uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Límites y continuidad de funciones de varias variables

2. FUNCIONES DE DOS VARIABLES

2.1. TOPOLOGÍA EN $\mathbb{R}^2$

La Topología estudia las estructuras de los objetos sin importar cuál es su estado inicial. Esto es lo que la hace diferenciarse de la Geometría.

Definiciones:

- Un **espacio topológico** es aquel que está definido por el par $(X, \mathcal{T})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ una familia de subconjuntos de X abiertos que cumplen:
  - El vacío y X son abiertos.
  - La intersección finita de conjuntos abiertos es un abierto.
  - La unión de abiertos es un abierto.
- En $\mathbb{R}^2$ los elementos de la topología son rectángulos sin borde.
  - Los discos (bolas) abiertas son conjuntos abiertos.
  - Sea un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y A un subconjunto de X un punto $x \in X$ se dice **interior** a A si toda bola centrada en él está contenida en A. Al conjunto de los puntos interiores se le llama interior de A (A^0). El interior es un conjunto **abierto**.
  - Los conjuntos **cerrados** son aquellos cuyo complementario son abiertos. Por lo tanto, en un conjunto cerrado, toda bola del punto $x \in X$ está incluida en el complementario de A $(A^c\ o\ \bar{A})$
  - Cada punto de $\mathbb{R}^2$ es cerrado.
  - Los puntos que tengan bolas centradas en $x \in X$ y que tengan parte en A y parte en $\bar{A}$ se denominan puntos **frontera.** $(Fr(A))$**.** La frontera es un conjunto cerrado.
  - $\bar{A} = A \cup Fr(A)$
  - Un conjunto **acotado** es aquel en el que todos sus puntos están a una distancia finita de cualquier punto del conjunto.

- Un conjunto es **convexo** si para cualquier par de puntos del conjunto se puede trazar una recta que los una y que quede totalmente incluida en el conjunto.

EJEMPLOS:

Determinar si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados, convexos o acotados. Dar el conjunto de sus puntos abiertos, cerrados y frontera.

a) $\boldsymbol{A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y) - (-1, 2)\| < 1\}}$

Este conjunto representa aquellos puntos que se encuentra a menos de una unidad de distancia del punto $(-1,2)$, es decir una bola centrada en $(-1,2)$ de radio 1 donde los bordes no están incluidos.

Se trata de un conjunto abierto, todos los puntos A_1 son interiores, la frontera es el borde del conjunto, es decir la circunferencia $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ y los puntos cerrados son el conjunto formado por el conjunto A_1 y la frontera, es decir toda la bola incluido el borde.

El conjunto es acotado ya que está dentro de un disco superior y es un espacio medible, y es convexo porque cumple la definición

b) $\boldsymbol{A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\}}$

Los puntos de este conjunto forman un espacio abierto como se ve en su representación gráfica. Este conjunto se puede definir como la gráfica de una función $f(x, y) = y - x^3$ definida en el intervalo $[0, \infty)$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in [0, \infty)\}$$

Y como $[0, \infty)$ es cerrado, el conjunto es cerrado. El interior estaría formado por los puntos del conjunto que cumplen $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^3\}$ en este conjunto no entra el borde, y precisamente el borde es la frontera. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$

No es acotado ya que el espacio que genera no es medible, podemos decir que se extiende hasta el infinito.

Tampoco es convexo, existen puntos, como por ejemplo el (0,0) y el (2,8) que son puntos de A_2 que la recta que los une queda fuera del conjunto. Existen muchos puntos que les pasa esto.

c) $\boldsymbol{A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 2)^2 \leq 2, x \leq 1\}}$

Este conjunto está definido por la región que forma la circunferencia centrada en (0,-2) y los puntos del plano con valor de abscisa menor o igual que 1.

Este conjunto es cerrado ya que tiene incluido los bordes del recinto. Los puntos interiores serán los que queden en el conjunto excepto los bordes y la frontera solo los bordes.

El conjunto es acotado, todos los puntos están dentro de un disco superior y es medible, y es convexo porque cumple la definición.

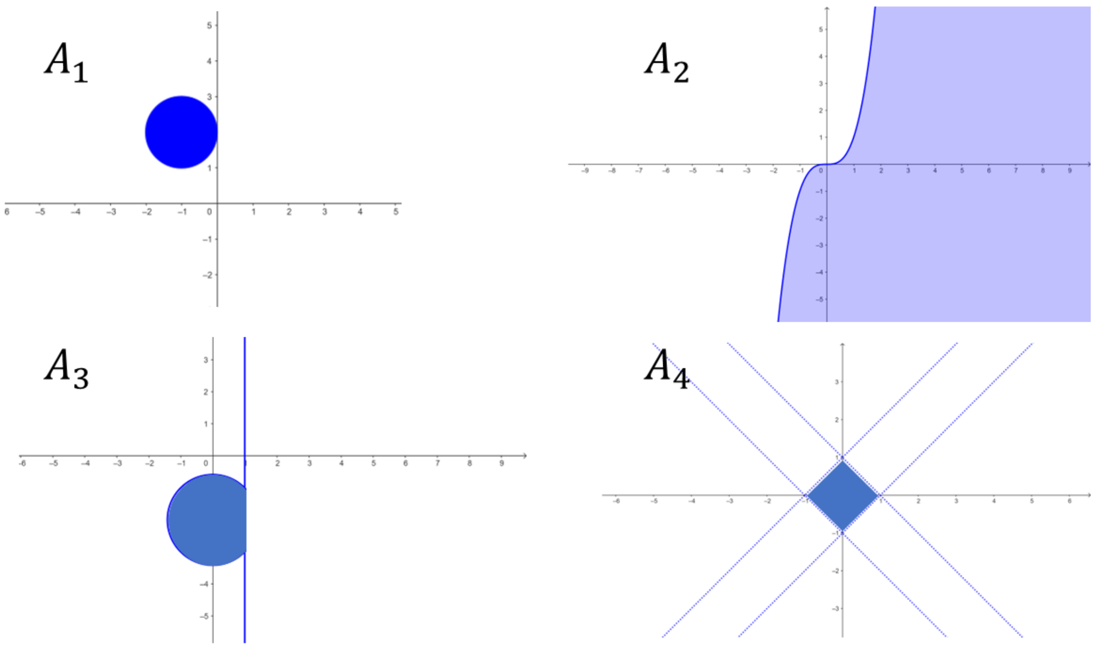
d) $\boldsymbol{A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}}$

El conjunto de punto cumple las siguientes funciones:

$$f(x,y) = y + x + 1 \qquad f(x,y) = y - x + 1 \qquad f(x,y) = y + x - 1 \qquad f(x,y) = y - x - 1$$

En la gráfica que forman el conjunto de puntos en común de estas funciones se observa que es un conjunto abierto ya que los bordes no entran, el conjunto cerrado estaría formado por A_4 más los bordes de las rectas y la frontera precisamente por los bordes.

Es un conjunto acotado ya que es medible, se encuentra dentro de un disco mayor, y es convexo ya que cumple la definición.



PIE DE IMAGEN: Gráficas de los conjuntos

2.2. DOMINIO E IMAGEN

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en $\mathbb{R}^2$, es decir una función de dos variables. Definimos el **dominio** de $f(x, y)$ como aquellos puntos de $\mathbb{R}^2$ en los cuales se puede evaluar $f(x, y)$. Es decir, aquellos puntos donde se puede hacer la función.

Se define la **imagen** o **recorrido** de $f(x, y)$ los valores de $\mathbb{R}$ en los que se transforman los puntos del plano.

Por tanto, el dominio de una función de dos variables es un recinto, un espacio en donde se puede aplicar la función, mientras que la imagen es un intervalo de $\mathbb{R}$ que recoge todos los valores que nos da $f(x, y)$.

EJEMPLOS

Calcular dominio y recorrido de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

La función es una raíz, por tanto, el dominio de definición será aquel espacio que haga que el radicando sea ≥ 0 $\quad x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \to x^2 + y^2 \geq 1$

Por tanto, el dominio son los puntos del plano que están en el exterior de la circunferencia de centro el origen y radio 1. Los puntos del borde de la circunferencia se incluyen en el dominio.

La imagen está formada por los posibles valores que puede tomar la función, en este caso al ser una raíz es una función creciente, el valor más pequeño que puede tomar es 0, entonces el intervalo de su recorrido es $[0, \infty)$

b) $\boldsymbol{f(x, y) = \frac{1}{xy}}$

La función es un cociente. Por tanto, hay que evaluar en qué momento el denominador se anula, $x \cdot y = 0$ y esto ocurre cuando una de las variables se hace 0. Gráficamente esto valores representan los ejes de coordenadas. Así que el dominio de la función estará formado por todo el plano excepto los ejes $Domf(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$

El único valor que no nos puede dar la función es el 0. Podemos obtener cualquier valor real excepto el 0. $Img\, f(x, y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\boldsymbol{f(x, y) = e^{xy}}$

Ahora nos encontramos con una función exponencial que siempre está definida, el dominio son todos los puntos del plano. Sin embargo, para el recorrido solo podemos obtener valores positivos. Así que tenemos que $Img\, f(x,y) = (0,\infty)$

d) $\boldsymbol{f(x,y) = ln(x+y)}$

Función logarítmica, por tanto, hay que evaluar cuando la función dentro del logaritmo es estrictamente positiva. $x + y > 0 \rightarrow y > -x$ Esto va a ocurrir en la parte de la región del plano donde $Domf(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$ Los puntos que están por "encima" de la bisectriz de los cuadrantes II y IV.

En cuanto al recorrido un logaritmo puede dar cualquier valor. La imagen es toda la recta real.

e) $\boldsymbol{f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)}$

De nuevo un logaritmo, evaluamos igual que antes, pero con la diferencia que ahora la función que tenemos dentro del logaritmo es siempre un valor positivo, simplemente debemos eliminar el origen (0,0) para evitar que tengamos un 0 en el logaritmo.

La región del dominio está formada por todo el plano excepto el origen. En cuanto al recorrido es igual que en el ejercicio anterior.

f) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

Función cociente, debemos evaluar cuando se anula el denominador, y esto ocurre solo en el origen, (0,0). Entonces, el recinto de definición del dominio es el plano excepto el origen. En cuanto a la imagen sabemos que el denominador siempre es mayor o igual que el numerador así que los valores posibles que podemos obtener son los que pertenecen al intervalo [-1,1].

2.3. CURVAS DE NIVEL.

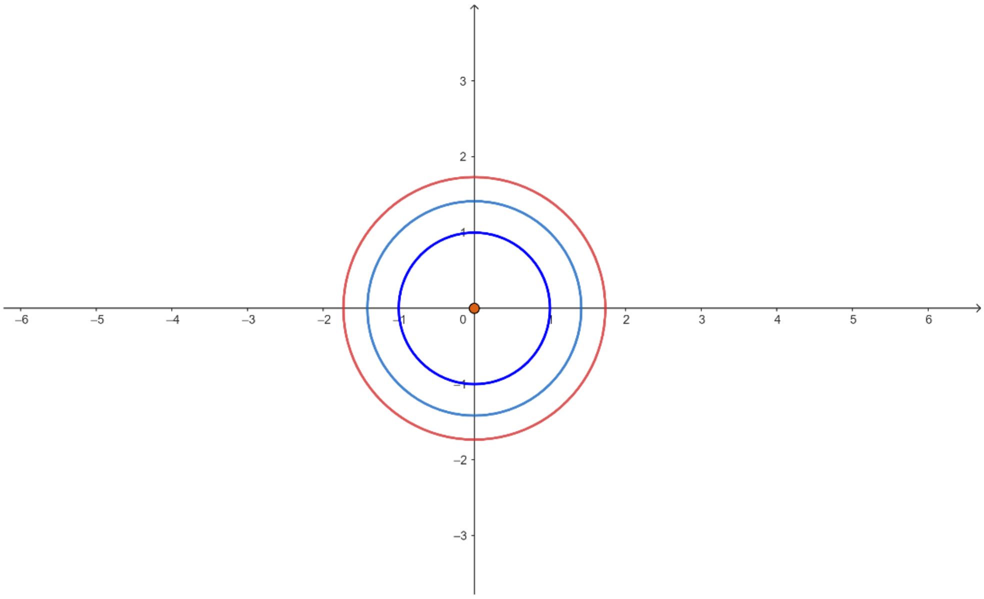
Las curvas de nivel de una función son la familia de curvas que resultan de la intersección de la función con planos horizontales a la función.

$$\left.\begin{array}{r} z = f(x,y) \\ z = k \end{array}\right\} \rightarrow f(x,y) = k$$

Vemos algunos ejemplos de cómo obtener las curvas de nivel.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \; para \; k = 0,1,2,3$

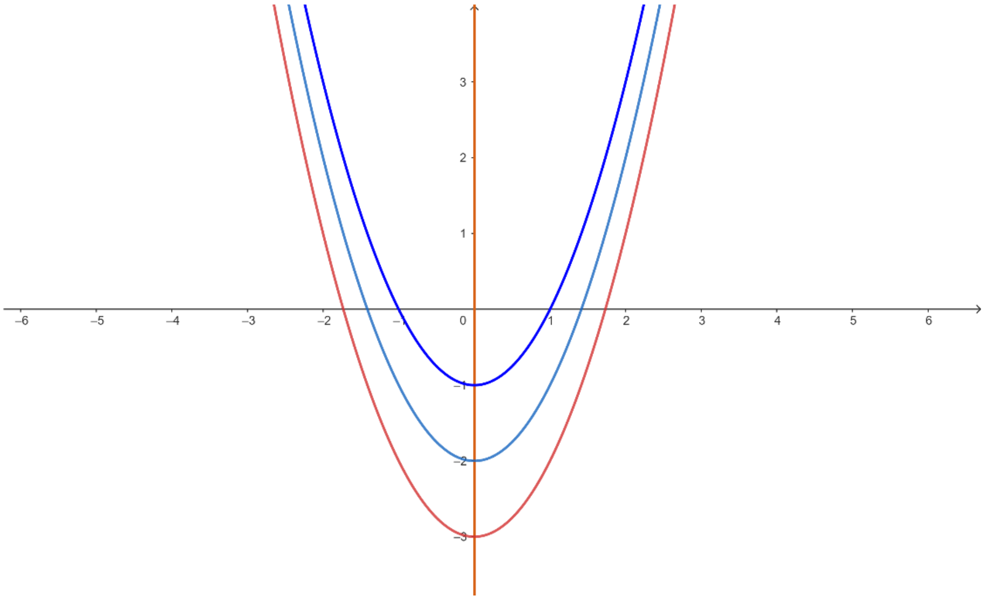
Son las funciones que se obtienen de $x^2 + y^2 = k$ Son circunferencias centradas en el (0,0) y radio $\sqrt{k}$



PIE DE IMAGEN: Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = x^2 - y \;\; para\; k = 0,1,2,3$

Las curvas de nivel serán las parábolas formadas por $x^2 - y = k \rightarrow y = x^2 - k$



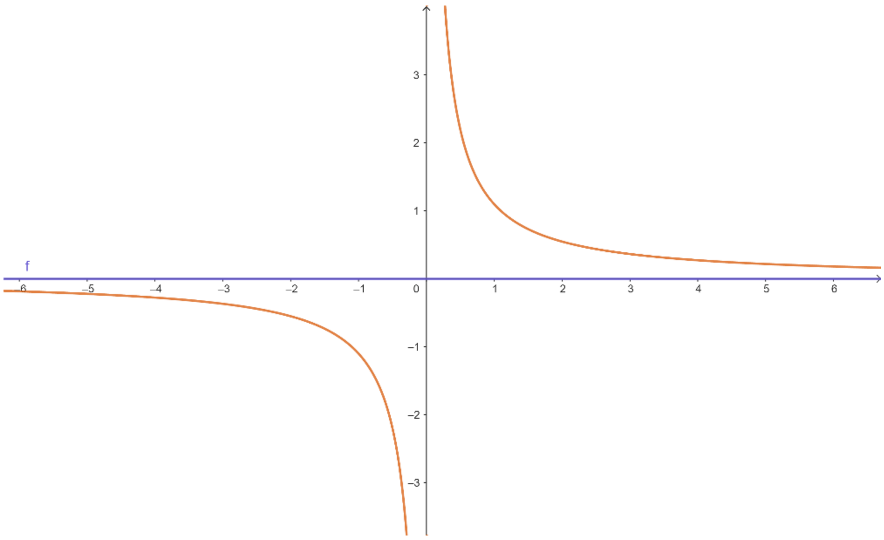
PIE DE IMAGEN: Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 - y$

c) $f(x,y) = e^{xy}\ \ para\, k = -1,1,3$

Las curvas estarán representadas por las funciones de la forma $e^{xy} = k \rightarrow xy = lnk$

$$y = \frac{lnk}{x}$$

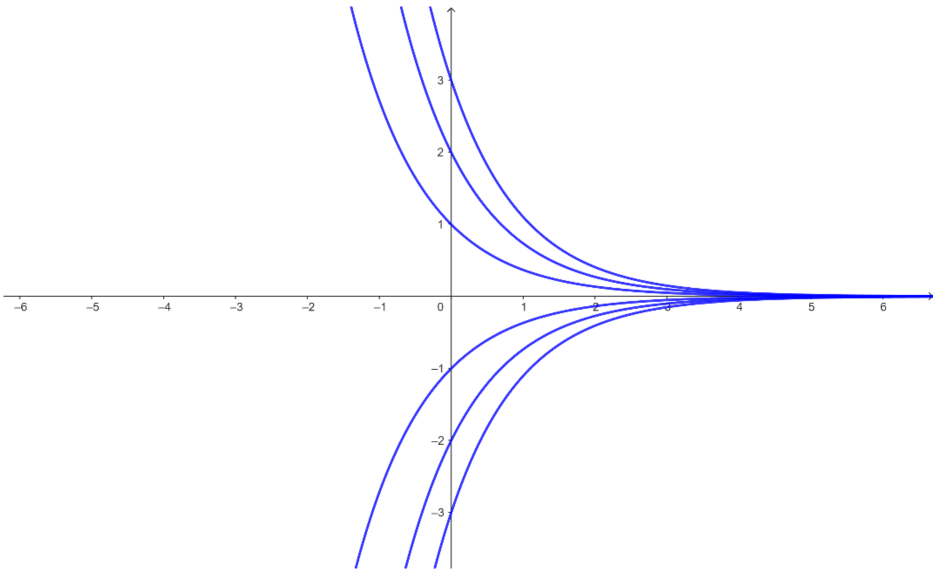
Solo pueden estar definidas para valores de $k > 0$ Y son curvas que forman una hipérbola equilátera.



PIE DE IMAGEN: Curva de nivel de $f(x,y) = e^{xy}$

d) $f(x,y) = ye^{x}\ \ para\, k = -1,-2,-3,1,2,3$

Las curvas de nivel son de la forma $ye^{x} = k \rightarrow y = k \cdot e^{-x}$



PIE DE IMAGEN: Curva de nivel de $f(x,y) = ye^{x}$

2.4. LÍMITES Y CONTINUIDAD

- Sea $z = f(x, y)$ definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) y sea $L \in \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad si$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \to |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

- La función $z = f(x, y)$ es continua en un punto (x_0, y_0) de una región **R** si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

La idea intuitiva de límite implica que cualquiera de las formas que se tenga de acercarse a un punto (x_0, y_0) la función vale *L.*

Estas diferentes formas se recogen en la idea de límite direccional. En este caso se tiene la relación $y = mx$ en este supuesto es una relación lineal. En pureza habría que buscar las distintas formas, parabólicas, exponencial, tomando la relación $y = mx^n$. Y de todas las formas el límite debe tender al mismo valor.

PROPOSICIÓN

Dada una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ y existen también los límites de una variable $\lim_{x \to x_0} f(x, y)$ y $\lim_{y\to y_0} f(x, y)$ entonces existen y son iguales y se llaman límites iterados

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x, y)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right) = L$$

Vemos unos ejemplos:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$

En primer lugar, calculamos los límites iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) \to \infty$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = 0$$

Como observamos los límites son distintos, y podemos decir que no existe el límite de la función.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

Los límites son iguales, podemos continuar comprobando la existencia del límite.

Se calcula ahora el límite direccional. $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\underbrace{=}_{y=mx}\lim_{x\to 0}\frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^3}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{xm^2}{1+m^2}=\frac{0}{1+m^2}$$

Una vez obtenido el valor del límite direccional interpretamos si este valor depende de m o no, si el límite depende de m no existe ya que dependería de la pendiente de la recta $y = mx$ y entonces según la pendiente de la recta el límite cambia de valor y el límite debe ser único.

En este caso como el denominador nunca se anula el cociente vale 0 para cualquier valor de m.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xm^2}{1+m^2}=0$$

Como coincide con los límites laterales de momento podemos decir que el límite parece que tiende a 0.

Vamos a comprobar la dirección parabólica.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\underbrace{=}_{y=mx^2}\lim_{x\to 0}\frac{x(mx^2)^2}{x^2+(mx^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^5}{x^2(1+m^2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3m^2}{1+(mx)^2}=0$$

Para cualquier valor de m el límite tiende a 0

Todo parece indicar que el límite tiende a 0, pero aún no lo podemos asegurar ya que solo hemos comprobado dos direcciones, una forma de no tener que seguir haciendo pruebas con más direcciones es aplicar lo que se conoce como la regla del "Sándwich", que no es más que encontrar dos funciones que acoten a $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ y si cada una de esas funciones tienden a 0, entonces $f(x,y)$ tiende a 0.

¿por qué no hacemos esta comprobación desde el principio?

Porque necesitamos saber cuál es el valor más probable al que tiende el límite. Si por los casos de límite iterado y direccional sale el mismo valor, entonces si existe el límite debe ser ese valor.

Para simplificar un poco las funciones que se deben buscar para acotar $f(x,y)$, podemos comprobarlo en valor absoluto, así sabemos que $0 \leq |f(x,y)| \leq g(x,y)$ Así que solo debemos encontrar la función $g(x,y)$ y comprobar que $g(x,y)$ tiende a 0.

Por otro lado, sabemos que:

$$\left.\begin{matrix} x = \rho cos\alpha \\ y = \rho sen\alpha \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \rho \rightarrow 0 \\ \alpha \in [0,2\pi] \end{matrix}$$

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho cos\alpha \rho^2 sen^2\alpha}{\rho^2 cos^2\alpha + \rho^2 sen^2\alpha}\right| = \left|\frac{\rho^3 cos\alpha sen^2\alpha}{\rho^2}\right| = |\rho cos\alpha sen^2\alpha| \leq |\rho| = 0$$

Tenemos ya que todas las indicaciones nos llevan a decir que la función tiende a 0.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{2y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

Los límites son distintos, el límite no existe.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Los límites son iguales, podemos continuar comprobando la existencia del límite.

Se calcula ahora el límite direccional. $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2 + y^2} \underbrace{=}_{y=mx} \lim_{x\to 0}\frac{xmx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

El límite tiende a un valor que depende de m por lo tanto el límite no es único, entonces no existe.

Vemos ahora unos ejemplos sobre continuidad.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para comprobar si la función es continua el límite de la función debe coincidir con el valor de $f(0,0)$. Debemos comprobar en primer lugar el límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^3+y^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^3+y^3}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^3}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Los límites son iguales, podemos continuar comprobando la existencia del límite.

Se calcula ahora el límite direccional. $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3} \underbrace{=}_{y=mx} \lim_{x\to 0}\frac{x^2mx}{x^3+(mx)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^3(1+m^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^3} = \frac{m}{1+m^3}$$

La función no tiene límite ya que depende de m y por tanto no es continua en (0,0)

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calculamos el límite de la función.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Los límites son iguales, podemos continuar comprobando la existencia del límite.

Se calcula ahora el límite direccional. $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} \underbrace{=}_{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)^3}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^4}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^2}{1+m^2} = 0$$

Vamos a comprobar la dirección parabólica.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} \underbrace{=}_{y=mx^2} \lim_{x\to 0} \frac{x(mx^2)^3}{x^2+(mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^7}{x^2(1+m^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5m^3}{1+(mx)^2} = 0$$

Para cualquier valor de m el límite tiende a 0

Aplicamos la regla del "Sándwich", se busca la función que acote a $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

$0 \leq |f(x,y)| \leq g(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho cos\alpha \\ y = \rho sen\alpha \end{array}\right\} \to \begin{array}{c} \rho \to 0 \\ \alpha \in [0,2\pi] \end{array}$$

$0 \leq |f(x,y)| \leq \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho cos\alpha \rho^3 sen^3\alpha}{\rho^2 cos^2\alpha + \rho^2 sen^2\alpha}\right| = \left|\frac{\rho^4 cos\alpha sen^3\alpha}{\rho^2}\right| = |\rho^2 cos\alpha sen^3\alpha| \leq \rho^2 = 0$

Tenemos ya que todas las indicaciones nos llevan a decir que la función tiende a 0.

El valor de $f(0,0) = 0$

En este caso tenemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$

La función es continua.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^6+y^3} & y \neq -x^2 \\ 0 & y = -x^2 \end{cases}$

Vemos el límite de la función

Estudiamos el caso en los puntos de la forma $(a, -a^2)$ ya que si $x = a$ cualquiera entonces $y = -a^2$.

- Supongamos $a \neq 0$ entonces tenemos que $\lim_{y\to -a^2} \frac{a^4(-a^2)}{a^6+(-a^2)^3} = \lim_{y\to -a^2} \frac{-a^6}{0} \to -\infty$

  El límite no existe.

- Supongamos el caso ahora de $a = 0$. Entonces tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^4y}{x^6+y^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^6}\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4y}{x^6+y^3}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^3}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

Se calcula ahora el límite direccional. $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{x^6+y^3}\underbrace{=}_{y=mx}\lim_{x\to 0}\frac{x^4mx}{x^6+(mx)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^5}{x^3(x^3+m^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{m^2}=0$$

Se calcula ahora el límite parabólico. $y=mx^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{x^6+y^3}\underbrace{=}_{y=mx^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^4mx^2}{x^6+(mx^2)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^6}{x^6(1+m^3)}=\frac{m}{1+m^3}$$

El límite depende de m por tanto no existe, la función no es continua.