

## Capítulo 4 : Ejercicios

**Ejercicio 4.1** Un sistema de comunicaciones utiliza una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con factor de ensanchado  $N = 4$  y secuencia de ensanchado  $x[0] = +1$ ,  $x[1] = -1$ ,  $x[2] = +1$  y  $x[3] = -1$ . El filtro transmisor a tiempo de chip,  $g_c(t)$ , es un filtro en raíz de coseno alzado con factor de caída  $\alpha = 0,25$ . El filtro receptor a tiempo de chip es un filtro adaptado al transmisor. La transmisión se realiza a través de un canal con respuesta al impulso  $h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - \frac{T}{2})$ , con lo que el canal discreto equivalente a tiempo de chip es  $d[m] = \delta[m] + \frac{1}{2}\delta[m-2]$ .

- Explique cómo se generan las muestras a tiempo de chip,  $s[m]$ , a partir de la secuencia de símbolos  $A[n]$ , y de la secuencia de ensanchado  $x[m]$  (puede poner el diagrama de bloques del transmisor en tiempo discreto o explicar el proceso de generación de forma detallada), y calcule los valores de  $s[m]$  para  $0 \leq m \leq 11$  si la secuencia de datos es  $A[0] = +1$ ,  $A[1] = -1$ ,  $A[2] = -1$ .
- Obtenga la secuencia de muestras a tiempo de chip,  $v[m]$ , a la salida del filtro receptor  $g_c(-t)$  para la secuencia de datos anterior si se transmite sobre  $h(t)$  (con el correspondiente  $d[m]$ ) en ausencia de ruido y se asume que  $A[n] = +1$  para  $n < 0$ .
- Explique cómo se obtienen las observaciones a tiempo de símbolo,  $q[n]$ , a partir de las observaciones a tiempo de chip  $v[m]$ , y de la secuencia de ensanchado  $x[m]$  (puede poner el diagrama de bloques del receptor en tiempo discreto o explicar el proceso de obtención de forma detallada), y calcule los valores de  $q[n]$  para  $0 \leq n \leq 2$ .

**Ejercicio 4.2** Un sistema de comunicaciones utiliza una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con factor de ensanchado  $N = 5$ . La secuencia de datos transmitida,  $A[n]$ , es una secuencia blanca con energía de símbolo  $E_s$ , y la secuencia de ensanchado es

$$x[0] = +1, x[1] = -1, x[2] = +1, x[3] = -1, x[4] = +1.$$

- Si como pulso conformador se utiliza un pulso causal de duración  $T_c$  normalizado en energía, represente la señal modulada para la siguiente secuencia de datos

$$A[0] = +1, A[1] = +3, A[2] = -1.$$

- Obtenga la expresión analítica de la densidad espectral de potencia de la señal en banda base,  $S_s(j\omega)$ , si el pulso a tiempo de chip es  $g_c(t) = \frac{1}{\sqrt{T_c}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$ .
- Obtenga los valores de  $q[n]$  para  $0 \leq n \leq 2$  si la señal a la salida del filtro adaptado a  $g_c(t)$ ,  $v(t)$ , es la que se muestra en la Figura 4.1 (observe bien que el eje de abscisas está escalado por un factor  $T_c$ ).

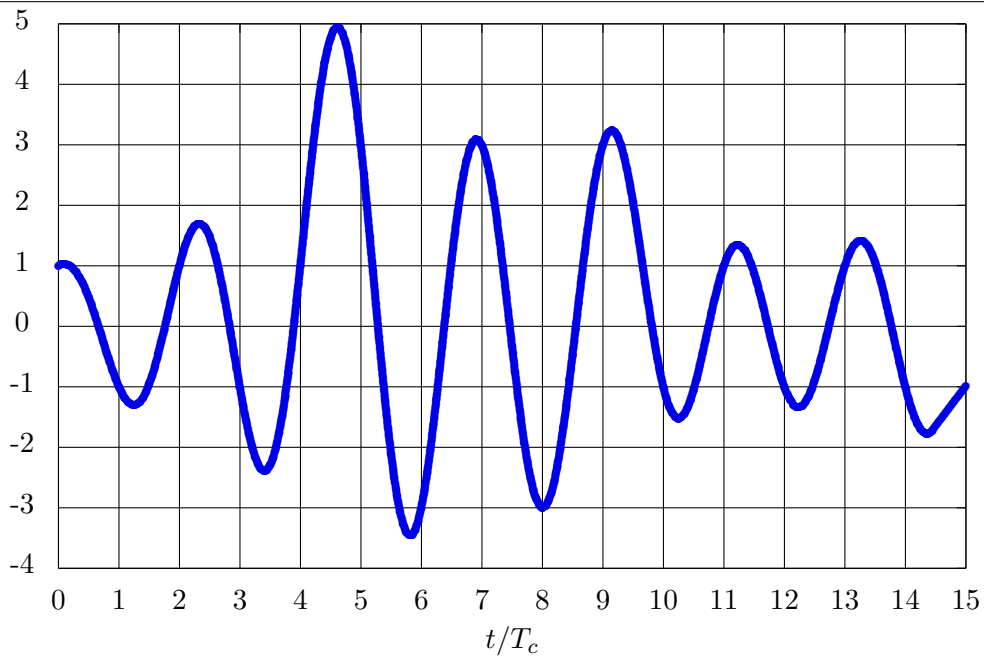


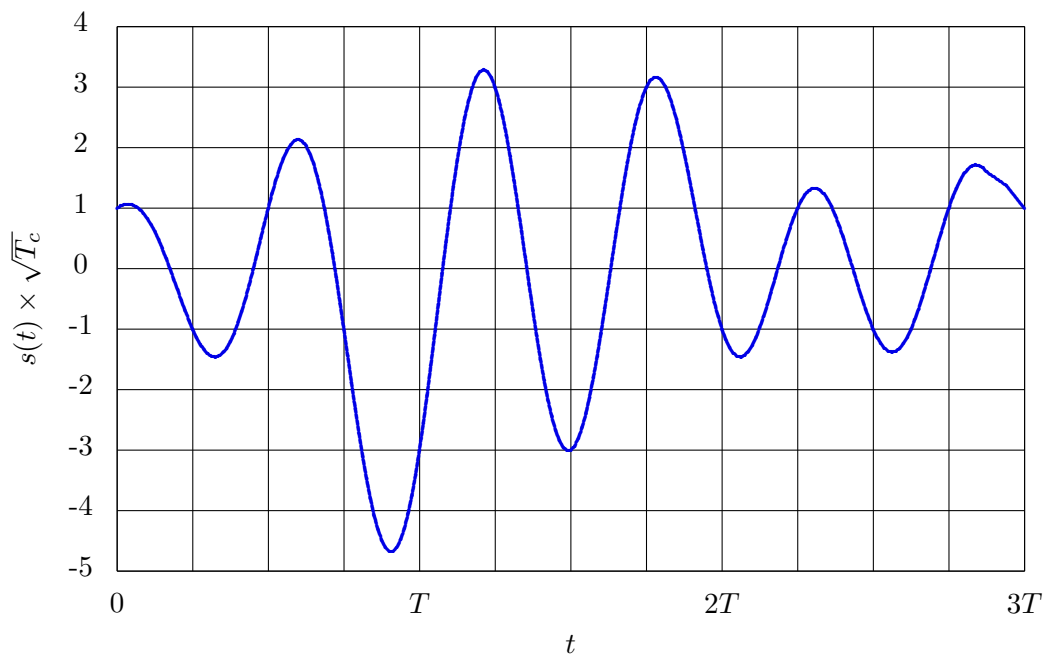
Figura 4.1: Señal  $v(t)$  a la salida del filtro adaptado a  $g_c(t)$ .

**Ejercicio 4.3** Un sistema de espectro ensanchado por secuencia directa, con factor de ensanchado  $N = 4$ , tiene como secuencia de ensanchado

$$x[m] = \delta[m] + a \delta[m - 1] + b \delta[m - 2] + c \delta[m - 3],$$

con  $\{a, b, c\} \in \{\pm 1\}$ . El filtro transmisor a tiempo de chip,  $T_c$ , es  $g_c(t) = \frac{1}{\sqrt{T_c}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$ .

a) Si la transmisión de la secuencia de símbolos de información,  $A[n]$ , genera la señal modulada en banda base,  $s(t)$ , que se muestra en la figura



donde  $T$  denota el tiempo de símbolo de la secuencia de información transmitida,  $A[n]$ , y donde remarcamos que la amplitud de la señal  $s(t)$  está escalada por un factor  $\sqrt{T_c}$ , obtenga los valores de  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , y los 3 valores iniciales de la secuencia transmitida  $A[n]$ .

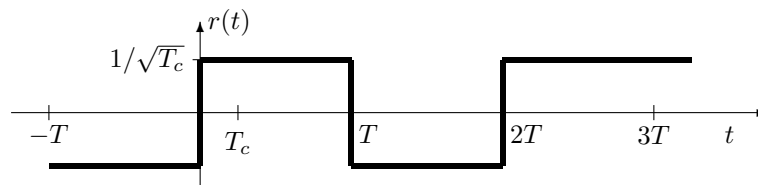
- b) La señal  $s(t)$  se transmite por un canal ideal, sin ruido, y en el receptor se filtra con un filtro adaptado al filtro transmisor a tiempo de chip, es decir,  $f(t) = g_c(-t)$ . La salida de este filtro receptor es  $v(t)$ . Calcule  $v(t)$  a partir de  $s(t)$ , dibuje el diagrama de bloques del receptor de espectro ensanchado, y calcule las observaciones a la salida del mismo,  $q[n]$ , para  $n \in \{0, 1, 2\}$ .

NOTA: Para este filtro transmisor a tiempo de chip, la función de ambigüedad temporal es  $r_{g_c}(t) = g_c(t) * g_c(-t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$ .

**Ejercicio 4.4** Un sistema de modulación de espectro ensanchado por secuencia directa, con factor de ensanchado  $N = 4$ , y trabajando en banda base, utiliza como pulso modulador

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]g_c(t - mT_c),$$

donde la secuencia determinista de ensanchado es en este caso  $x[m] = +1, -1, +1, -1$ , para  $m = 0, 1, 2, 3$ , respectivamente, y donde  $g_c(t)$  es un pulso causal de duración  $T_c$  (tiempo de chip) y de energía unidad.



- a) Empleando un receptor para espectro ensanchado por secuencia directa en banda base, calcule la salida del demodulador,  $q[n]$ , para  $n = 0, 1, 2$ , si la entrada del receptor,  $r(t)$ , es la señal de la figura.
- b) Calcule el canal discreto equivalente y la probabilidad de error del sistema con el receptor convencional para estas modulaciones, si la constelación transmitida es una 2-PAM (o BPSK),  $A[n] \in \{\pm 1\}$ , y el canal es  $h_{eq}(t) = \delta(t) + \delta(t - T/2)$ , y compárelos con los obtenidos si en el receptor en lugar de la secuencia de ensanchado del transmisor se utiliza una secuencia alternativa  $x_r[m] = +1, -1, +1, +1$ , para desensanchar. ¿Aparece ISI?
- c) Para el caso particular de la secuencia de ensanchado  $x[m]$  utilizada en el transmisor en este sistema y del canal del apartado anterior, ¿es posible eliminar la ISI modificando la secuencia de desensanchado en el receptor? Si es así, indique las condiciones que debe cumplir la nueva secuencia del receptor, y ponga un ejemplo que las cumpla.

**Ejercicio 4.5** Una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa tiene un factor de ensanchado  $N = 10$ . La constelación transmitida es una 2-PAM con niveles normalizados,  $A[n] \in \{\pm 1\}$ . El canal discreto equivalente a tiempo de chip  $T_c$  es

$$d[m] = \delta[m] - 0,5\delta[m - 4]$$

y se considera que el ruido aditivo es blanco y gaussiano con densidad espectral de potencia  $\frac{N_0}{2}$ .

La secuencia de ensanchado es  $x[m]$  is  $\{-1, -1, +1, +1, -1, +1, +1 - 1, +1, +1\}$ .

- a) Represente el pulso transmisor a tiempo de símbolo,  $g(t)$ , si el pulso a tiempo de chip,  $g_c(t)$ , es un pulso rectangular causal y normalizado en energía.

- b) Obtenga el canal discreto equivalente a tiempo de símbolo  $T$ . Determine si existirá o no interferencia intersimbólica, y determine la probabilidad de error utilizando un detector símbolo a símbolo sin memoria.

**Ejercicio 4.6** Un sistema de comunicaciones digitales basado en una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa se utiliza para dar servicio de forma simultánea a dos usuarios (sistema multiusuario). El factor de ensanchado y el pulso transmisor a tiempo de chip son los mismos para los dos usuarios,  $N = 4$  y un pulso rectangular causal normalizado

$$g_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_c}} & \text{si } 0 \leq t < T_c = \frac{T}{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Por simplicidad en los cálculos, se considerará a partir de ahora  $T_c = 1$  y  $T = 4$ . El primer usuario tiene como secuencia de ensanchado

$$x_1[m] = \delta[m] - \delta[m - 1] + \delta[m - 2] - \delta[m - 3].$$

- a) Elija de entre las dos siguientes secuencias,  $x_a[m]$  y  $x_b[m]$ , la que considere más apropiada como secuencia de ensanchado para el segundo usuario,  $x_2[m]$ , explicando claramente la razón de la elección

$$x_a[m] = -\delta[m] + \delta[m - 1] - \delta[m - 2] + \delta[m - 3], \quad x_b[m] = \delta[m] - \delta[m - 1] - \delta[m - 2] + \delta[m - 3].$$

- b) Con la elección realizada en el apartado anterior (si no lo ha resuelto, elija arbitrariamente una de las dos secuencias para el segundo usuario), obtenga y represente la señal en tiempo continuo  $s(t)$  resultante de la transmisión simultánea de información de ambos usuarios durante los dos primeros intervalos de símbolo (entre  $0 \leq t < 2T$ ) si las secuencias de datos transmitidas por el primer y segundo usuario son, respectivamente

$n$	0	1	2	3
$A_1[n]$	+1	-3	-1	+1
$A_2[n]$	-1	+1	+3	+1

- c) Si se transmite la señal conjunta de ambos usuarios sin ninguna distorsión hasta el receptor, obtenga las observaciones correspondiente al primer usuario para los dos primeros intervalos de símbolo,  $q_1[0]$  y  $q_1[1]$ , dejando evidencia clara de cómo se obtienen dichos valores.

**Ejercicio 4.7** Un sistema de comunicaciones en banda base utiliza una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con factor de ensanchado  $N = 3$  y secuencia de ensanchado

$$x[m] = -\delta[m] + \delta[m - 1] - \delta[m - 2]$$

para transmitir a una tasa binaria de 1 kbit/s utilizando una constelación 8-PAM con niveles normalizados, siendo la secuencia transmitida blanca. El filtro transmisor a tiempo de chip,  $g_c(t)$ , es un filtro en raíz de coseno alzado a tiempo de chip con factor de caída  $\alpha$ , el filtro receptor es un filtro adaptado al transmisor, el canal tiene una respuesta al impulso

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{3}\delta(t - 7 \times 10^{-3})$$

y el ruido es blanco y gaussiano con densidad espectral de potencia  $N_0/2$ .

- a) Calcule la densidad espectral de potencia de la señal modulada en banda base,  $s(t)$ , para un valor genérico del factor de caída  $\alpha$ , y represente dicha densidad espectral y proporcione el ancho de banda de la señal modulada en el caso particular  $\alpha = 0$ .

**NOTA:** En la representación de la densidad espectral de potencia se deben etiquetar adecuadamente ambos ejes incluyendo los valores numéricos apropiados.

**Ejercicio 4.8** Considere una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con  $N = 10$ ,  $\tilde{x}[m] = (-1)^m$  y  $g_c(t) * g_c^*(-t)$  que cumple el criterio de Nyquist a periodo de chip,  $T_c = T/N$ . El canal equivalente en banda base es  $h_{eq}(t) = \delta(t - \tau)$ . Determine el canal discreto equivalente,  $p[n]$ , (si no es posible simplificar la expresión resultante, déjela en función de  $g_c(t)$ ) y si existirá o no ISI en los siguientes casos:

- a)  $\tau = T$   
 b)  $\tau = T/5$   
 c)  $\tau = T/4$

**Ejercicio 4.9** En un sistema de comunicaciones digital, que utiliza una constelación 4-PAM con niveles normalizados, se quiere transmitir a una tasa binaria de 4 kbits/s, y los primeros símbolos de la secuencia que se desea transmitir, son

$$A[0] = +1, A[1] = -3, A[2] = +1, A[3] = +3, A[4] = +1, A[5] = -1, A[6] = +1, A[7] = -1.$$

Para implementar el sistema se barajan dos posibles modulaciones: modulación de espectro ensanchado por secuencia directa, y modulación OFDM.

El canal discreto equivalente  $d[m]$  (canal equivalente a tiempo de chip para modulaciones de espectro ensanchado, o a tiempo de símbolo OFDM dividido entre número de portadoras (o portadoras más prefijo) para modulación OFDM) es

$$d[m] = \delta[m] - \frac{1}{4} \delta[m - 1] + \frac{2}{3} \delta[m - 2].$$

- a) Si se decide utilizar una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa, con factor de ensanchado  $N = 3$ , secuencia de ensanchado

$$x[m] = \delta[m] - \delta[m - 1] + \delta[m - 2],$$

frecuencia de portadora  $\omega_c = 2\pi \times 10^6$  radianes/s, y utilizando como filtro transmisor a tiempo de chip un filtro en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída  $\alpha = 0,25$ , obtenga la secuencia de muestras de la señal modulada a tiempo de chip,  $s[m]$ , asociada a los 3 primeros símbolos de la secuencia de datos indicados en el enunciado, y calcule el ancho de banda de la señal modulada paso banda.

- b) Si se utiliza una modulación OFDM con  $N = 4$  portadoras y frecuencia de portadora  $\omega_c = 2\pi \times 10^6$  radianes/s, escriba de forma ordenada la secuencia de muestras de la señal a transmitir asociadas a los 8 primeros símbolos de la secuencia de datos indicados en el enunciado, y calcule el ancho de banda de la señal modulada requerido en los dos siguientes casos:
- I) Se desea transmitir utilizando el mínimo ancho de banda posible.
  - II) Se desea transmitir sin interferencias entre símbolos y entre portadoras, con el mínimo ancho de banda necesario para eliminar estos dos efectos.

**Ejercicio 4.10** Se tienen las siguientes secuencias

$$\begin{array}{c|cccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline A[n] & +1 & -3 & +1 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} m & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline v[m] & +1,1 & -0,9 & -0,8 & +0,7 \end{array}$$

a) Se utiliza una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con factor de ensanchado  $N = 4$ , secuencia de ensanchado

$$\begin{array}{c|cccc} m & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline x[m] & +1 & -1 & -1 & +1 \end{array}$$

y frecuencia de portadora  $f_c = 1$  MHz. El filtro transmisor a tiempo de chip es un filtro en raíz cuadrada de coseno alzado normalizado y con factor de caída  $\alpha = 0,2$ .

- i) Calcule las muestras a tiempo de chip asociadas a transmitir la secuencia de datos  $A[n]$  a una tasa de 5 kbaudios, identificando para cada muestra su instante discreto asociado (de forma similar a las tablas anteriores), y obtenga el ancho de banda de la señal modulada.
  - ii) Calcule las observaciones a tiempo de símbolo  $q[n]$  asociadas a procesar las muestras obtenidas a tiempo de chip a la salida del filtro receptor,  $v[m]$ , identificando el índice discreto  $n$  para cada una de ellas.
- b) Se utiliza ahora una modulación OFDM con 4 portadoras para transmitir la secuencia  $A[n]$  a una tasa total de 4 baudios y frecuencia de portadora  $f_c = 1$  MHz.
- i) Si no se utiliza prefijo cíclico, calcule las muestras a  $T/N$  de la señal transmitida asociadas a la secuencia de datos  $A[n]$ , identificando para cada muestra su instante discreto asociado (de forma similar a las tablas del enunciado), y obtenga el ancho de banda de la señal modulada.
  - ii) Si se utiliza un prefijo cíclico de longitud  $C = 1$  muestra, calcule las muestras a  $T/(N+C)$  de la señal transmitida asociadas a la secuencia de datos  $A[n]$ , identificando para cada muestra su instante discreto asociado (de forma similar a las tablas del enunciado), y obtenga el ancho de banda de la señal modulada.

**Ejercicio 4.11** Una modulación OFDM en tiempo discreto utiliza  $N = 4$  portadoras.

- a) Si no se utiliza prefijo cíclico, ¿bajo qué condiciones no existirá ICI e ISI?
- b) Si se utiliza un prefijo cíclico de longitud  $C = 2$  muestras y el canal discreto a tiempo de muestreo  $T/(N+C)$  es  $d[m] = \delta[m] + \frac{1}{3}\delta[m-2]$ , obtenga los canales discretos equivalentes  $p_{k,i}[n]$  y discuta si hay ICI e ISI.

**Ejercicio 4.12** Considere una modulación OFDM con 4 portadoras, constelación QPSK con símbolos equiprobables y un prefijo cíclico de 2 muestras. La señal modulada atraviesa un canal discreto equivalente a periodo  $T/6$  con respuesta al impulso

$$d[m] = \delta[m] - 0,6\delta[m-1],$$

y ruido aditivo complejo, blanco y gaussiano de varianza  $N_0$ . En el receptor se emplea un decisor de máxima verosimilitud adaptado a la constelación QPSK que se recibe en el receptor.

- a) Obtenga las respuestas al impulso de cada uno de los 16 subcanales  $p_{k,i}[n]$ .

- b) Determine la relación señal a ruido en cada portadora.
- c) Determine la probabilidad de error media.

**Ejercicio 4.13** Considere un sistema de transmisión en el que se emplea un esquema de modulación OFDM en tiempo discreto con un número par de portadoras  $N$ .

- a) Suponga que no se añade extensión cíclica a los símbolos OFDM. El canal discreto equivalente en banda base a periodo  $T$  se denota como  $p_{k,i}[n]$  y  $d[m]$  es el canal discreto equivalente a periodo  $T/N$ .
  - I) ¿Qué condiciones se han de cumplir sobre  $p_{k,i}[n]$  para que no exista interferencia entre símbolos (ISI)?
  - II) ¿Qué condiciones se han de cumplir sobre  $p_{k,i}[n]$  para que no exista interferencia entre portadoras (ICI)?
- b) Si se añade una extensión cíclica a cada símbolo OFDM
  - a) Determine la longitud de la extensión cíclica para que se elimine la interferencia, supuesto el canal  $d[m]$  del apartado anterior.
  - b) Determine la pérdida, en términos de velocidad de transmisión, respecto al sistema original sin extensión cíclica.

**Ejercicio 4.14** Una modulación OFDM ocupa un ancho de banda de 4 kHz en la banda de 5 kHz - 9 kHz. Dicha modulación se utiliza para dar servicio de comunicaciones inalámbricas a un determinado número de usuarios que varía entre 4 y 10 usuarios. El sistema de comunicaciones consta de una estación base (transmisor) que envía la modulación OFDM y una serie de receptores separados físicamente, uno por cada usuario al que se le esté dando servicio. En el transmisor el flujo de información destinado a cada usuario se envía en cada una de las portadoras con las que se genera la modulación OFDM.

- a) Obtenga la máxima y mínima tasa de servicio (tasa de símbolo) que se le podría dar a cada usuario, si la modulación no usa prefijo cíclico. Tenga en cuenta que la tasa dependerá del número de usuarios que estén siendo servidos.
- b) Suponiendo que damos servicio a 4 usuarios ( $N = 4$ ) y que las tasas binarias requeridas por cada uno de ellos son  $R_{u0} = 8$  kbit/s,  $R_{u1} = 4$  kbit/s,  $R_{u2} = 2$  kbit/s y  $R_{u3} = 1$  kbit/s, obtenga el orden de la modulación que cada usuario necesitará.
- c) Se transmite la señal OFDM en tiempo discreto  $s[m]$  que transporta la información de cada uno de los 4 usuarios a través del canal inalámbrico. Cada usuario  $i$  recibe la señal  $s[m]$  a través de un canal diferente  $d_i[m]$  ( $i = 0 \dots 3$ ) por las distintas características de propagación del medio:

$$d_i[m] = \delta[m] + a_i \delta[m - 1] \text{ si } i = 0, 1$$

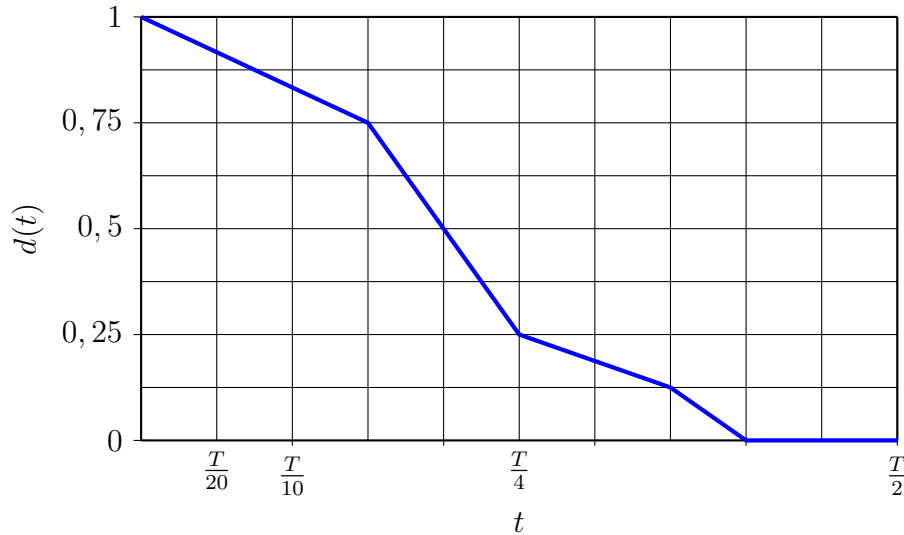
$$d_i[m] = \delta[m] + a_i \delta[m - 2] \text{ si } i = 2, 3$$

Determine la longitud del prefijo cíclico que habría que añadir a la señal  $s[m]$  para que todos los usuarios puedan recuperar su información sin ISI y sin ICI.

- d) Diseñe el demodulador que le permitirá a cada usuario recuperar su flujo de información.

**Ejercicio 4.15** Un sistema de comunicaciones emplea una modulación OFDM en tiempo discreto con  $N = 4$  portadoras y con periodo de símbolo  $T$ .

La respuesta conjunta entre filtro transmisor (reconstructor), canal, y filtro receptor,  $d(t)$ , es la de la figura (en un caso real la respuesta depende de la tasa de reconstrucción del filtro transmisor; por simplicidad, suponga que ésta es la respuesta para cualquier tasa).



1. Si el sistema inicial no usa prefijo cíclico, determine si habrá interferencia intersimbólica (ISI) y/o interferencia entre portadoras (ICI). Si hubiera ISI y/o ICI, diseñe un sistema alternativo que elimine su efecto y que sea lo más eficiente desde un punto de vista espectral.
2. Calcule los canales discretos equivalentes  $p_{k,i}[n]$  para el sistema diseñado en el apartado anterior.

**Ejercicio 4.16** Un sistema de comunicaciones utiliza una modulación OFDM con  $N = 4$  portadoras, con constelaciones 16-QAM de niveles normalizados en todas las portadoras, para transmitir a una tasa binaria total (teniendo en cuenta la contribución de las 4 portadoras) de  $R_b = 8$  Mbits/s. La respuesta conjunta entre el filtro transmisor, filtro receptor y canal, muestreada a  $T/N$  en el caso en que no se utiliza prefijo cíclico, o a  $T/(N + C)$  si se utiliza un prefijo de  $C$  muestras, es

$$d[m] = \delta[m] + \frac{1}{2}\delta[m - 2]$$

- a) Explique cómo conseguir eliminar la interferencia entre símbolos (ISI) y entre portadoras (ICI), y calcule los canales discretos equivalentes a tiempo de símbolo en ese caso.
- b) Calcule el mínimo ancho de banda necesario para transmitir a la tasa binaria especificada en los dos siguientes escenarios:
  - i) Si se quiere transmitir sin ISI y sin ICI.
  - ii) Si se quiere transmitir utilizando el mínimo ancho de banda posible, sin importar que existan o no ISI e ICI.