqrt{(-0{,}01-(+1))^2 + (+1{,}2-(+1))^2 + (-0{,}05-(+1))^2} = 1{,}47$$

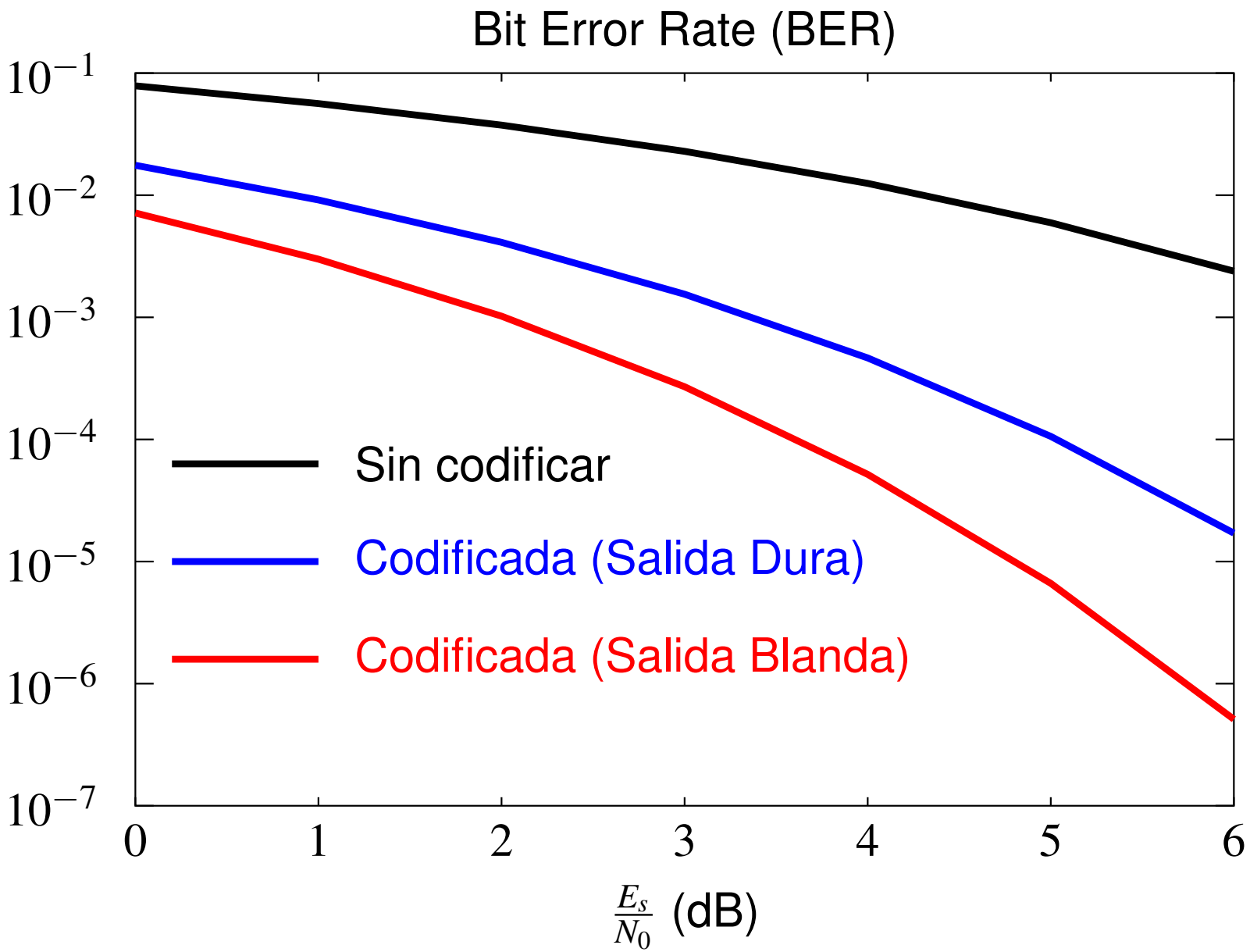
- Probabilidad de error para una BER=ε sobre la 2-PAM
  - Salida dura

$$P_e^{Dura} = 3\,\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3, \qquad \varepsilon = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

  - Salida blanda

$$P_e^{Blanda} = Q\left(\frac{d(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{6E_s}{N_0}}\right)$$

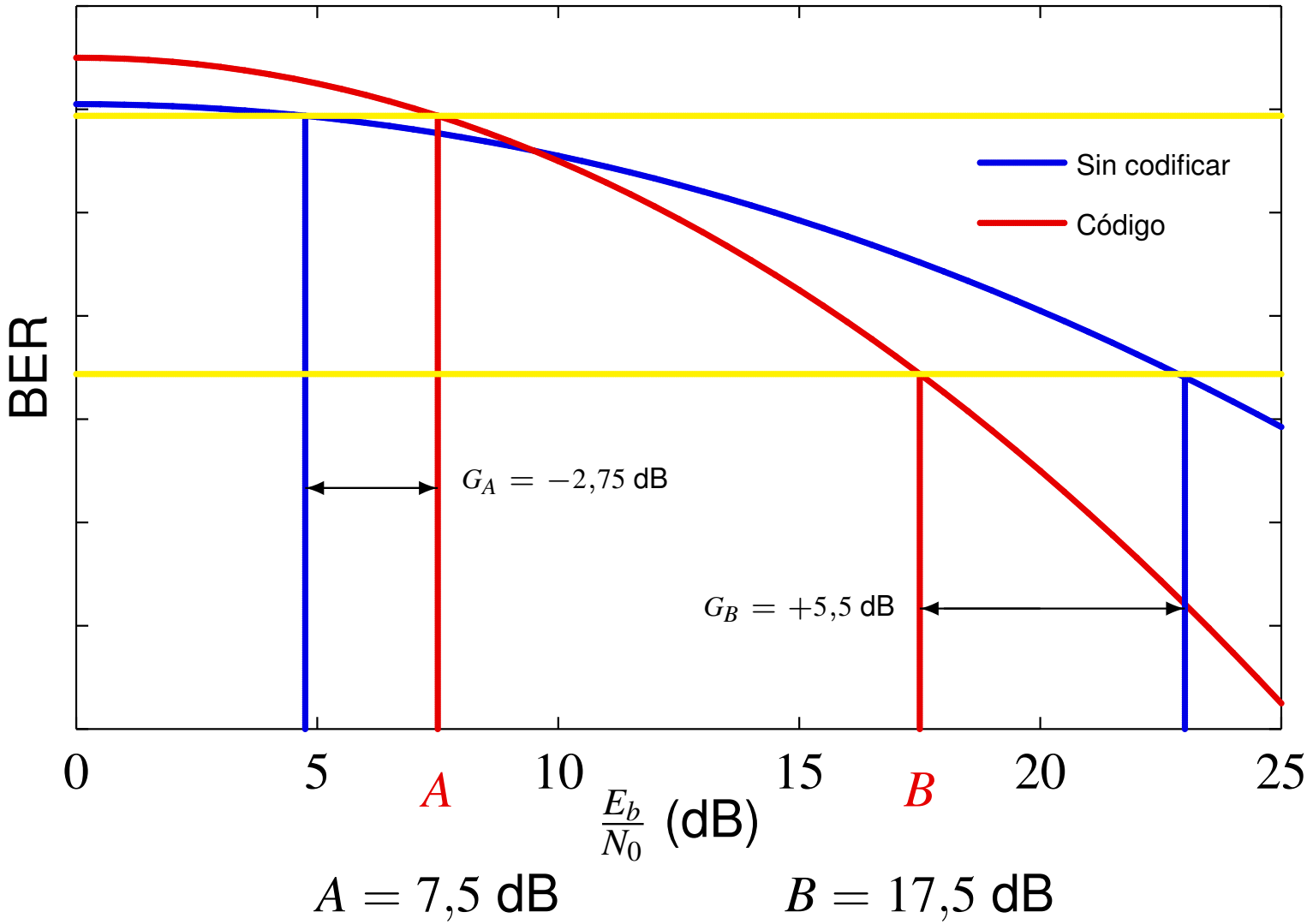
Salida dura / salida blanda



Ganancia de codificación

- Definición: diferencia en decibelios entre las relaciones E_b/N_0 necesarias para alcanzar una determinada BER sin codificar y utilizando la codificación
  - E_b: Energía media por bit de información
- Permite comparar las prestaciones de distintos códigos
- Depende de la BER (o de E_b/N_0)
  - Habitualmente se referencia a un valor concreto de E_b/N_0
- Puede ser positiva a partir de un cierto valor de E_b/N_0

Ganancia de codificación



Códigos bloque - Definiciones

- Codificación independiente de bloques de k bits
  - Conversión en bloques de n bits $\rightarrow$ Tasa $R = k/n$
- Definiciones para los bloques de bits
  - Información:

$$\mathbf{b}_i = [b_i[0], b_i[1], \cdots, b_i[k-1]],\ i = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$$

  - Codificados:

$$\mathbf{c}_i = [c_i[0], c_i[1], \cdots, c_i[n-1]],\ i = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$$

  - Diccionario del código: mensaje (palabra sin codificar) $\rightarrow$ palabra código

$$\mathbf{b}_i \rightarrow \mathbf{c}_i$$

- Peso de una palabra código $w(\mathbf{c}_i)$
  - Número de unos de la palabra
- Distancia de Hamming entre dos palabras código $d^H(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$
  - Número de bits diferentes entre ambas palabras
- Distancia mínima del código: $d^H_{min} \equiv d_{min}$
  - Mínima distancia de Hamming entre dos palabras código distintas

Codigos bloque - Ejemplo

- Diccionario del código para un código bloque $k = 2$, $n = 6$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

- Peso de las palabras

$$w(\mathbf{c}_0) = 3, \quad w(\mathbf{c}_1) = 3, \quad w(\mathbf{c}_2) = 2, \quad w(\mathbf{c}_3) = 4$$

- Distancias de Hamming entre dos palabras

$$\begin{aligned} d(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1) &= 4, \quad d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = 5 \\ d(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_2) &= 3, \quad d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) = 3 \\ d(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_3) &= 5, \quad d(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) = 4 \end{aligned}$$

- Distancia mínima del código

$$d_{min} = 3$$

Estimador óptimo - Salida dura

- Observación condicionada a la transmisión de $\mathbf{c}_i$

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_i + \mathbf{e},\ \mathbf{e} = [e[0], e[1], \cdots, e[n-1]]$$

- Modelo probabilístico del patrón de error ($BER = \varepsilon$)

$$p_{E[j]}(e[j]) = \varepsilon^{e[j]}\ (1-\varepsilon)^{1-e[j]} = \begin{cases} \varepsilon, & e[j] = 1 \\ 1-\varepsilon, & e[j] = 0 \end{cases}$$

- Verosimilitud (probabilidad condicional de la observación)
  - Error: $e[j] = r[j] - c[j]$
  - Verosimilitud para cada bit dado el bit de la observación $r[j]$

$$p_{R[j]|C[j]}(r[j]|c[j]) = \varepsilon^{e[j]}\ (1-\varepsilon)^{1-e[j]} = \varepsilon^{r[j]-c_i[j]}\ (1-\varepsilon)^{1-(r[j]-c_i[j])}$$

  - Verosimilitud de una palabra código para la observación $\mathbf{r}$

$$p_{\mathbf{R}|\mathbf{C}}(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) = \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{r[j]-c_i[j]}\ (1-\varepsilon)^{1-(r[j]-c_i[j])}$$

- Estimador de máxima verosimilitud (ML)

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_i = \arg\min_{\mathbf{c}_i} d^H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i)$$

Capacidades de detección y corrección con salida dura

- Prestaciones dependen de distancias de Hamming
  - Un error no será detectado si los errores de transmisión lo transforman en otra palabra del código
  - Un error ocurre cuando el número de errores en la transmisión de la palabra codificada hace que la palabra recibida esté a una menor distacia de Hamming de otra palabra del código
- Prestaciones determinadas por la distancia mínima del código: d_{min}
  - Capacidad de detección (en n bits):

$$d = d_{min} - 1 \text{ errores}$$

  - Capacidad de corrección (en n bits):

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor \text{ errores}$$

Estimador óptimo - Salida blanda

- Depende de la constelación y de la asignación binaria
  - M símbolos: $m = \log_2(M)$ bits/símbolo
- Secuencia de símbolos para una palabra código

$$\mathbf{c}_i \rightarrow \boldsymbol{A}_i = [A_i[0], A_i[1], \cdots, A_i[n'-1]],\ n' = \frac{n}{m}$$

- Modelo probabilístico de la observación condicionada a transmitir $\mathbf{c}_i$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}_i + \mathbf{e},\ \mathbf{e} = [e[0], e[1], \cdots, e[n'-1]]$$

- Modelo probabilístico del error:

$$f_E(e[j]) = N(0, \sigma_z^2)$$

- Verosimilitud (probabilidad condicional de la observación):

$$f_{\boldsymbol{q}|A}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}_i) = N(\boldsymbol{A}_i, \sigma_z^2)$$

- Estimador de máxima verosimilitud: minimizar distancia euclídea

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_i, \quad i = \arg\min_i d^E(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{A}_i)$$

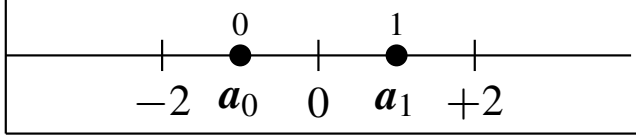
Ejemplo de código bloque y asignación de símbolos

- Diccionario del código para un código bloque $k = 2$ $n = 6$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

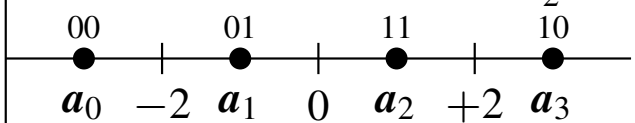
- Asignación de símbolos depende de la constelación y asignación binaria

Ejemplo A: 2-PAM ($n' = n$)



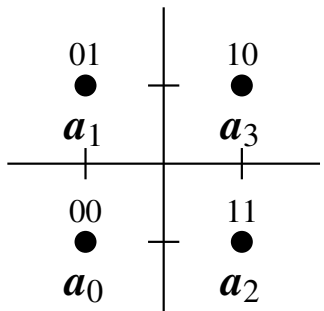
$$A_0 = [a_0, a_0, a_1, a_1, a_1, a_0] = [-1, -1, +1, +1, +1, -1]$$
$$A_1 = [a_0, a_1, a_0, a_0, a_1, a_1] = [-1, +1, -1, -1, +1, +1]$$
$$A_2 = [a_1, a_0, a_0, a_1, a_0, a_0] = [+1, -1, -1, +1, -1, -1]$$
$$A_3 = [a_1, a_1, a_1, a_0, a_0, a_1] = [+1, +1, +1, -1, -1, +1]$$

Ejemplo B: 4-PAM ($n' = \frac{n}{2}$)



$$A_0 = [a_0, a_2, a_3] = [-3, +1, +3]$$
$$A_1 = [a_1, a_0, a_2] = [-1, -3, +1]$$
$$A_2 = [a_3, a_1, a_0] = [+3, -1, -3]$$
$$A_3 = [a_2, a_3, a_1] = [+1, +3, -1]$$

Ejemplo C: 4-QAM ($n' = \frac{n}{2}$)



$$A_0 = [a_0, a_2, a_3] = \left[\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\+1\end{bmatrix}\right]$$
$$A_1 = [a_1, a_0, a_2] = \left[\begin{bmatrix}-1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}\right]$$
$$A_2 = [a_3, a_1, a_0] = \left[\begin{bmatrix}+1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right]$$
$$A_3 = [a_2, a_3, a_1] = \left[\begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\+1\end{bmatrix}\right]$$

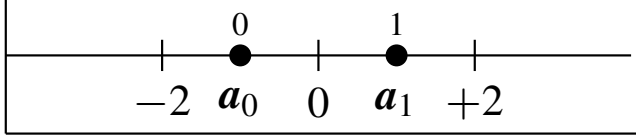
Ejemplo de decodificación sobre salida blanda

- Diccionario del código para un código bloque $k = 2$ $n = 6$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

- Asignación de símbolos

Ejemplo A: 2-PAM ($n' = n$)



$$\begin{aligned} A_0 &= [a_0, a_0, a_1, a_1, a_1, a_0] = [-1, -1, +1, +1, +1, -1] \\ A_1 &= [a_0, a_1, a_0, a_0, a_1, a_1] = [-1, +1, -1, -1, +1, +1] \\ A_2 &= [a_1, a_0, a_0, a_1, a_0, a_0] = [+1, -1, -1, +1, -1, -1] \\ A_3 &= [a_1, a_1, a_1, a_0, a_0, a_1] = [+1, +1, +1, -1, -1, +1] \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5
$q[n]$	+0,8	−1,2	−0,7	+0,2	−0,5	−1,1

$$d(q, A_0) = \sqrt{(+0{,}8 - (-1))^2 + (-1{,}2 - (-1))^2 + (-0{,}7 - (+1))^2 + (+0{,}2 - (+1))^2 + (-0{,}5 - (+1))^2 + (-1{,}1 - (-1))^2} = \sqrt{9{,}07}$$

$$d(q, A_1) = \sqrt{(+0{,}8 - (-1))^2 + (-1{,}2 - (+1))^2 + (-0{,}7 - (-1))^2 + (+0{,}2 - (-1))^2 + (-0{,}5 - (+1))^2 + (-1{,}1 - (+1))^2} = \sqrt{16{,}27}$$

$$d(q, A_2) = \sqrt{(+0{,}8 - (+1))^2 + (-1{,}2 - (-1))^2 + (-0{,}7 - (-1))^2 + (+0{,}2 - (+1))^2 + (-0{,}5 - (-1))^2 + (-1{,}1 - (-1))^2} = \sqrt{1{,}07}$$

$$d(q, A_3) = \sqrt{(+0{,}8 - (+1))^2 + (-1{,}2 - (+1))^2 + (-0{,}7 - (+1))^2 + (+0{,}2 - (-1))^2 + (-0{,}5 - (-1))^2 + (-1{,}1 - (+1))^2} = \sqrt{13{,}87}$$

Decisión: $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_2 = 100100$

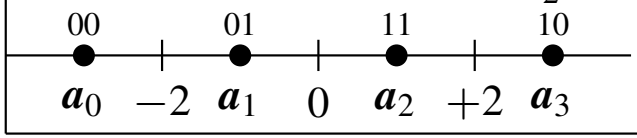
Ejemplo de decodificación sobre salida blanda (II)

- Diccionario del código para un código bloque $k = 2$ $n = 6$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

- Asignación de símbolos

Ejemplo B: 4-PAM ($n' = \frac{n}{2}$)



$$A_0 = [a_0, a_2, a_3] = [-3, +1, +3]$$
$$A_1 = [a_1, a_0, a_2] = [-1, -3, +1]$$
$$A_2 = [a_3, a_1, a_0] = [+3, -1, -3]$$
$$A_3 = [a_2, a_3, a_1] = [+1, +3, -1]$$

n	0	1	2
$q[n]$	+0,8	+2,2	−0,7

$$d(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{A}_0) = \sqrt{(+0{,}8 - (-3))^2 + (+2{,}2 - (+1))^2 + (-0{,}7 - (+3))^2} = \sqrt{29{,}57}$$
$$d(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{A}_1) = \sqrt{(+0{,}8 - (-1))^2 + (+2{,}2 - (-3))^2 + (-0{,}7 - (+1))^2} = \sqrt{33{,}17}$$
$$d(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{A}_2) = \sqrt{(+0{,}8 - (+3))^2 + (+2{,}2 - (-1))^2 + (-0{,}7 - (-3))^2} = \sqrt{20{,}37}$$
$$d(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{A}_3) = \sqrt{(+0{,}8 - (+1))^2 + (+2{,}2 - (+3))^2 + (-0{,}7 - (-1))^2} = \sqrt{0{,}77}$$

Decisión: $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_3 = 111001$

Códigos bloque lineales

- Código $C(k,n)$
- Base del código: k palabras código linealmente independientes

$$\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_{k-1}\}$$

$$\mathbf{g}_i = [g_i[0], g_i[1], \cdots, g_i[n-1]]$$

- Palabra código: combinación lineal de los k elementos de la base

$$\mathbf{c}_i = b_i[0]\ \mathbf{g}_0 + b_i[1]\ \mathbf{g}_1 + \cdots + b_i[k-1]\ \mathbf{g}_{k-1}$$

  Coeficientes de la expansión: k bits de información (sin codificar) $b_i[\ell]$

- Propiedades
  - Todos los elementos de la base pertenencen al código

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{g}_\ell \rightarrow w(\mathbf{b}_i) = 1, \quad b_i[\ell] = 1$$

  - $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0} = [0, 0, \cdots, 0]$ pertenece al código
    - ★ Asociada a $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0} = [0, 0, \cdots, 0]$
  - Toda combinación lineal de palabras código $\in C(k,n)$
  - Todas las palabras del código tienen a otra palabra a distancia d_{min}
  - Por tanto, $\mathbf{c}_0$ tiene otra palabra a d_{min}

$$d_{min} = \min_{\mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_0} w(\mathbf{c}_i)$$

Matriz generadora del código

- Agrupación de la base en una matriz $k \times n$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0[0] & g_0[1] & \cdots & g_0[n-1] \\ g_1[0] & g_1[1] & \cdots & g_1[n-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1}[0] & g_{k-1}[1] & \cdots & g_{k-1}[n-1] \end{bmatrix}$$

- Obtención de las palabras código

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}_i \, \mathbf{G}$$

- Códigos sistemáticos: el mensaje $\mathbf{b}_i$ forma parte de $\mathbf{c}_i$

$$\mathbf{c}_i = [\mathbf{b}_i | \mathbf{p}_i] \rightarrow \mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}]$$

$$\mathbf{c}_i = [\mathbf{p}_i | \mathbf{b}_i] \rightarrow \mathbf{G} = [\mathbf{P} | \mathbf{I}_k]$$

Matriz generadora del código - Ejemplo

- Código $C(2,5)$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Palabras código

$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	1 0 1 0 1
1 0	0 1 1 1 0
1 1	1 1 0 1 1

- Código sistemático
- Distancia mínima del código: $d_{min} = 3$
  - Detecta 2 errores (en $n = 5$ bits)
  - Corrige 1 error (en $n = 5$ bits)

Matriz de chequeo de paridad

- Matriz $(n-k) \times n$: complemento ortogonal de $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}\ \mathbf{H}^T = \mathbf{0} \text{ matriz de } k \times (n-k) \text{ ceros}$$

- Códigos sistemáticos

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}] \ \rightarrow \ \mathbf{H} = [\mathbf{P}^T | \mathbf{I}_{n-k}]$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} | \mathbf{I}_k] \ \rightarrow \ \mathbf{H} = [\mathbf{I}_{n-k} | \mathbf{P}^T]$$

- Identificación de palabras código

$$\mathbf{c}_i\ \mathbf{H}^T = \mathbf{b}_i\ \mathbf{G}\ \mathbf{H}^T = \mathbf{0} \text{ vector de } n-k \text{ ceros}$$

- Decodificación mediante síndrome
  - Modelo de transmisión: $\mathbf{r} = \mathbf{c}_i + \mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$: patrón de error)
  - Síndrome

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}\ \mathbf{H}^T = (\mathbf{c}_i + \mathbf{e})\ \mathbf{H}^T = \mathbf{e}\ \mathbf{H}^T$$

  - Decodificación: Tabla de síndromes

Matriz de chequeo de paridad y tabla de síndromes - Ejemplo

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \mathbf{H} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Tabla de síndromes: $\mathbf{s} = \mathbf{e}\,\mathbf{H}^T$

e	s
0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0	1 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0
0 0 1 0 0	0 0 1
0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1	1 0 1
¿?	1 1 0
¿?	1 1 1

$\mathbf{s} = 110 \rightarrow \mathbf{e}_1 = 11000, \mathbf{e}_2 = 00011, \mathbf{e}_3 = 10110, \mathbf{e}_4 = 01101$

$\mathbf{s} = 111 \rightarrow \mathbf{e}_1 = 10010, \mathbf{e}_2 = 01001, \mathbf{e}_3 = 11100, \mathbf{e}_4 = 00111$

Solución: elegir uno de los dos patrones de $t + 1 = 2$ errores ($\mathbf{e}_1$ o $\mathbf{e}_2$)

- Que haya dos bits erróneos es más probable que haya tres o más errores

Decodificación por síndrome

- Proceso de decodificación alternativo y equivalente a máxima verosimilitud sobre salida dura
  - Pasos a seguir:
    1. Cálculo del síndrome

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}\,\mathbf{H}^T$$

    2. Identificación del patrón de error (tabla de síndromes)

$$\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{e}$$

    3. Corrección de errores (decisión de palabra código)

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} = \mathbf{c}_i$$

    4. Decodificación

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_i \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_i$$

Más sencillo en códigos sistemáticos

Ventaja de trabajar con $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ y con códigos sistemáticos

- Implementación del codificador y del decodificador
  - Número de palabras del código: 2^k
    - ★ $k = 2, n = 5$
      - 4 palabras
    - ★ $k = 247, n = 255$ (Código de Hamming)
      - $2^{247} \approx 2{,}26\ 10^{74}$ palabras
  - Número de síndromes posibles: 2^{n-k}
    - ★ $k = 2, n = 5$ $(t = 1)$
      - 8 síndromes
    - ★ $k = 247, n = 255$ $(t = 1)$
      - 256 síndromes
- Alternativa: códigos estructurados
  - Implementación mediante registros de desplazamiento
    - ★ Definición mediante polinomios generadores

Método de eliminación - Ejemplo

- Método para obtener una matriz de chequeo para un código no sistemático
- Sustitución de filas por combinaciones lineales de otras
  - 1ª fila: 1ª+2ª filas
  - 2ª fila: 1ª fila
- Código $C(2,5)$

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \mathbf{G}' = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Palabras código

$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	1 0 1 0 1
1 0	0 1 1 1 0
1 1	1 1 0 1 1

$\rightarrow$

$\mathbf{b}'_i$	$\mathbf{c}'_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	0 1 1 1 0
1 0	1 1 0 1 1
1 1	1 0 1 0 1

- Mismas palabras código / distintas asignaciones
  - La misma matriz $\mathbf{H}$ es válida para generar la tabla de síndromes

Límite de Hamming

- Número de síndromes con redundancia $r = n - k$:

$$2^{n-k} = 2^r$$

- Límite de Hamming: para corregir t errores la mínima redundancia necesaria es

$$r \geq \log_2 V(n,t), \;\; V(n,t) = \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j}$$

  - $V(n,t)$: Esfera de Hamming de radio t

- Interpretación con número de síndromes disponibles

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t} \leq 2^{n-k}$$

  - Igualdad: Códigos perfectos

Códigos perfectos

- Códigos de repetición (decisión por mayoría)
  - n impar, $k = 1$, $t = \frac{n-1}{2}$ $(d_{min} = n)$
- Códigos de Hamming
  - Para $m \geq 3$, $n = 2^m - 1$, $k = 2^m - m - 1$, $t = 1$ $(d_{min} = 3)$
    - Redundancia: $n - k = m$
  - Matriz de chequeo: en las n columnas aparecen todas las posibles combinaciones binarias de $(n - k)$ bits, excepto la todo ceros
    - Ejemplo: Código Hamming (4,7)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Código de Golay
  - $n = 23$, $k = 12$, $t = 3$ $(d_{min} = 7)$

Código de Golay

- Matriz generadora sistemática

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|cccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1
\end{array}\right]$$

- Código de Golay extendido
  - Se añade un bit de paridad: $d_{min} = 8$, (detecta $d = 7$ errores)
    - ★ No es un código perfecto
  - Código $k = 12$, $n = 24$, tasa $R = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|cccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1
\end{array}\right]$$

Prestaciones - Decodificación dura

- Probabilidad de error de bit (BER) en la transmisión: ε
  - Se comenten errores cuando se excede la capacidad de corrección del código
- Código perfecto de corrección de hasta t errores en n bits

$$P_e = \sum_{e=t+1}^{n} \binom{n}{e} \varepsilon^e \, (1-\varepsilon)^{n-e}$$

- Códigos no perfectos que corrigen:
  - Todos los patrones de hasta t errores
  - Y además a patrones de $t+1$ errores

$$P_e = \left[\binom{n}{t+1} - a \right] \varepsilon^{t+1} \, (1-\varepsilon)^{n-(t+1)} + \sum_{e=t+2}^{n} \binom{n}{e} \varepsilon^e \, (1-\varepsilon)^{n-e}$$

- Codificación tipo Gray o pseudo-Gray para SNR alta

$$BER \approx \frac{1}{k} P_e$$

Prestaciones - Decodificación blanda

- Probabilidad de error

$$P_e \approx c\, Q\left(\frac{d^E_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

  - d^E_{min}: mínima distancia euclídea entre las secuencias de símbolos correspondientes a dos palabras código diferentes

$$d^E_{min} = \min_{j\neq i} d^E(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j)$$

  - c: máximo número de palabras cuyas secuencias de símbolos están a distancia mínima (euclídea) de la de una dada

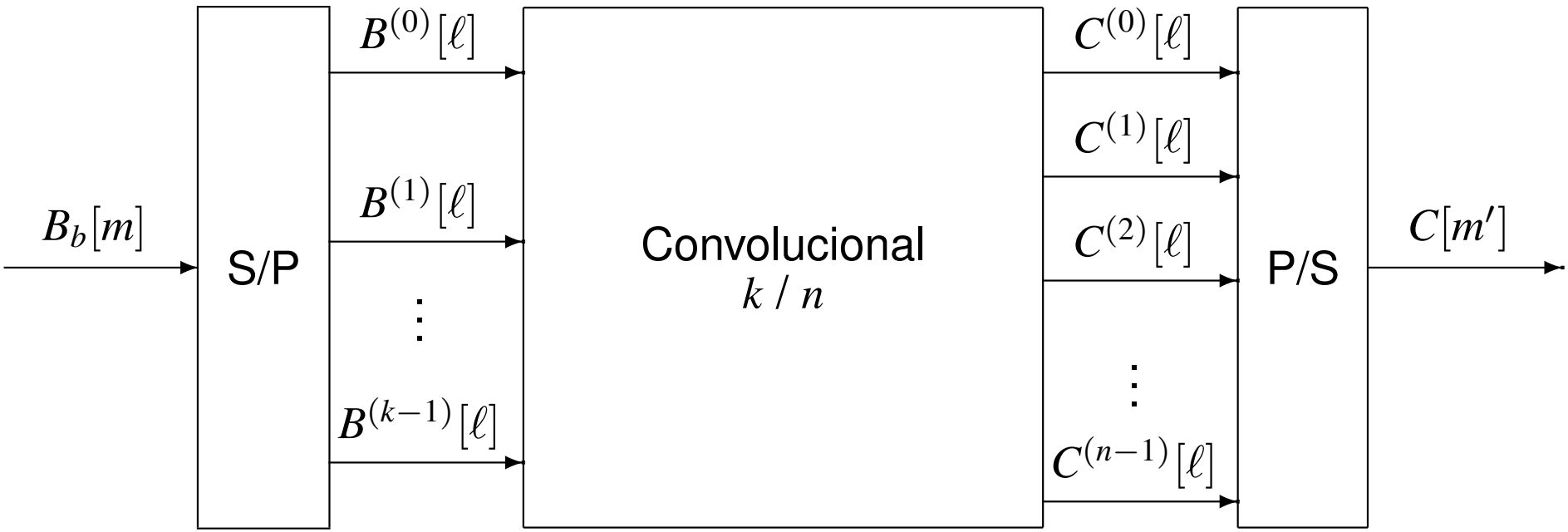
- En general, d^E_{min} depende de la constelación y de la asignación binaria
  - Modulaciones binarias (constelación de 2 símbolos $\boldsymbol{a}_0$ y $\boldsymbol{a}_1$)

$$d^E(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = d^E(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)\sqrt{d^H(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)}$$

$$P_e \approx c\, Q\left(\frac{d^E(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\sqrt{d^H_{min}}\right)$$

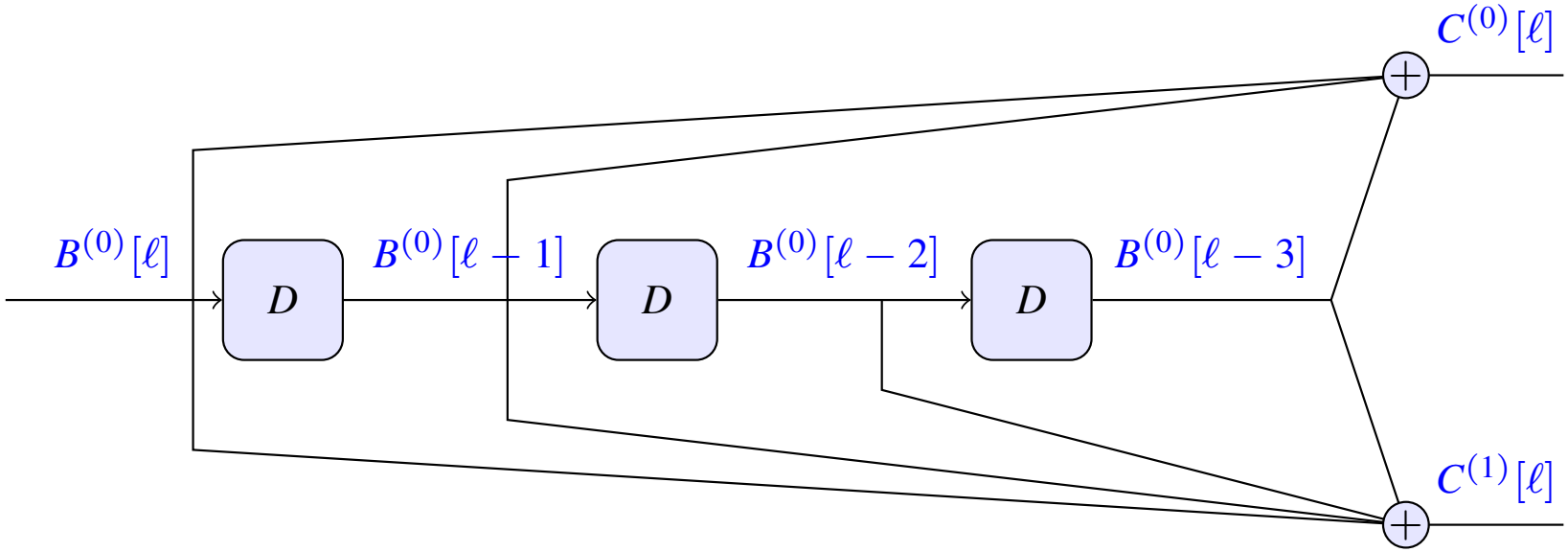
Códigos convolucionales

- Conversor serie / paralelo (S/P)
- Codificador convolucional
- Conversor paralelo / serie (P/S)



Códigos convolucionales

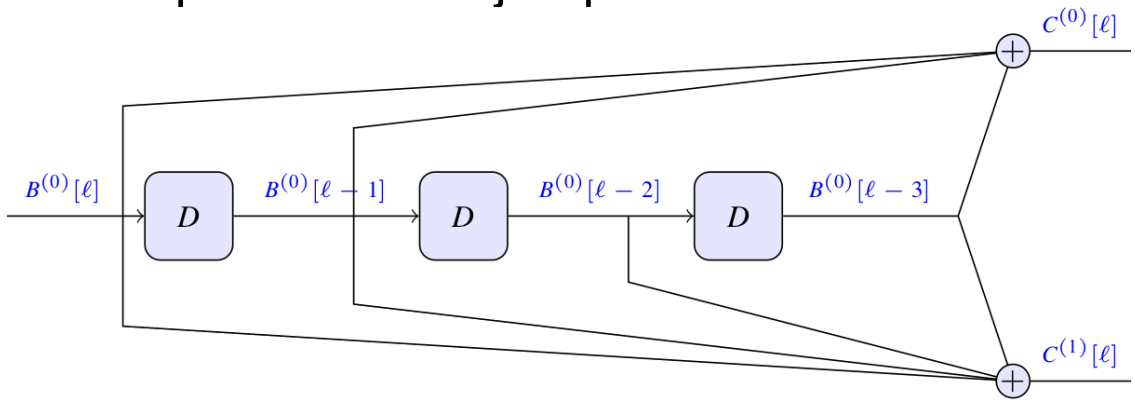
- Introducción de la redundancia mediante filtrado
  - Introducción de memoria
- Tasa $R = k/n$: banco de filtros con
  - k entradas
  - n salidas



- Notación:
  - Entradas: $B^{(i)}[\ell]$, con $i = 0, 1, \cdots, k-1$
  - Salidas: $C^{(j)}[\ell]$, con $j = 0, 1, \cdots, n-1$

Representaciones de los códigos convolucionales

- Representación esquemática - Ejemplo A



- Relación entrada salidas (Analítica)

$$C^{(0)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-3]$$

$$C^{(1)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-2] + B^{(0)}[\ell-3]$$

- Representación de secuencias con polinomios en D - Transformada D

$$B^{(i)}(D) = \sum_{\ell} B^{(i)}[\ell]\, D^{\ell}$$

  - Propiedad de la representación en D respecto a retardos

$$B^{(i)}[\ell-d] \leftrightarrow B^{(i)}(D)\, D^{d}$$

Representaciones de los códigos convolucionales (II)

- Notación mediante polinomios en D

$$C^{(0)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^3\right\}$$

$$C^{(1)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^2 + D^3\right\}$$

- Notación matricial (polinomios):

$$\mathbf{C}(D)_{1\times n} = \mathbf{B}(D)_{1\times k}\,\mathbf{G}(D)_{k\times n}$$

- Matriz generadora de tamaño $k \times n$
  - Cada elemento es un polinomio en D
  - Elemento fila i columna j: contribución a la salida j-ésima de la entrada i-ésima
  - Ejemplos
    - ★ Ejemplo anterior (A): $k = 1$, $n = 2$

$$\mathbf{G}(D) = \left[1 + D + D^3,\ 1 + D + D^2 + D^3\right]_{1\times 2}$$

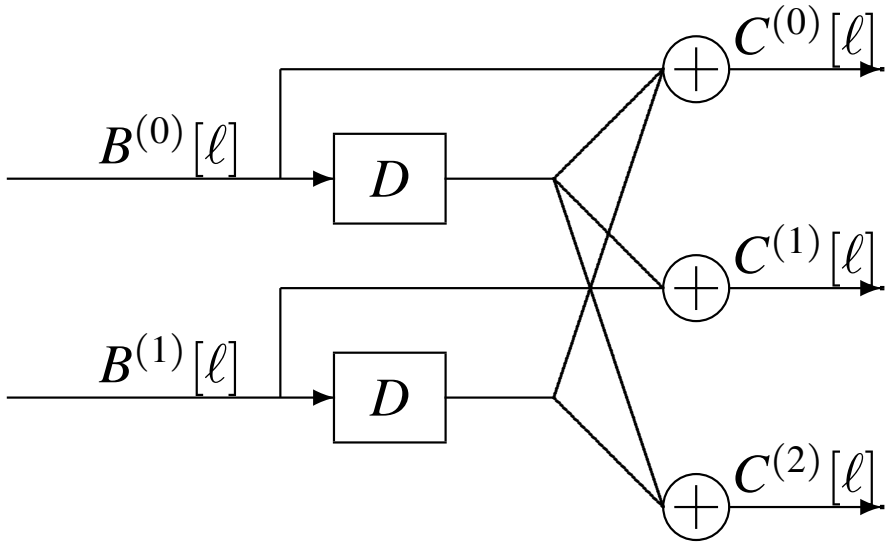
    - ★ Otro ejemplo (B): $k = 2$, $n = 3$

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Paso a representación esquemática - Ejemplo B

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

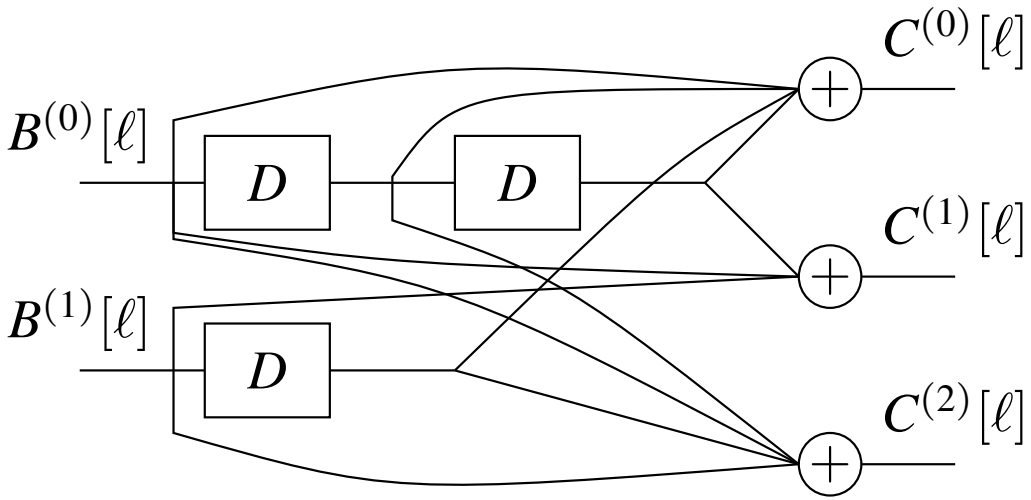
- Número de entradas del banco de filtros:
  - Número de filas de la matriz $\mathbf{G}(D)$: $k = 2$
- Número de salidas del banco de filtros:
  - Número de columnas de la matriz $\mathbf{G}(D)$: $n = 3$
- Número de memorias (elementos de retardo) de cada entrada:
  - Máximo grado de los polinomios en su correspondiente fila: $M^{(0)} = 1$, $M^{(1)} = 1$



Paso a representación esquemática - Ejemplo C

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ D & 1 & 1+D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- Número de entradas del banco de filtros:
  - Número de filas de la matriz $\mathbf{G}(D)$: $k = 2$
- Número de salidas del banco de filtros:
  - Número de columnas de la matriz $\mathbf{G}(D)$: $n = 3$
- Número de memorias (elementos de retardo) de cada entrada:
  - Máximo grado de los polinomios en su correspondiente fila: : $M^{(0)} = 2$, $M^{(1)} = 1$



Parámetros de interés

- Memoria total del código: M_t
  - Número total de unidades de retardo (memorias)

$$M_t = \sum_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$$

  - Memoria de la entrada i-ésima:

$$M^{(i)} = \max_j \text{grado}(g_{i,j}(D))$$

- Longitud de restricción: K
  - Máxima longitud de la respuesta al impulso del codificador (máximo número de instantes de tiempo en los que un bit afecta a la salida del codificador)

$$K = 1 + \max_{i,j} \text{grado}(g_{i,j}(D)) = 1 + K_E$$

K_E: memoria de la respuesta al impulso del codificador

  - En general las prestaciones aumentan con K

Códigos sistemáticos

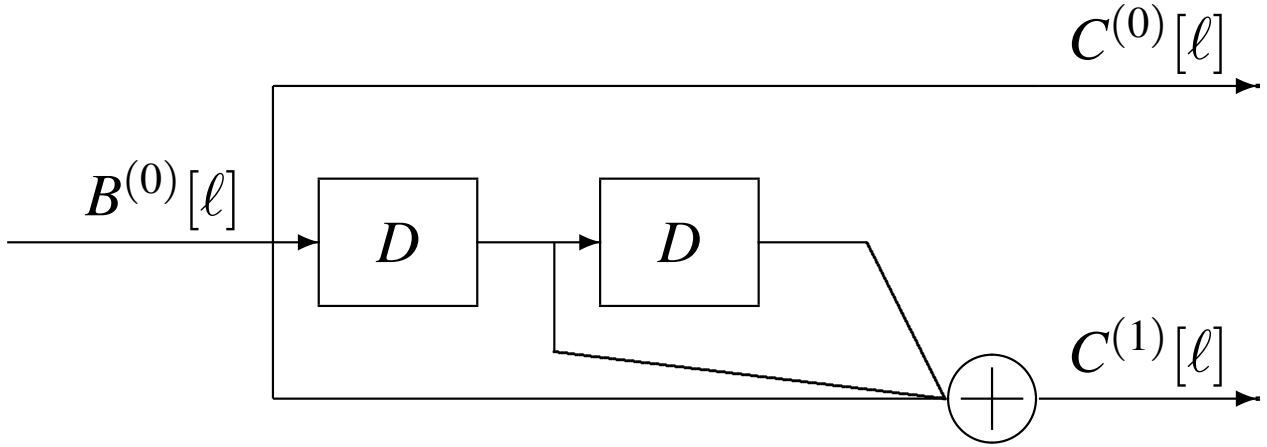
- Matriz de generación

$$\mathbf{G}(D) = [\mathbf{I}_k \quad | \quad \mathbf{P}(D)]$$

$$\mathbf{G}(D) = [\mathbf{P}(D) \quad | \quad \mathbf{I}_k]$$

  - Las entradas se “copian” en algunas de las salidas
  - Ejemplo (D)

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1 + D + D^2 \end{bmatrix}$$



Códigos sistemáticos - otro ejemplo (E)

$$\mathbf{G}(D) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D & 1 & 0 \\ D & 1 & 1+D & 0 & 1 \end{array}\right]$$

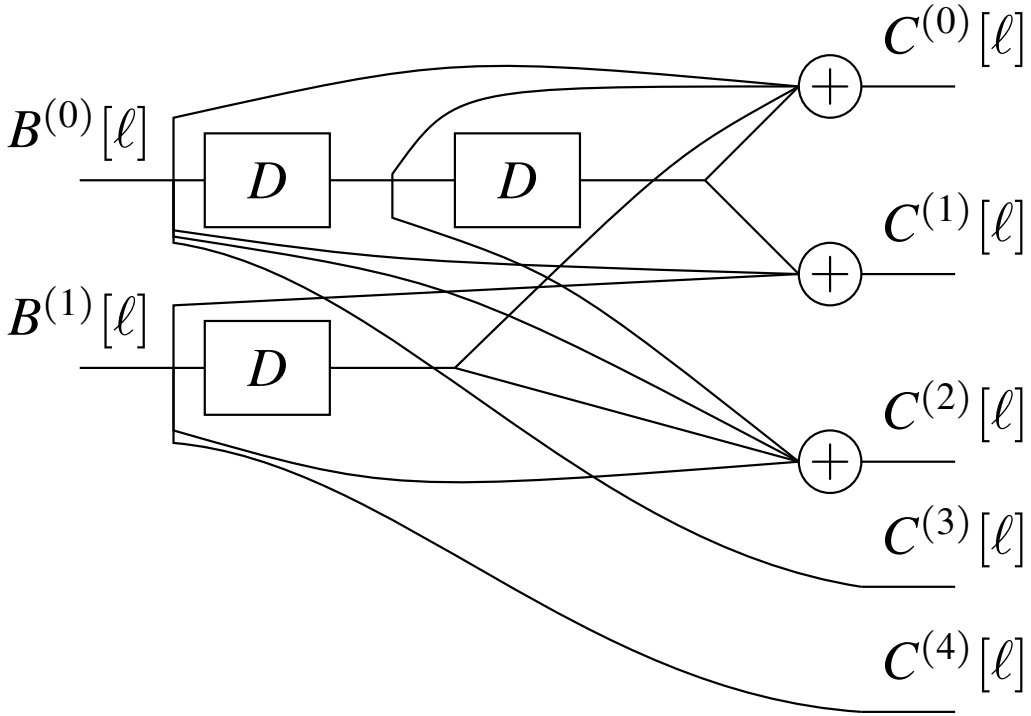


Diagrama de rejilla

- Definición del estado del codificador en un instante ℓ
  - Contenido de sus memorias (M_t bits ordenados)

$$\psi[\ell] = [B^{(0)}[\ell-1], \cdots, B^{(0)}[\ell - M^{(0)}], \cdots, B^{(k-1)}[\ell-1], \cdots, B^{(k-1)}[\ell - M^{(k-1)}]]$$

- Diagrama de rejilla

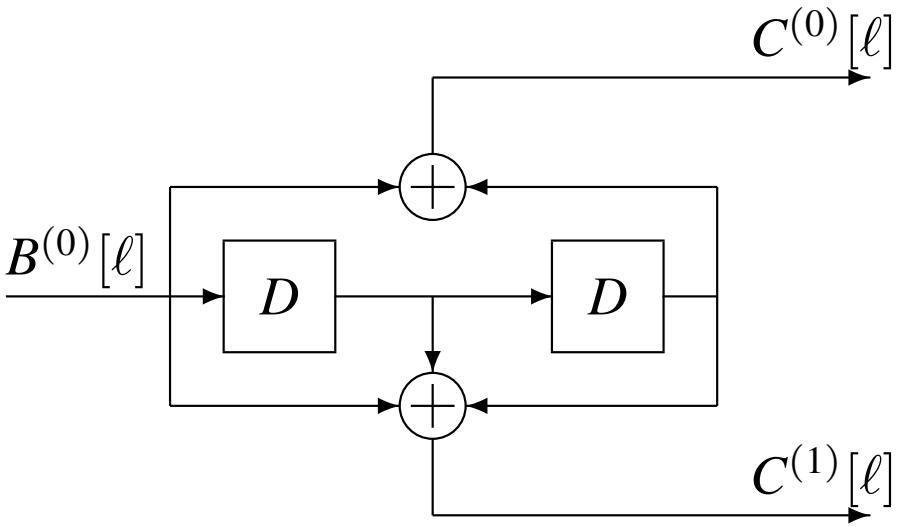
$$\psi[\ell] \xrightarrow{\text{etiqueta}} \psi[\ell+1]$$

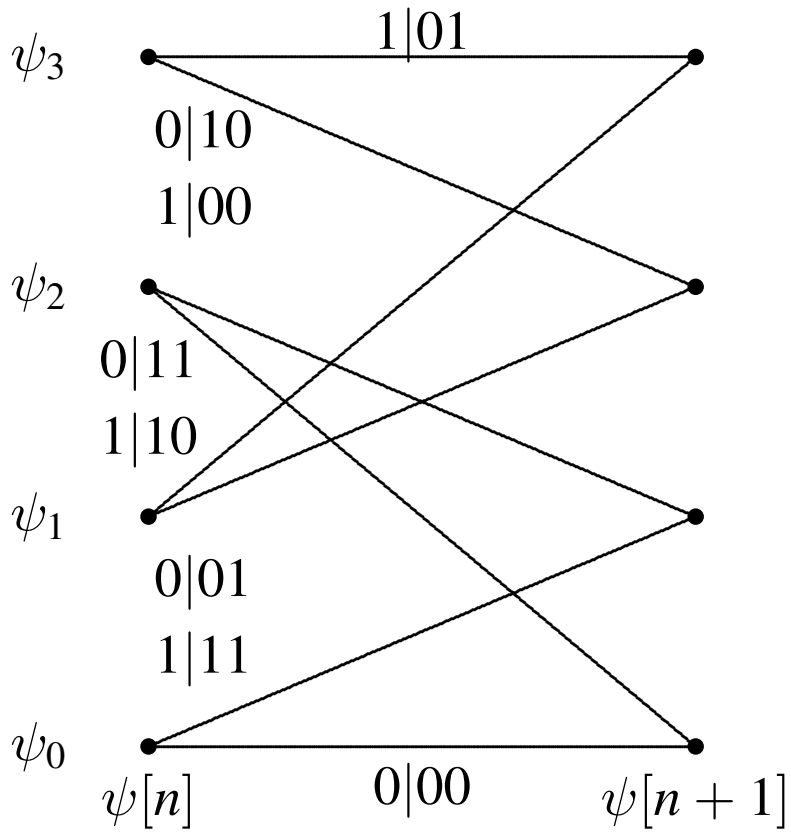
- Etiquetado de la rejilla
  - Bits a la entrada (sin codificar) | Bits a la salida (codificados)

$$B^{(0)}[\ell], B^{(1)}[\ell], \cdots, B^{(k-1)}[\ell] \;\Big|\; C^{(0)}[\ell], C^{(1)}[\ell], \cdots, C^{(n-1)}[\ell]$$

Ejemplo - Convolucional F

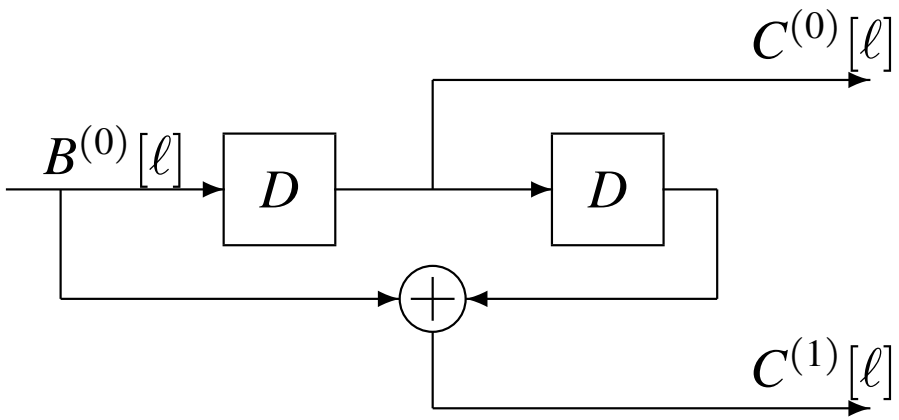
- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$

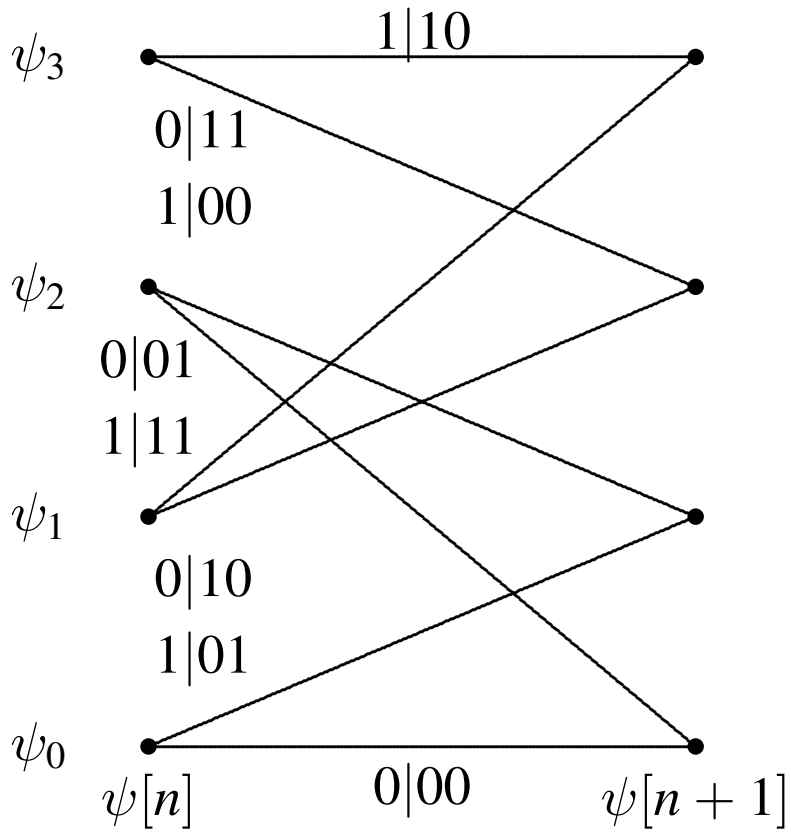




Ejemplo - Convolucional G

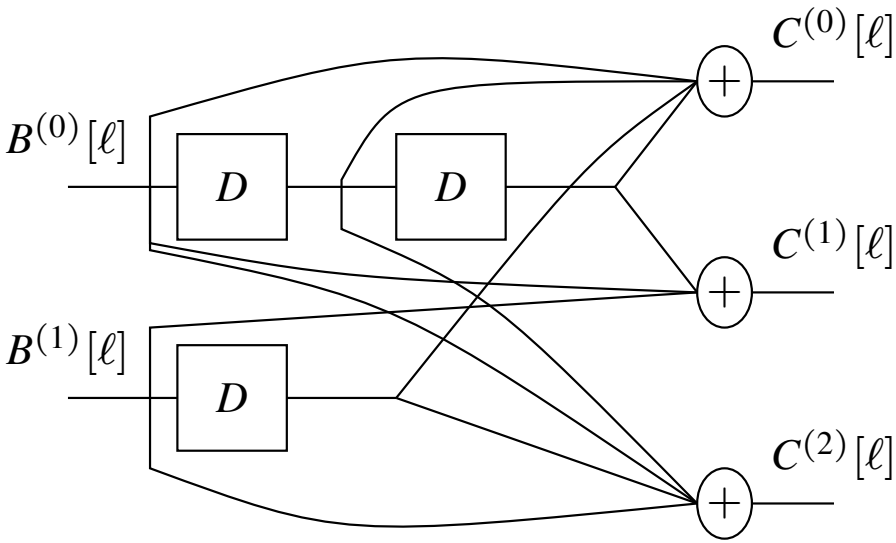
- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$

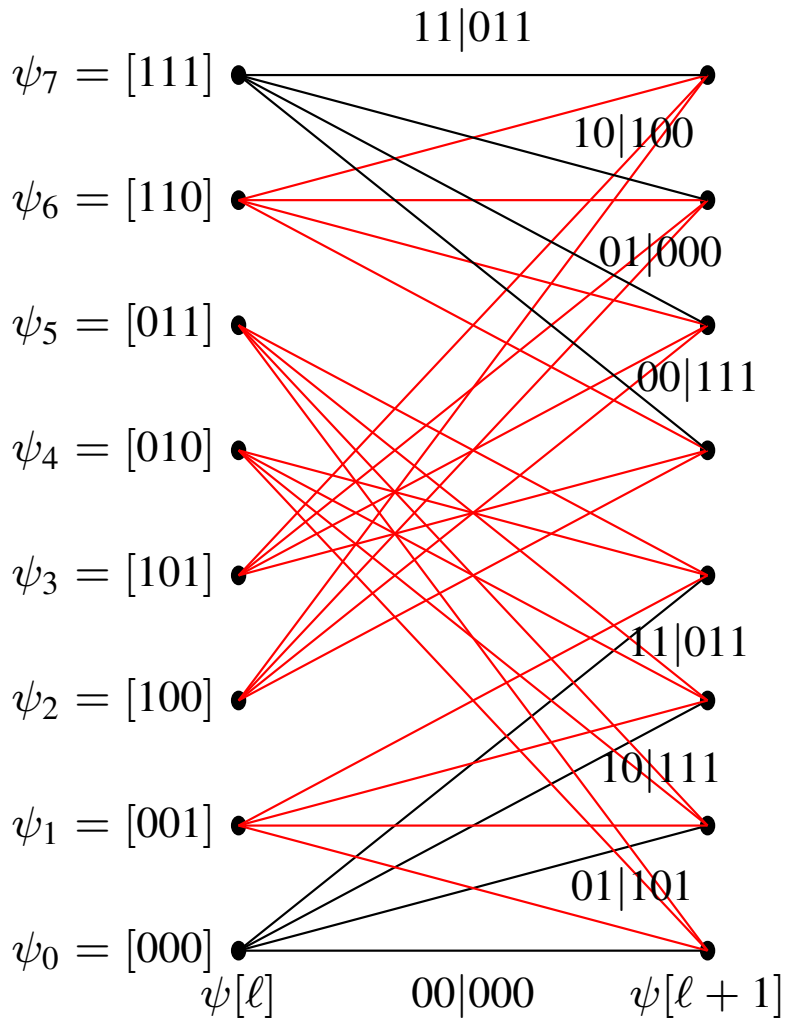




Ejemplo - Convolucional C

- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2], B^{(1)}[\ell-1]\right]$





Cabecera y número de transiciones en la rejilla

- Codificación de L bloques de k bits: $k \times L$ bits (info)
  - Conversión serie / paralelo
    - ★ L instantes discretos para $B^{(i)}[\ell]$, $\ell \in \{0, 1, \cdots, L-1\}$
- Longitud de los bits codificados con información: $n \times L$
- Cabecera para inicializar el codificador
  - Cabecera de $k \times K_E$ ceros
    - ★ Ceros en todas las k entradas para K_E instantes discretos
    - ★ Estado inicial: $\psi[0] = \psi_0 = [0, 0, \cdots, 0]$
    - ★ Estado final: $\psi[L + K_E] = \psi_0 = [0, 0, \cdots, 0]$
- Número de transiciones sobre la rejilla

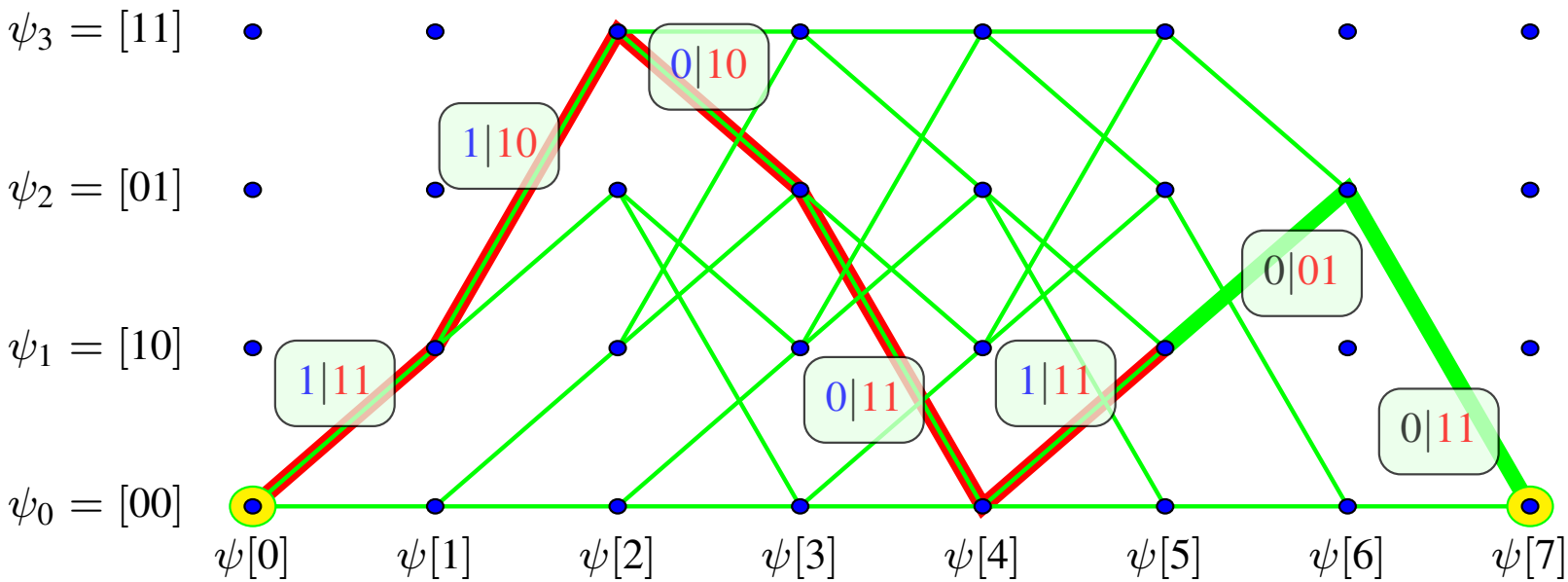
  $L + K_E$ transiciones

- Longitud de bits codificados para $k \times L$ bits de información

$$\underbrace{n \times L}_{\text{bits info}} + \underbrace{n \times K_E}_{\text{bits cabecera}} = (L + K_E)n$$

Secuencia de bits : camino a través de la rejilla

- Convolucional F : $k = 1$, $n = 2$, $K_E = 2$
  - Cabecera de $k \times K_E$ ceros: $00 \rightarrow$ $\psi[0] = \psi[L + K_E] = \psi_0$
- $L = 5$, bloque de $k \times L = 5$ bits: $2^{k \times L} = 2^5 = 32$ caminos
  - Ejemplo: $B_b[m] = 11001$



- Secuencia codificada: $n \times (L + K_E) = 14$ bits

$$C[m'] = 11\ 10\ 10\ 11\ 11\ 01\ 11$$

Decodificación - Algoritmo de Viterbi

- Recuperación de la secuencia más verosímil
- Estados inicial/final
  - Cabecera de referencia (habitualmente ceros "*bit flushing*")
- Salida dura (observación: bits decididos $R[m]$)
  - Solución: secuencia codificada $C[m]$ a mínima distancia de Hamming de la observación
    - ★ Métrica de rama en la transición $\psi[\ell] \rightarrow \psi[\ell+1]$:

      $$d^H\left(\left[R^{(0)}[\ell], R^{(1)}[\ell], \cdots, R^{(n-1)}[\ell]\right], \left[C^{(0)}[\ell], C^{(1)}[\ell], \cdots, C^{(n-1)}[\ell]\right]\right)$$

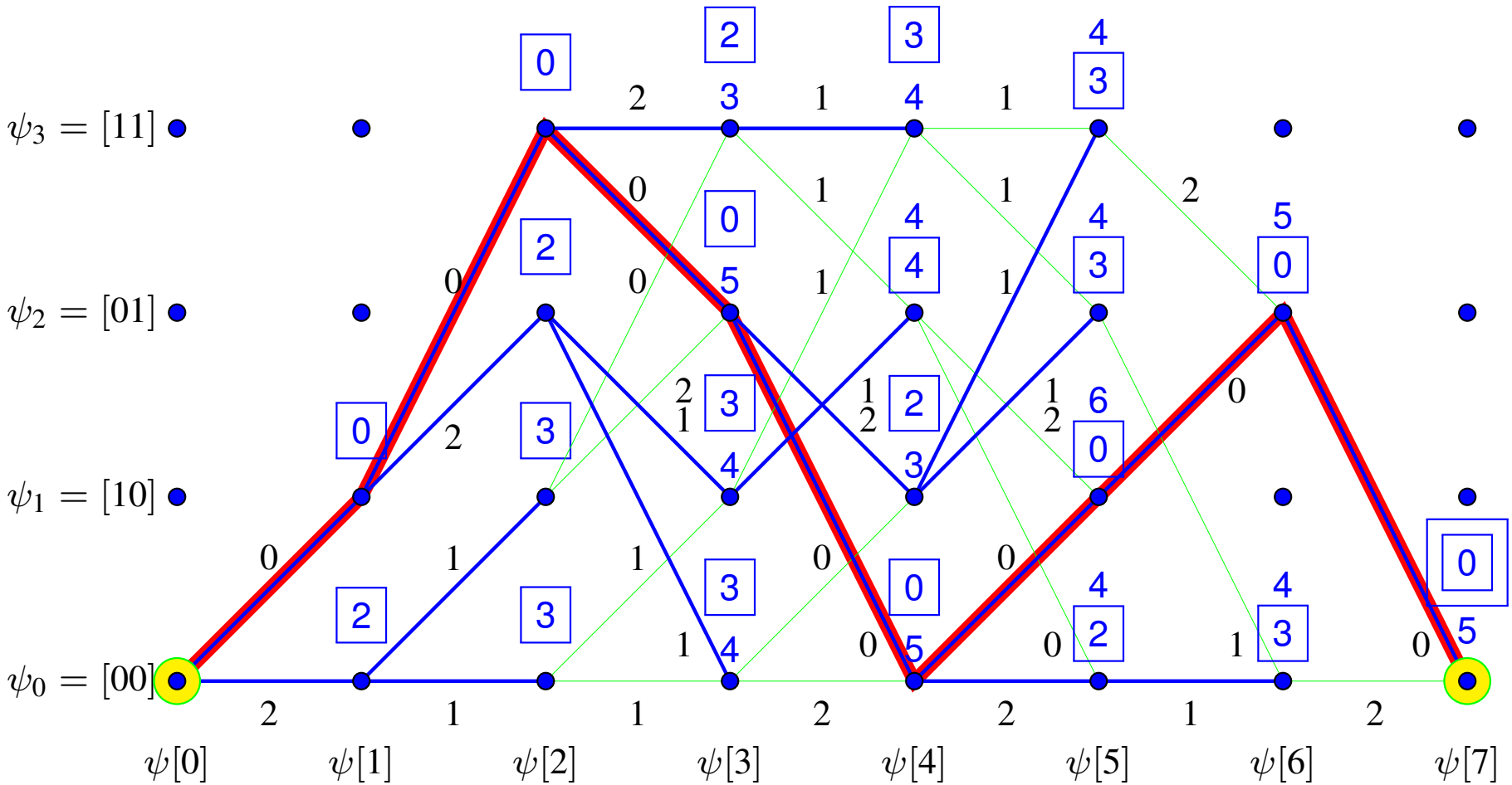
      Distancia de Hamming entre observación y bits codificados
- Salida blanda (observación: secuencia $q[\ell]$)
  - Solución: secuencia cuyos símbolos asociados están a la menor distancia euclídea de la observación
    - ★ Métrica de rama: $|\boldsymbol{q}[\ell] - \boldsymbol{A}_i[\ell]|^2$

      Hay que tener en cuenta la constelación y asignación binaria para hacer la conversión de las etiquetas de la rejilla básica a símbolos de la constelación ($\boldsymbol{A}_i[\ell]$)
  - Mejores prestaciones con salida blanda

Decodificación con salida dura (Conv. F)

- Secuencia recibida

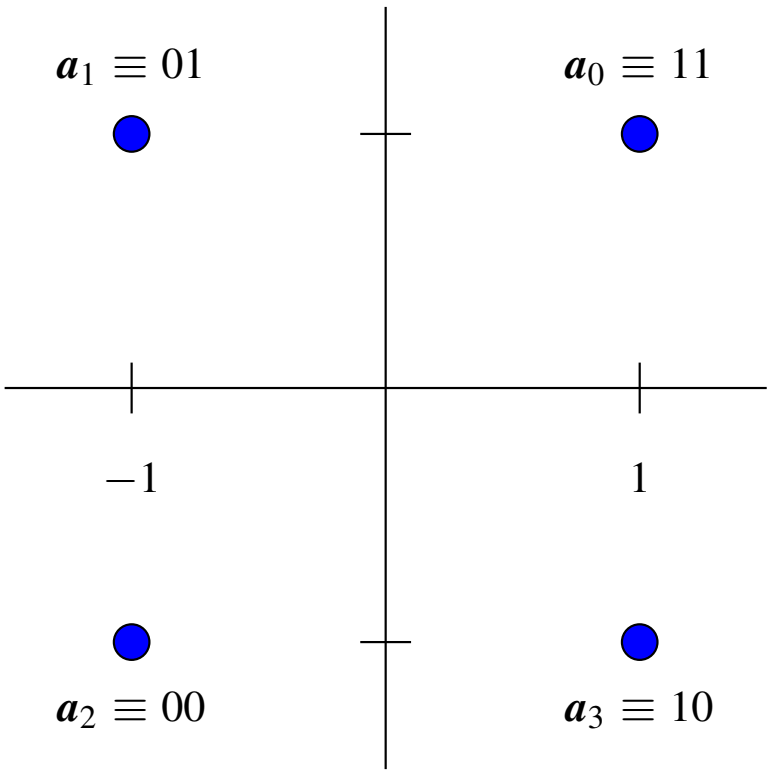
$$R[m'] = 11\ 10\ 10\ 11\ 11\ 01\ 11$$

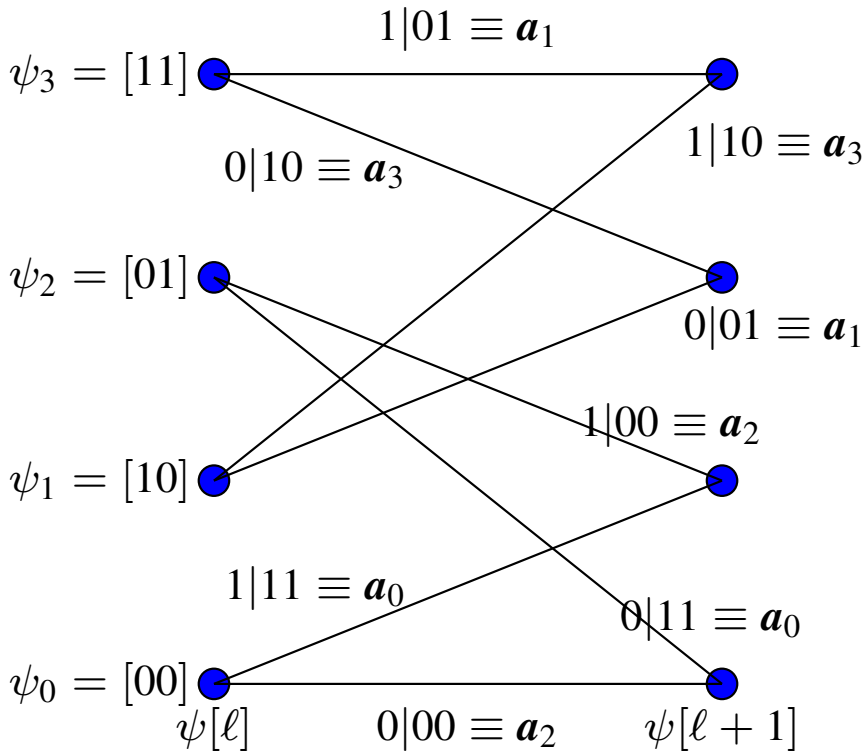


$\hat{B}_b[0] = 1$ | $\hat{B}_b[1] = 1$ | $\hat{B}_b[2] = 0$ | $\hat{B}_b[3] = 0$ | $\hat{B}_b[4] = 1$

Decodificación con salida blanda - Métrica (Conv. F)

- Dependencia de la constelación y asignación binaria
- Ejemplo 4-QAM

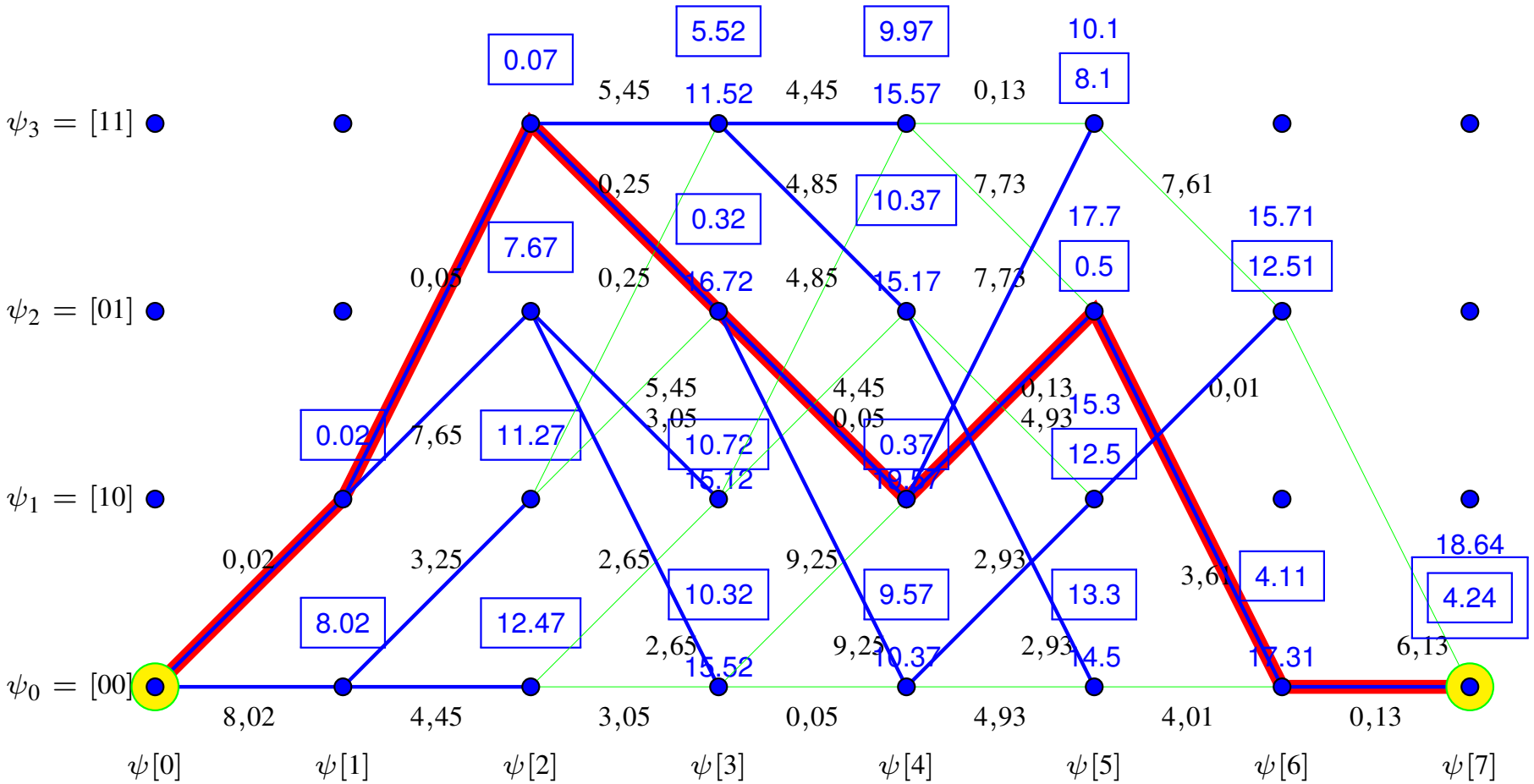




Decodificación con salida blanda - Ejemplo

- Secuencia recibida

$$q[m] = \begin{bmatrix} +1{,}1 \\ +0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0{,}7 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ +1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}9 \\ +1{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0{,}8 \\ +0{,}7 \end{bmatrix}$$



$\hat{B}_b[0] = 1$ | $\hat{B}_b[1] = 1$ | $\hat{B}_b[2] = 0$ | $\hat{B}_b[3] = 1$ | $\hat{B}_b[4] = 0$

Prestaciones

- Salida dura

$$P_e \approx c \sum_{e=t+1}^{n\,z} \binom{n\,z}{e} \varepsilon^e \left(1-\varepsilon\right)^{n\,z-e}$$

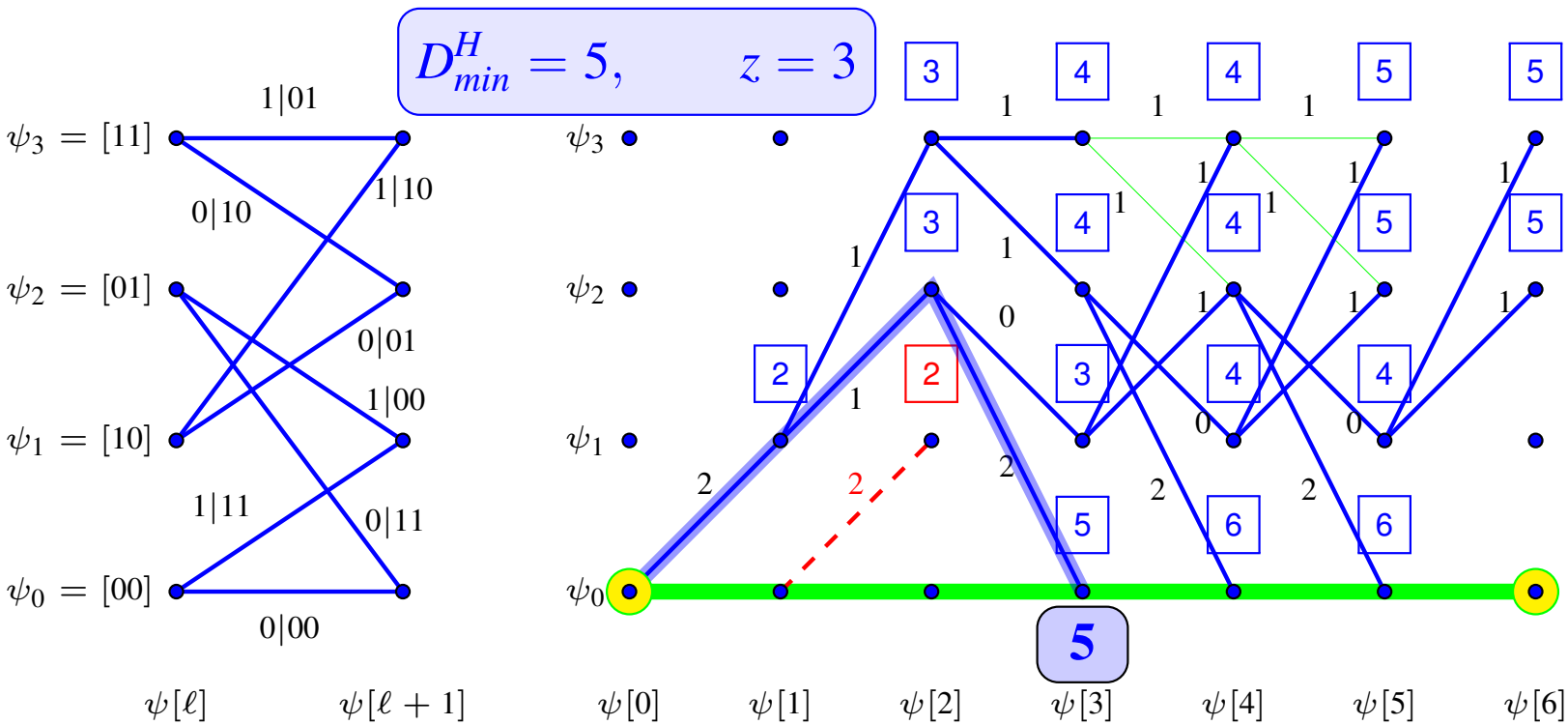
  - D^H_{min}: mínima distancia de Hamming entre salidas para secuencias distintas
  - z: longitud del evento erróneo de distancia mínima
  - $t = \left\lfloor \frac{D^H_{min}-1}{2} \right\rfloor$ (capacidad de corrección sobre $n\,z$ bits)
  - ε: probabilidad de error de bit del sistema (BER)
- Salida blanda

$$P_e \approx c\,Q\left(\frac{D^E_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

  - D^E_{min}: mínima distancia euclídea entre símbolos transmitidos para secuencias distintas

Cálculo de D^H_{min}

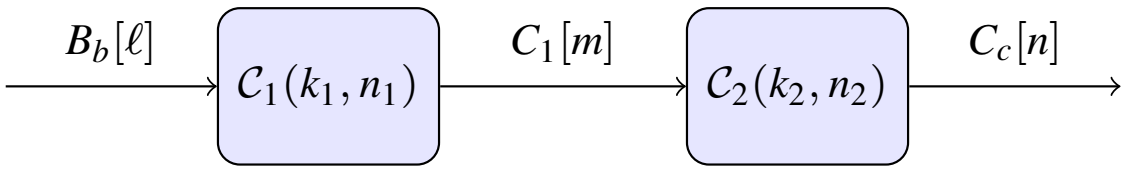
- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los n bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos



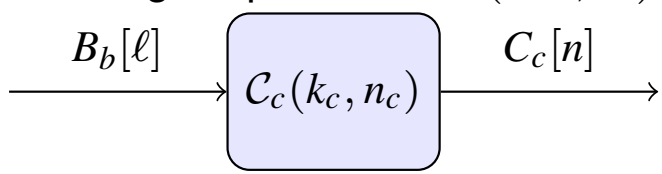
Códigos concatenados

- Un código complejo puede en ocasiones obtenerse mediante la concatenación de dos códigos más simples
  - Concatenación en serie de dos códigos
  - Codigo entrada (interno) $\mathcal{C}_1(k_1, n_1)$, tasa $R_1 = k_1/n_1$
  - Codigo salida (externo) $\mathcal{C}_2(k_2, n_2)$, tasa $R_2 = k_2/n_2$
  - Tasa del código concatenado

$$R_c = \frac{k_1\ k_2}{n_1\ n_2} = R_1 \times R_2$$



- Relación de tamaños más habituales
  - Caso $n_1/k_2 = c \in \mathbb{Z}$
    - ★ En este caso hay un código equivalente $\mathcal{C}_c(k_1, c\ n_2)$
  - Caso $k_2/n_1 = c \in \mathbb{Z}$
    - ★ En este caso hay un código equivalente $\mathcal{C}_c(c\ k_1, n_2)$



Ejemplo con códigos bloque

- Códigos $\mathcal{C}_1(2,3)$, $\mathcal{C}_2(3,6)$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \equiv$$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	000
1	01	011
2	10	101
3	11	110

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 100011 \\ 010101 \\ 001111 \end{bmatrix} \equiv$$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	000	000000
1	001	001111
2	010	010101
3	011	011010
4	100	100011
5	101	101100
6	110	110110
7	111	111001

- Código concatenado $\mathcal{C}_c(2,6) = \mathcal{C}_1(2,3) - \mathcal{C}_2(3,6)$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	000000
1	01	011010
2	10	101100
3	11	110110

$$\equiv \mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} 101100 \\ 011010 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}_c = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$, ya que $k_2 = n_1$

Otro ejemplo con códigos bloque

- Código concatenado $\mathcal{C}_c(3,12) = \mathcal{C}_1(3,6) - \mathcal{C}_2(3,6)$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 100011 \\ 010101 \\ 001111 \end{bmatrix} \equiv$$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	000	000000
1	001	001111
2	010	010101
3	011	011010
4	100	100011
5	101	101100
6	110	110110
7	111	111001

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_{1,i}$		$\mathbf{c}_{2,i}$	
0	000	000	000	000000	000000
1	001	001	111	001111	111001
2	010	010	101	010101	101100
3	011	011	010	011010	010101
4	100	100	011	100011	011010
5	101	101	100	101100	100011
6	110	110	110	110110	110110
7	111	111	001	111001	001111

$$\equiv \mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} 100011011010 \\ 010101101100 \\ 001111111001 \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo con códigos bloque (II)

- Código concatenado $\mathcal{C}_c(3,12) = \mathcal{C}_1(3,6) - \mathcal{C}_2(3,6)$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	000	000000000000
1	001	001111111001
2	010	010101101100
3	011	011010010101
4	100	100011011010
5	101	101100100011
6	110	110110110110
7	111	111001001111

$$\equiv \mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} 100011011010 \\ 010101101100 \\ 001111111001 \end{bmatrix}$$

Ejemplo con códigos convolucionales

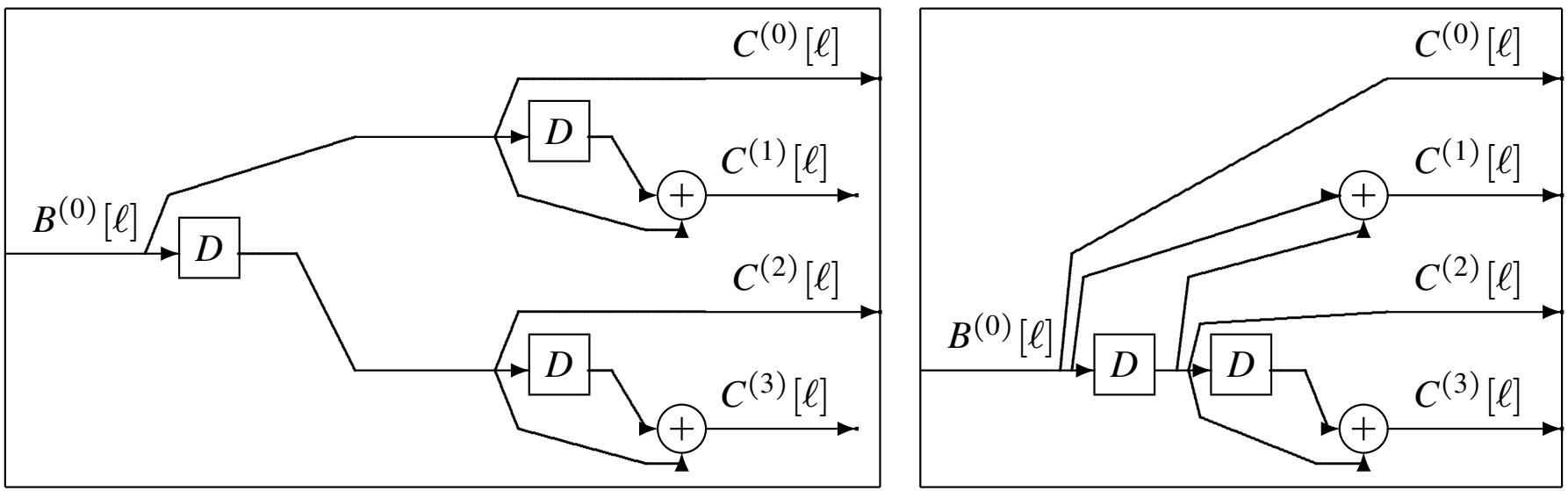
- Códigos $\mathcal{C}_1(1,2)$, $\mathcal{C}_2(2,4)$

$$\mathbf{G}_1(D) = [1, D], \quad \mathbf{G}_2(D) = \begin{bmatrix} 1, & 1+D, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 1+D \end{bmatrix}$$

  - El código $\mathcal{C}_2$ se implementa con dos códigos $\mathbf{G}_2' = [1, 1+D]$ en paralelo

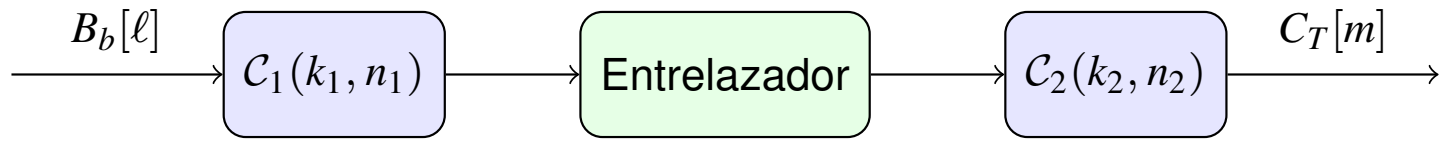
- Código concatenado $\mathcal{C}_c(1,4) = \mathcal{C}_1(1,2) - \mathcal{C}_2(2,4)$

$$\mathbf{G}_c = [1, \quad 1+D, \quad D, \quad D+D^2]$$

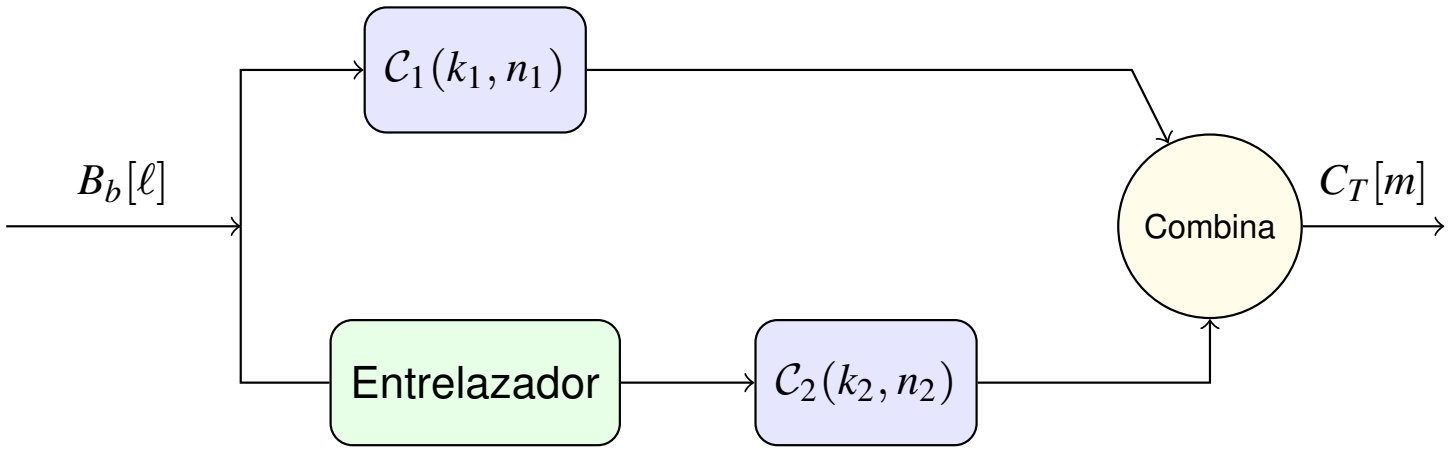


Turbo códigos

- Concatenación de códigos utilizando entrelazadores



Concatenación Serie

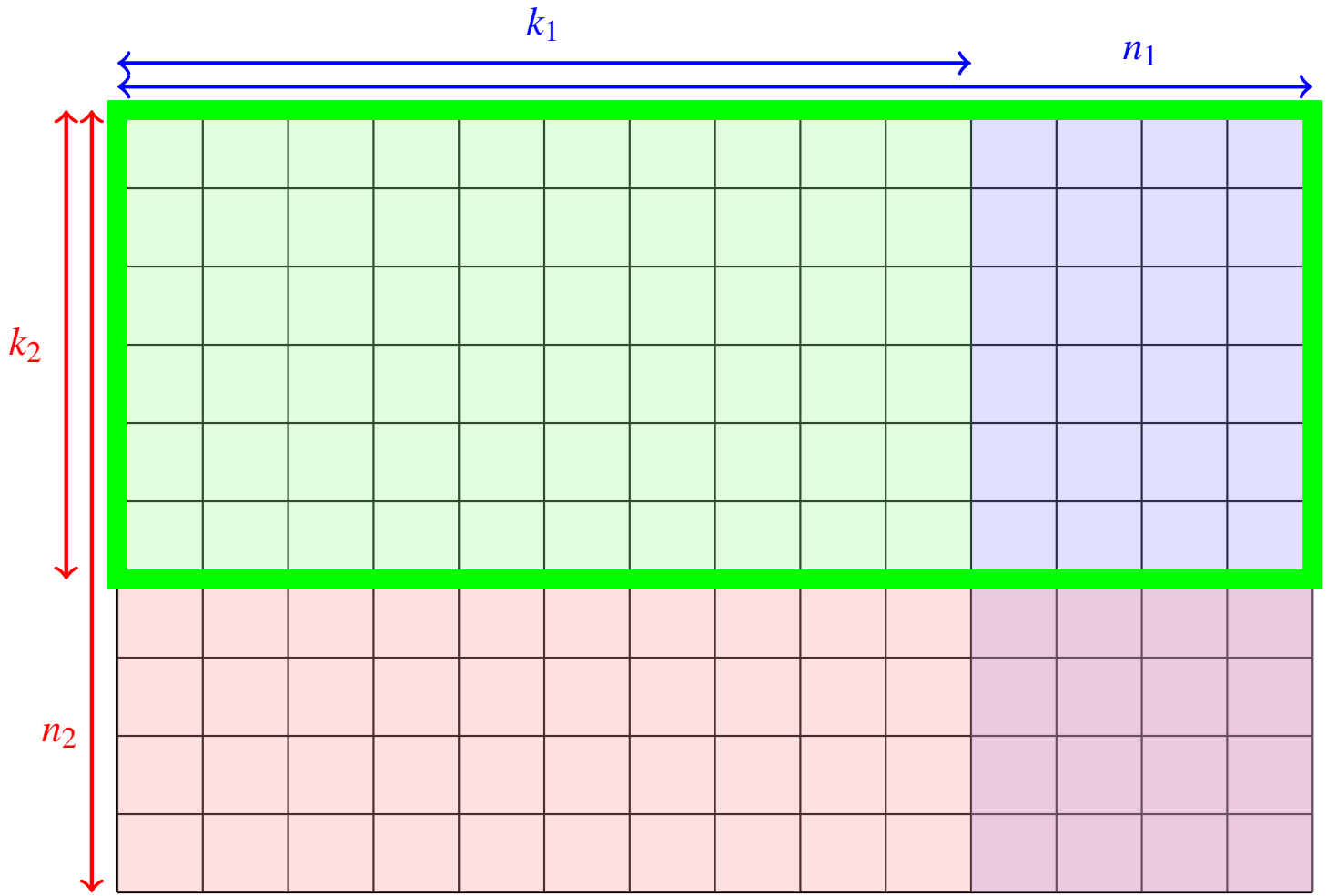


Concatenación Paralelo

  - Codificadores
    - ★ Códigos convolucionales sistemáticos y recursivos (RSC)
  - Entrelazador: reordena los bits
    - ★ Errores de un codificador en distintas palabras código del otro codificador
    - ★ Determina las prestaciones (se usan entrelazadores pseudo-aleatorios)

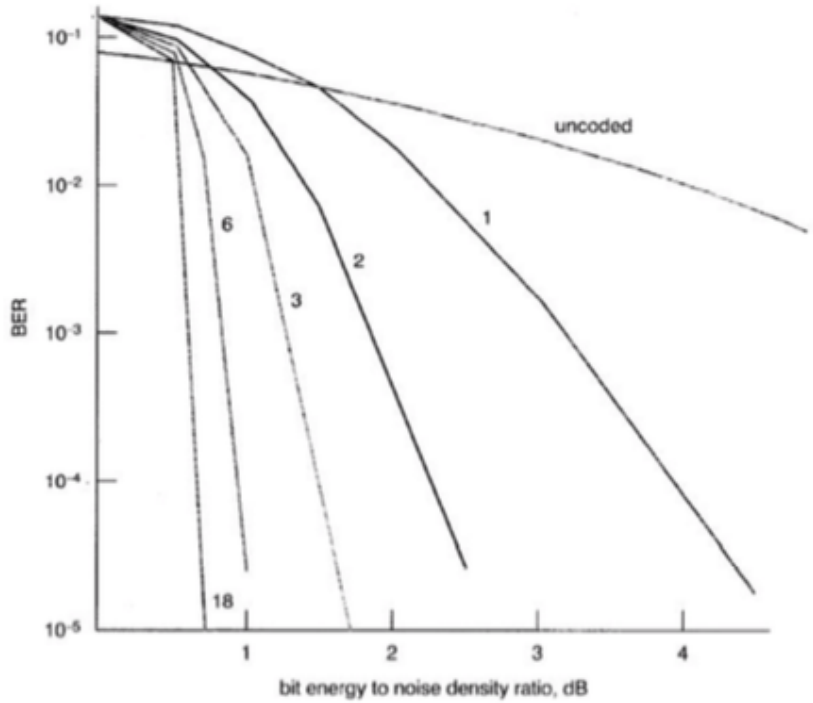
Entrelazador - Ejemplo concatenación serie ($k_2 \times n_1$)

- Entrelazador bloque
  - Entrada de bits escribiendo por filas
  - Salida de bits leyendo por columnas



Decodificación iterativa

- Decodificación iterativa (algoritmo BCJR)
  - Cada decodificador proporciona su salida blanda
    - ★ LLR: Log-Likelihood Ratio
  - Intercambio de esta información entre decodificadores
- Prestaciones: cercanas al límite de Shannon!!!



Códigos LDPC

LDPC: *Low Density Parity Check*

- Códigos bloque lineales
  - Códigos de gran tamaño
    - ★ Ejemplo: $\mathcal{C}(5000, 10000)$
  - Matriz de chequeo de paridad dispersa (pocos 1s)
- Representación mediante un grafo bipartido (grafo de Tunner)
  - Dos tipos de nodos
    - ★ Nodos de bits
    - ★ Nodos de chequeo
  - Aplicación del principio Turbo: decodificación iterativa
    - ★ Salidas blandas en cada iteración
    - ★ Algoritmos iterativos de tipo "*belief propagation*" (BCJR, MAP, SOVA)
- Excelentes prestaciones
  - Estado del arte actual, junto con los turbo códigos