uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

1. ÁLGEBRA LINEAL: MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Una matriz es un conjunto de números ordenados en n filas y m columnas. Se representa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1.1 Operaciones con matrices.

<u>Suma y resta.</u>

Solo se pueden sumar y restar las matrices de la misma dimensión. Se realiza operando los elementos que se encuentran en la misma posición (misma fila y columna):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+0 & 5+1 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

<u>Producto por escalar.</u>

Se multiplican todos los elementos de la matriz por el escalar.

$$7\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 & 7\cdot 2 & 7\cdot 3 \\ 7\cdot 4 & 7\cdot 5 & 7\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean A, B y C matrices del mismo tamaño y α un número real:

- A + B = B + A (propiedad conmutativa).
- A + (B + C) = (A + B) + C (propiedad asociativa).
- α(A + B) = αA + αB
- $(A + B)^t = A^t + B^t$

<u>Producto de matrices.</u>

Dos matrices se pueden multiplicar si y sólo si el número columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. De esta forma, la dimensión de la matriz resultante coincide con el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda.

Para multiplicar dos matrices se multiplican todos los elementos de una fila de la primera por todos los elementos de una columna de la segunda, sumando cada uno de los productos resultantes. En el siguiente ejemplo se representa cómo deben hacerse las combinaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+2\cdot 5+4\cdot 9 & 0\cdot 3+2\cdot 7+4\cdot 1 \\ 6\cdot 1+8\cdot 5+0\cdot 9 & 6\cdot 3+8\cdot 7+0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 18 \\ 46 & 74 \end{pmatrix}$$

Se observa que la dimensión de la primera matriz es 2x3 y la segunda 3x2, siendo la dimensión de matriz resultante 2x2.

PROPIEDADES

El producto de matrices generalmente no es conmutativo. Como excepción sí se cumple siempre al multiplicar por la matriz identidad o por la matriz inversa.

- ($A \cdot B \neq B \cdot A$)
- ($A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$)
- ($A \cdot I = I \cdot A$)

La matriz traspuesta del producto de dos matrices es igual al producto de ambas matrices traspuestas intercambiando el orden.

- $(AB)^t = B^t A^t$

Matriz inversa.

Se define la matriz inversa A^{-1} de A tal que cumple: $A^{-1} \cdot A = I$. Para calcularla se emplea el método de Gauss-Jordan, mediante el cual se obtienen ceros en la matriz a invertir mientras se realizan las mismas operaciones en la matriz identidad, resultando la matriz inversa una vez que la matriz inicial se ha transformado completamente en la matriz identidad.

EJEMPLO: Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

También se puede calcular la matriz inversa a través de la matriz adjunta mediante la siguiente ecuación: $A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$

1.2 Determinantes.

Un determinante es un número asociado a cada matriz cuadrada. En una matriz 1x1 su determinante es el único valor que posee. Para calcular determinantes de otros órdenes se aplican los siguientes métodos:

Matrices 2x2

Se multiplican los elementos de la diagonal principal y a continuación se resta el producto de los elementos de la diagonal inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

Matrices 3x3

A través de la regla de Sarrus, se multiplican todos los elementos en grupos de 3 y se suman de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

En este ejemplo se esquematiza el orden de cálculo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 6 \cdot 8 \cdot 1 = 27$$

PROPIEDADES

1) El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz traspuesta: $|A| = |A^t|$

2) El intercambio (permutación) de dos filas o columnas de una matriz cuadrada cambia de signo su determinante:

EJEMPLO: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2=F_1]{F_1=F_2} -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

3) Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada por un escalar su

determinante queda multiplicado por dicho número:

EJEMPLO: Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2$ calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix}$

(Aquí se emplean las propiedades 2 y 3):

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$$

4) El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de los determinantes de dichas matrices.

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

5) Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una línea nulos, tiene dos líneas iguales o proporcionales, o si una línea es combinación lineal de otras dos o más su determinante vale cero.

EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \xRightarrow{F_3=F_1+F_2} 0$$

6) Si todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumando respectivamente, siendo los demás elementos iguales a los del determinante inicial.

EJEMPLO: Demostrar que $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & 2x+5 & 2x+6 \end{vmatrix} = 0$

Aquí se emplearán las propiedades 5 y 6:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & 2x+5 & 2x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & 2x & 2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

De esta forma, si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante no varía.

7) El determinante de la matriz inversa de A es igual que el inverso del determinante de la matriz A.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

<u>Rango de una matriz.</u>

Se define rango de una matriz como la cantidad de filas o columnas linealmente independientes que posee. Esto se puede calcular escalonando la matriz y contando cuántas filas o columnas son distintas a cero, siendo la dimensión menor el rango de la matriz.

EJEMPLO: Calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Reduciendo por Gauss se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xRightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xRightarrow[C_4=C_2]{C_2=C_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

Al poseer tres filas distintas de cero se determina que la matriz posee rango 3.

PROPIEDAD: Si el determinante de una matriz cuadrada es distinto de cero su rango es máximo.

EJEMPLO: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \rightarrow RgA = 3$

1.3 Sistemas de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones lineales tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_m + & \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde a_{mn} y b_m son números reales y x1… x_n son las variables del sistema.

Según el número de soluciones que posea, un sistema de ecuaciones lineales puede ser:

- Compatible: si tiene solución. A su vez se subdivide en:
    - Compatible determinado: su solución es única
    - Compatible indeterminado: posee infinitas soluciones, dependientes de uno o más parámetros.
- Incompatible: no posee solución.

1) Método de Gauss

Para resolver un sistema compatible (determinado o indeterminado) se puede aplicar el método de Gauss, que consiste en reducir los coeficientes del sistema a ceros de tal manera que la matriz que represente el sistema quede escalonada (triangular superior). De esta forma, se podrán obtener los valores de las incógnitas por sustitución comenzando por la ecuación más reducida e ir avanzando en las sucesivas ecuaciones superiores.

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \xRightarrow[F_3=F_3-5F_1]{F_2=F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \xRightarrow{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad -y + 4z = -2 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases}$$

Tras resolver el sistema de manera escalonada se obtiene z=1; y=6 y x=-4.

2) Método de Cramer

Para resolver un sistema compatible determinado se puede aplicar el método de Cramer, mediante el cual se obtiene el valor de cada variable dividiendo el valor de un determinante construido con la columna solución sustituyendo la columna de los coeficientes de dicha incógnita, todo ello dividido entre el determinante de la matriz de coeficientes. Se puede representar mediante la siguiente fórmula:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

EJEMPLO: Se resolverá el mismo sistema que en el ejemplo anterior para comprobar que se obtienen las mismas soluciones:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = -4; y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = 6; z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = 1$$

De esta forma se obtienen otra vez los valores x=-4, y=6 y z=1.

- Teorema de Rouché-Frobenius

Mediante este teorema se puede calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones comparando el rango de la matriz de coeficientes A, el rango de la matriz ampliada A|b y el número de variables n:

Si Rg A = Rg(A|b) = n → sistema compatible determinado.

Si Rg A = Rg(A|b) < n → sistema compatible indeterminado.

Si Rg A < Rg(A|b) → sistema incompatible.

Como ejemplo se realizará la discusión de un sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro:

EJEMPLO:

$$\begin{cases} 2x + y + az = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Se define la matriz de coeficientes A con los coeficientes que multiplican a las variables y se define la matriz ampliada A|b añadiendo la columna de las soluciones de cada ecuación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A|b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & |4 \\ 1 & 0 & 1 & |2 \\ 1 & 1 & 1 & |2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

Se observa que el determinante es igual a cero si el parámetro a es igual a 2. Por tanto, ya se puede expresar parte de la solución de la discusión:

Si a≠2 → Rg A = 3, Rg A|b = 3 y número de incógnitas = 3 → Sistema compatible determinado.

Ahora se discutirá el sistema si a=2:

En primer lugar, como ya se conoce que la matriz de coeficientes no tiene rango 3 se comprobará si su rango es 2 calculando el determinante de una combinación cualquiera 2x2 de sus filas y columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dado que el determinante es distinto de cero se comprueba que RgA=2. A continuación, se escalonará la matriz ampliada por el método de Gauss para calcular su rango:

$$A|b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & |4 \\ 1 & 0 & 1 & |2 \\ 1 & 1 & 1 & |2 \end{pmatrix} \xRightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & |4 \\ 0 & -1 & 0 & |0 \\ 0 & -1 & 0 & |0 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & |4 \\ 0 & -1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

Se observa que se anula la última fila de la matriz ampliada, por tanto, Rg A|b=2. De esta forma ya se puede expresar el resto de la discusión del sistema:

Si a=2 → Rg A = 2, Rg A|b =2 y número de incógnitas= 3 → Sistema compatible indeterminado.