

OpenCourseWare

## **Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)**

Paula Rosado Jiménez

### **Ejemplo de examen**

**Junio 2023**



- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ ax + (1 + a)y + z = 2 \\ x + by + bz = 1 + b \end{cases}$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
 (b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de  $a = 2$  y  $b = 1$ .
- (2) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$$

y la función

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

- (a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto  $A$ , su frontera y su interior. Justifique si el conjunto  $A$  es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.  
 (b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función  $f$  definida en el conjunto  $A$ .  
 (c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función  $f$ , indicando la dirección de crecimiento de la función.  
 (d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función  $f$ , determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función  $f$  en el conjunto  $A$ .

- (3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + z^2 + 3 &= 0 \\ y^2 + xz &= 4 \end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables  $y(x)$  y  $z(x)$  en un entorno del punto  $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$ .  
 (b) **(20 puntos)** Calcule
- $$y'(x), \quad z'(x)$$
- en el punto  $x_0 = -1$ .  
 (c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones  $y(x)$  y  $z(x)$  en el punto  $x_0 = -1$ .
- (4) Clasifique la forma cuadrática  $Q(x, y, z) = axz + x^2 + 4xy + 5y^2 + 6yz + 2z^2$  en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ . **(20 puntos)**
- (5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y, z) = x^3 + y + z^2$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, \quad x + y = 2\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.  
 (b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.  
 (c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función  $f$  en el conjunto  $S$ .  
 (d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de  $f$  en el conjunto  $S$ ?