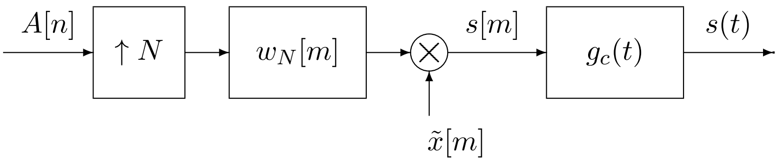
Capítulo 4 : Soluciones de los Ejercicios

Ejercicio 4.1 (Solución) a) El diagrama de bloques del transmisor es el de la figura



Las muestras se procesan por bloques de tamaño N, siendo las muestras del n-ésimo bloque

$$s^{(n)}[m] = A[n] \times x[m], \quad m \in \{0, 1, \cdots, N-1\},$$

donde $s^{(n)}[m] = s[nN + m]$.

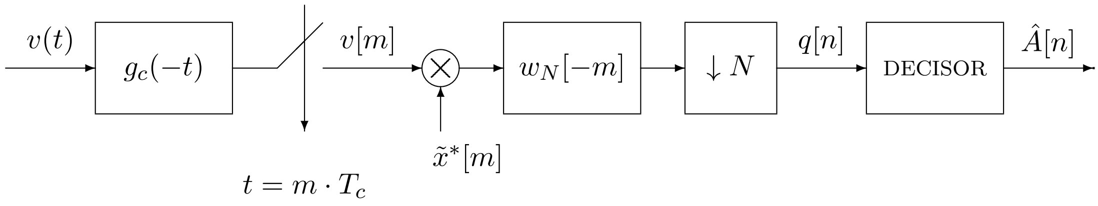
Las muestras asociadas a la secuencia dada son

$$\begin{aligned}
s[0] &= A[0] \times x[0] = +1 \times +1 = +1\\
s[1] &= A[0] \times x[1] = +1 \times -1 = -1\\
s[2] &= A[0] \times x[2] = +1 \times +1 = +1\\
s[3] &= A[0] \times x[3] = +1 \times -1 = -1\\
s[4] &= A[1] \times x[0] = -1 \times +1 = -1\\
s[5] &= A[1] \times x[1] = -1 \times -1 = +1\\
s[6] &= A[1] \times x[2] = -1 \times +1 = -1\\
s[7] &= A[1] \times x[3] = -1 \times -1 = +1\\
s[8] &= A[2] \times x[0] = -1 \times +1 = -1\\
s[9] &= A[2] \times x[1] = -1 \times -1 = +1\\
s[10] &= A[2] \times x[2] = -1 \times +1 = -1\\
s[11] &= A[2] \times x[3] = -1 \times -1 = +1
\end{aligned}$$

b) Las muestras $v[m]$ son

$$\begin{array}{llll}
v[0] = +\frac{3}{2}, & v[1] = -\frac{3}{2}, & v[2] = +\frac{3}{2}, & v[3] = -\frac{3}{2}\\
v[4] = -\frac{1}{2}, & v[5] = +\frac{1}{2}, & v[6] = -\frac{3}{2}, & v[7] = +\frac{3}{2}\\
v[8] = -\frac{3}{2}, & v[9] = +\frac{3}{2}, & v[10] = -\frac{3}{2}, & v[11] = +\frac{3}{2}
\end{array}$$

c) El esquema del receptor es el siguiente



Analíticamente

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \times v[nN+m].$$

En este caso

$$q[0] = +6, \quad q[1] = -4, \quad q[2] = -6.$$

Ejercicio 4.2 (Solución) a) La señal modulada se representa en la Figura 4.1.

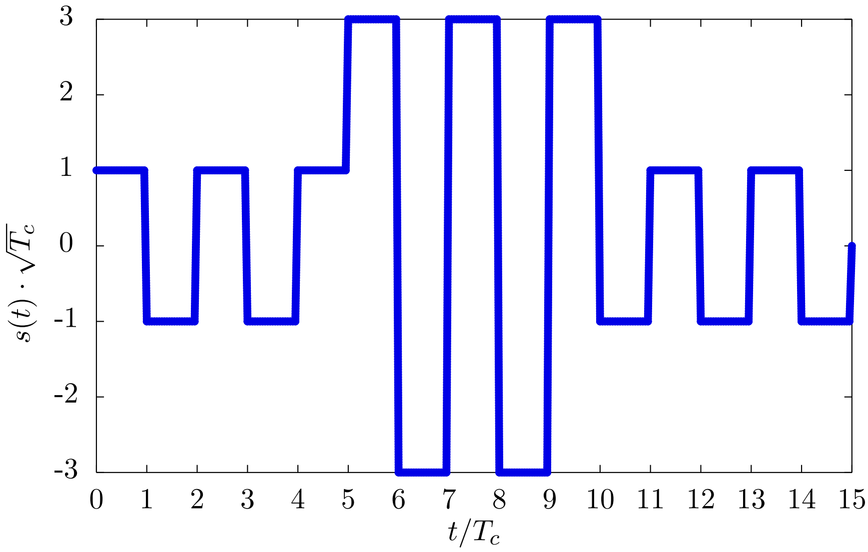


Figura 4.1: Forma de onda de la señal modulada.

b) La densidad espectral de potencia de este tipo de modulaciones es

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T}\, S_A(e^{j\omega T})\, |X(e^{j\omega T_c})|^2\, |G_c(j\omega)|^2$$

$$S_s(j\omega) = \frac{E_s}{N}\, \left(1 - 2\, \cos(\omega T_c) + 2\, \cos(2\omega T_c)\right)^2\, \Pi\left(\frac{\omega T_c}{2\pi}\right).$$

c) Las observaciones son

$$q[0] = 5, \quad q[1] = 15, \quad q[2] = -5.$$

Ejercicio 4.3 (Solución) a) En este caso

$$a = -1,\ b = +1,\ c = -1.$$

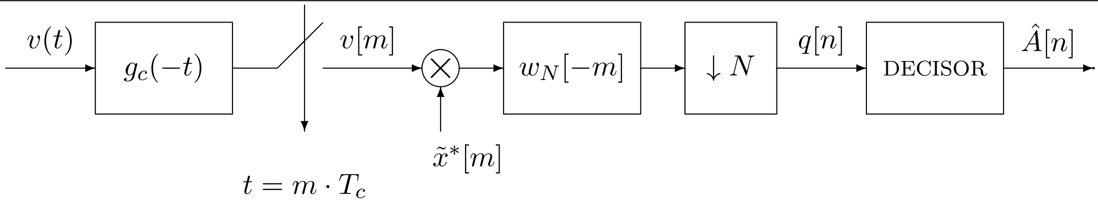
$$A[0] = +1,\ A[1] = -3,\ A[2] = -1.$$

b) La señal recibida es

$$v(t) = \sqrt{T} \times s(t),$$

es decir, precisamente la señal que se muestra en la figura del enunciado.

El esquema del receptor es el siguiente



Las observaciones en este caso son

$$q[0] = +4, \quad q[1] = -12, \quad q[2] = -4.$$

Ejercicio 4.4 (Solución) a) La observación $q[n]$ es en este caso

$$q[0] = q[1] = q[2[= 0.$$

b) Utilizando $x[m]$

$$p[n] = 6\delta[n] + 2\delta[n-1].$$

Esto significa que hay interferencia intersimbólica en el sistema. La probabilidad de error es

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{4}{\sqrt{2N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{8}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Si se usa la secuencia alternativa $x_r[m]$ en el receptor

$$p[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-1].$$

La probabilidad de error es ahora

$$P_e = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}Q\left(\frac{4}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

c) En este caso, si en el receptor se usa una secuencia de ensanchado diferente,

$$x_r[m] = a\,\delta[m] + b\,\delta[m-1] + c\,\delta[m-2] + d\,\delta[m-3]$$

para eliminar la ISI bastaría buscar una secuencia tal que $a = b$, por ejemplo la secuencia dada por

$$a = -1,\ b = -1,\ c = +1,\ d = -1,$$

que daría lugar a un canal discreto equivalente

$$p[n] = 2\delta[n].$$

Ejercicio 4.5 (Solución) a) El filtro transmisor a tiempo de símbolo, $g(t)$ es el mostrado en la Figura 4.2.

b) El canal discreto equivalente a tiempo de símbolo, $p[n]$, es

$$p[n] = 10\,\delta[n] - \delta[n-1]$$

La probabilidad de error

$$P_e = \frac{1}{2}\,Q\left(\frac{11}{\sqrt{5N_0}}\right) + \frac{1}{2}\,Q\left(\frac{9}{\sqrt{5N_0}}\right).$$

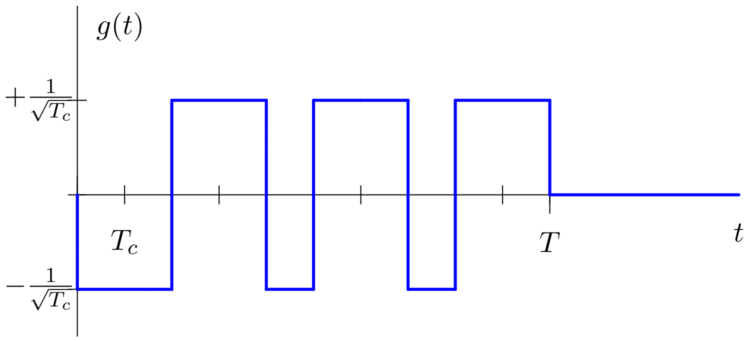
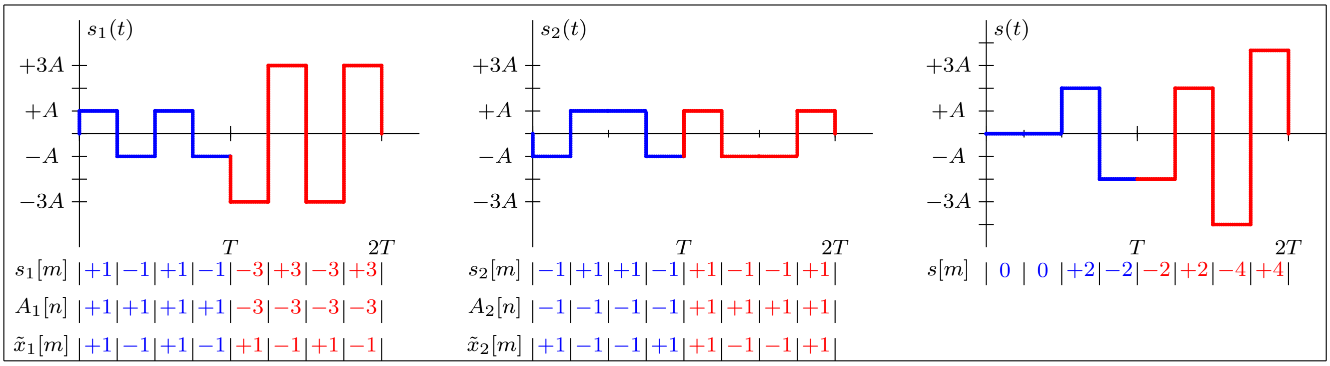


Figura 4.2: Filtro transmisor, $g(t)$.

Ejercicio 4.6 (Solución) a) Para que la señal de cada usuario no interfiera con la del otro, los pulsos de los dos usuarios deben ser ortogonales, por lo que la elección es

$$x_2[m] = x_b[m].$$

b) En este caso la señal generada, junto a contribución de cada usuario, se muestra en la figura



c) La señal demodulada por cada usuario se obtiene como

$$\begin{aligned} q_1[0] =& v[0] \times x_1[0] + v[1] \times x_1[1] + v[2] \times x_1[2] + v[3] \times x_1[3] \\ =& 0 \times (+1) + 0 \times (-1) + 2 \times (+1) - 2 \times (-1) = +4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1[1] =& v[4] \times x_1[0] + v[5] \times x_1[1] + v[6] \times x_1[2] + v[7] \times x_1[3] \\ =& -2 \times (+1) + 2 \times (-1) - 4 \times (+1) + 4 \times (-1) = -12. \end{aligned}$$

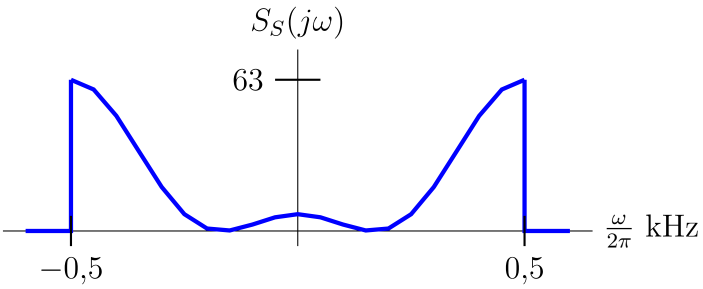
Ejercicio 4.7 (Solución) La densidad espectral de potencia es

$$S_S(j\omega) = \frac{7}{T_c}(1 - 2\cos(\omega T_c))^2 \, H_{RC}^{\alpha,T_c}(j\omega),$$

con $T_c = 1$ ms. Para $\alpha = 0$,

$$S_S(j\omega) = 7\left[1 - 2\cos\left(\omega \times 10^{-3}\right)\right]^2, \text{ para } |\omega| \leq \frac{\pi}{T_c} \text{ rad/s.}$$

Esta respuesta se representa en la figura



El ancho de banda es

$$B = 0{,}5 \text{ kHz}.$$

Ejercicio 4.8 (Solución) a) En este caso

$$p[n] = 10\,\delta[n-1].$$

En este caso no hay ISI, sólo un retardo de un símbolo.

b) Ahora

$$p[n] = 8\,\delta[n] + 2\,\delta[n-1].$$

Esto significa que en este caso hay interferencia intersimbólica (con el símbolo anterior).

c) En este caso no se puede simplificar la expresión

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[m]\; x^*[\ell]\; d[nN+\ell-m],$$

siendo

$$d[m] = \sum_m \delta[m] \times r_{g_c}(mT_c - \frac{5}{2}T_c).$$

Como la respuesta $d[m]$ no es ideal, la única posibilidad de que no existiera ISI sería que se cumpliera

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\; x[m+k] = 0, \text{ para } -9 \le k \le 9,$$

condición que no se cumple para algunos valores de k, por lo que en general existirá ISI.

Ejercicio 4.9 (Solución) a) Muestras a tiempo de chip T_c

$$s[0] = +1,\; s[1] = -1,\; s[2] = +1$$

$$s[3] = -3,\; s[4] = +3,\; s[5] = -3$$

$$s[6] = +1,\; s[7] = -1,\; s[8] = +1.$$

Ancho de banda de la señal modulada

$$B = 7{,}5 \text{ kHz},$$

b) Modulación OFDM: si se tiene en cuanta que

$$s[0] = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[0]}_{+1}\;\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4}\,0\,0}}_{e^{j0}=1} + \underbrace{A_1[0]}_{-3}\;\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4}\,1\,0}}_{e^{j0}=1} + \underbrace{A_2[0]}_{+1}\;\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4}\,2\,0}}_{e^{j0}=1} + \underbrace{A_3[0]}_{+3}\;\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4}\,3\,0}}_{e^{j0}=1}\right) = \frac{2}{\sqrt{T}}.$$

$$s[1]=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[0]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,0}{4}\,1}}_{e^{j0}=+1}+\underbrace{A_1[0]}_{-3}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,1}{4}\,1}}_{e^{j\pi/2}=+j}+\underbrace{A_2[0]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,2}{4}\,1}}_{e^{j\pi}=-1}+\underbrace{A_3[0]}_{+3}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,3}{4}\,1}}_{e^{j3\pi/2}=-j}\right)=\frac{-j6}{\sqrt{T}}.$$

$$s[2]=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[0]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,0}{4}\,2}}_{e^{j0}=+1}+\underbrace{A_1[0]}_{-3}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,1}{4}\,2}}_{e^{j\pi}=-1}+\underbrace{A_2[0]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,2}{4}\,2}}_{e^{j2\pi}=+1}+\underbrace{A_3[0]}_{+3}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,3}{4}\,2}}_{e^{j3\pi}=-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{T}}.$$

$$s[3]=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[0]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,0}{4}\,3}}_{e^{j0}=+1}+\underbrace{A_1[0]}_{-3}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,1}{4}\,3}}_{e^{j3\pi/2}=-j}+\underbrace{A_2[0]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,2}{4}\,3}}_{e^{j3\pi}=-1}+\underbrace{A_3[0]}_{+3}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,3}{4}\,3}}_{e^{j9\pi/2}=+j}\right)=\frac{+j6}{\sqrt{T}}.$$

$$s[4]=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,0}{4}\,0}}_{e^{j0}=1}+\underbrace{A_1[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,1}{4}\,0}}_{e^{j0}=1}+\underbrace{A_2[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,2}{4}\,0}}_{e^{j0}=1}+\underbrace{A_3[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,3}{4}\,0}}_{e^{j0}=1}\right)=0.$$

$$s[5]=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,0}{4}\,1}}_{e^{j0}=+1}+\underbrace{A_1[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,1}{4}\,1}}_{e^{j\pi/2}=+j}+\underbrace{A_2[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,2}{4}\,1}}_{e^{j\pi}=-1}+\underbrace{A_3[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,3}{4}\,1}}_{e^{j3\pi/2}=-j}\right)=0.$$

$$s[6]=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,0}{4}\,2}}_{e^{j0}=+1}+\underbrace{A_1[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,1}{4}\,2}}_{e^{j\pi}=-1}+\underbrace{A_2[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,2}{4}\,2}}_{e^{j2\pi}=+1}+\underbrace{A_3[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,3}{4}\,2}}_{e^{j3\pi}=-1}\right)=\frac{4}{\sqrt{T}}.$$

$$s[7]=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\underbrace{A_0[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,0}{4}\,3}}_{e^{j0}=+1}+\underbrace{A_1[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,1}{4}\,3}}_{e^{j3\pi/2}=-j}+\underbrace{A_2[1]}_{+1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,2}{4}\,3}}_{e^{j3\pi}=-1}+\underbrace{A_3[1]}_{-1}\underbrace{e^{j\frac{2\pi\,3}{4}\,3}}_{e^{j9\pi/2}=+j}\right)=0.$$

donde $T=2\times 10^{-3}$.

I) En esta caso las muestras correspondientes a los 8 primeros símbolos son

$$\underbrace{s[0],s[1],s[2],s[3]}_{Bloque\ 1},\underbrace{s[4],s[5],s[6],s[7]}_{Bloque\ 2}.$$

El ancho de banda es

$$B=2\text{ kHz}.$$

II) Ahora

$$B=3\text{ kHz}$$

Las muestras correspondientes a los 8 primeros símbolos

$$\underbrace{\tilde{s}[-2],\tilde{s}[-1],\tilde{s}[0],\tilde{s}[1],\tilde{s}[2],\tilde{s}[3]}_{Bloque\ 1},\underbrace{\tilde{s}[4],\tilde{s}[5],\tilde{s}[6],\tilde{s}[7],\tilde{s}[8],\tilde{s}[9]}_{Bloque\ 2},$$

que en este caso son

$$\underbrace{s[2],s[3],s[0],s[1],s[2],s[3]}_{Bloque\ 1},\underbrace{s[6],s[7],s[4],s[5],s[6],s[7]}_{Bloque\ 2}.$$

Ejercicio 4.10 (Solución) a) Modulación de espectro ensanchado por secuencia directa

I) Las muestras a tiempo de chip son

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s[m]$	$+1$	-1	-1	$+1$	-3	$+3$	$+3$	-3	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1

El ancho de banda de la señal modulada es

$$B=24\text{ kHz}.$$

II) La única observación es

$$q[0] = 3{,}5$$

b) Modulación OFDM en el que la tasa por portadora es la total dividida por el número de portadoras$N = 4$, es decir

$$R_s = \frac{R_s^{TOTAL}}{N} = \frac{4}{4} = 1 \text{ baudio, y por tanto } T = \frac{1}{R_s} = 1 \text{ s}$$

I) Sin prefijo cíclico, las muestras son

m	0	1	2	3
$s[m]$	-2	$-2j$	$+6$	$+2j$

El ancho de banda sin prefijo cíclico es

$$B = 4 \text{ Hz}$$

II) Con prefijo cíclico las muestras son

m	-1	0	1	2	3
$\tilde{s}[m]$	$+2j$	-2	$-2j$	$+6$	$+2j$

El ancho de banda sin prefijo cíclico es

$$B = 5 \text{ Hz}$$

Ejercicio 4.11 (Solución) a) Si no se utiliza prefijo cíclico, la condición para que no exista interferencia intersimbólica (ISI) ni interferencia entre portadoras (ICI) es que la respuesta conjunta del filtro reconstructor sinc a T/N, $g(t)$, el correspondiente filtro adaptado $g(-t)$, y la respuesta equivalente compleja en banda base del canal, $h_{eq}(t) = h(t)\, e^{-j\omega_c t}$, muestreada a T/N sea una delta, es decir

$$d[m] = \left(g(t) * h_{eq}(t) * g(-t)\right)\Big|_{t=m\frac{T}{N}} = \delta[m].$$

b) Los canales discretos equivalentes valen

$$p_{k.i}[n] = \frac{N}{T} D[k]\ \delta[n]\ \delta[k-i],$$

por lo que no hay ni ISI ni ICI. Los coeficientes $D[k]$ son

$$D[0] = D[2] = \frac{4}{3}, \quad D[1] = D[3] = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 4.12 (Solución) a) Los canales discretos equivalentes son

$$p_{k.i}[n] = \frac{N}{T} D[k]\ \delta[n]\ \delta[k-i],$$

por lo que no hay ni ISI ni ICI. Los coeficientes $D[k]$ son

$$D[0] = 0{,}4, \quad D[1] = 1 + j0{,}6, \quad D[2] = 1{,}6, \quad D[3] = 1 - j0{,}6$$

b) La relación señal a ruido en cada portadora es (expresión para la portadora de índice k)

$$\frac{\left(\frac{N}{T}\right)^2 |D[k]|^2 E_s}{\sigma_z^2}$$

c) La probabilidad de error es el resultado de promediar la probabilidad de error en cada portadora. Para una modulación QPSK con niveles normalizados (sin ISI), la probabilidad de error es

$$P_e = 2\,Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2$$

Por tanto, ahora

$$P_e = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} 2\,Q\left(\frac{\frac{N}{T}|D[k]|}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \left[Q\left(\frac{\frac{N}{T}|D[k]|}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2$$

Ejercicio 4.13 (Solución) a) Sin extensión cíclica

I) La condición es $p_{i,i}[n] = \delta[n]$

II) La condición es $p_{k,i}[n] = 0$ para $k \neq i$.

b) Con extensión cíclica

I) Si la memoria del canal es K_d (o lo que es lo mismo, el último valor de m para el que $d[m] \neq 0$ es $m = K_d$), la longitud del prefijo cíclico ha de ser $C \geq K_d$.

II) La pérdida de eficiencia, en términos de velocidad de transmisión, por utilizar un prefijo cíclico de longitud C muestras, es

$$\eta = \frac{N}{N+C}.$$

Ejercicio 4.14 (Solución) a) Las tasas son

$$R_{s|min} = 400 \text{ baudios.}$$

$$R_{s|max} = 1 \text{ kbaudio.}$$

b) El orden de la constelación para cada usuario es

$$M_0 = 256 \text{ símbolos}, \quad M_1 = 16 \text{ símbolos}, \quad M_2 = 4 \text{ símbolos}, \quad M_3 = 2 \text{ símbolos}.$$

c) Para que los 4 usuarios no tengan ISI ni ICI es

$$C = 2 \text{ muestras.}$$

En realidad, para los usuarios 0 y 1, bastaría con $C = 1$ muestra.

d) El receptor es un receptor estándar para OFDM, excepto que cada usuario está únicamente interesado en recuperar su secuencia de datos, como se muestra en la Figura 4.3.

Es decir

$$q_i[n] = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N}m}\, v[nN+m] = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{DFT}_N[i]\left\{\left\{v^{(n)}[m]\right\}_{m=0}^{N-1}\right\}.$$

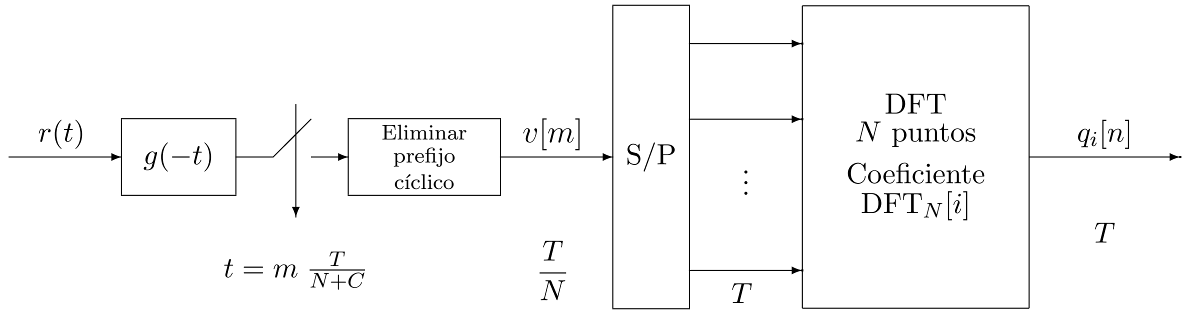


Figura 4.3: Receptor OFDM para el usuario de índice i.

Ejercicio 4.15 (Solución) a) Sin prefijo cíclico, el criterio de Nyquist generalizado establece que no habrá ISI ni ICI si

$$d[m] = K\,\delta[m].$$

En este caso el canal discreto equivalente a $\frac{T}{N}$, que viene dado por

$$d[m] = d(t)|_{t=m\frac{T}{N}} = d(t)|_{t=m\frac{T}{4}} = \delta[m] + 0{,}25\,\delta[m-1].$$

Se puede ver que $d[m]$ no es nulo para $m = 1$ además de para $m = 0$, incumpliendo las condiciones del criterio de Nyquist generalizado, por lo que el sistema tendrá ISI e ICI.

Para evitar la ISI y la ICI en un sistema de comunicaciones OFDM es necesario añadir una cabecera cíclica de longitud $C \geq K_d$. No obstante, para diseñar un sistema espectralmente eficiente, hay que elegir $C = K_d$, ya que la eficiencia espectral es

$$\eta = \frac{N}{N+C}.$$

Si se prueba para un prefijo de una muestra, $C = 1$, el canal discreto resultante es

$$d[m] = d(t)|_{t=m\frac{T}{N+C}} = d(t)|_{t=m\frac{T}{5}} = \delta[m] + 0{,}5\,\delta[m-1]$$

cuya memoria es $K_d = 1$, por lo que con $C = 1$ se evitan ISI e ICI.

b) Los canales discretos equivalentes $p_{k,i}[n]$ para un sistema libre de ISI e ICI vienen dados por

$$p_{k,i}[n] = \frac{N}{T}\delta[n]\delta[k-i]D[i],$$

donde los coeficientes $D[i]$ son

$$D[0] = 1{,}5, \quad D[1] = 1 - 0{,}5j, \quad D[2] = 0{,}5, \quad D[3] = 1 + 0{,}5j.$$

Ejercicio 4.16 (Solución) a) La ISI y la ICI se pueden evitar utilizando un prefijo cíclico de la longitud adecuada, al menos igual a la memoria de $d[m]$

$$C \geq K_d = 2.$$

En ese caso, los canales discretos equivalentes $p_{k,i}[n]$ son

$$p_{k,i}[n] = \frac{N}{T}\delta[n]\delta[k-i]D[k],$$

donde $N = 4$ y $T = 2$ μs, y $D[k]$ es

$$D[0] = 1{,}5,\ D[1] = 0{,}5,\ D[2] = 1{,}5,\ D[3] = 0{,}5.$$

b) Se trata en este caso de calcular el ancho de banda en dos casos

i) En este caso

$$B = 3 \text{ MHz}.$$

ii) Ahora

$$B = 2 \text{ MHz}.$$