uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Ejemplo de examen con solución

Junio 2023

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 28 de junio de 2023.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ ax+(1+a)y+z & = & 2 \\ x+by+bz & = & 1+b \end{array}\right.$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: *La matriz ampliada asociada al sistema es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & a+1 & 1 & 2 \\ 1 & b & b & b+1 \end{pmatrix}$$

Hacemos las operaciones siguientes

$$\begin{array}{rcl} \textit{fila 2} & \mapsto & \textit{fila 2} - a \times \textit{fila 1} \\ \textit{fila 3} & \mapsto & \textit{fila 3} - \textit{fila 1} \end{array}$$

Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & b-1 & b-1 & 1-a+b \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos fila 3 $\mapsto$ *fila 3* $-(b-1)$*fila 2 y obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & a(b-1) & a^2(b-1)-a-b+3 \end{pmatrix}$$

Así vemos que

(i) *si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 1$, *entonces* $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) = 3$. *El sistema es compatible determinado.*

(ii) *Si* $a = 0$, *entonces la el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-b \end{pmatrix}$$

Por lo que si $a = 0$ *y* $b \neq 3$, *entonces* $\operatorname{rango} A = 2 < \operatorname{rango}(A|b) = 3$ *y el sistema es incompatible. Mientras que si* $a = 0$ *y* $b = 3$, *Vemos que* $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) = 2$ *y el sistema es compatible indeterminado con* 1 *parámetro.*

(iii) *Finalmente, si* $b = 1$, *entonces el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

(b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de $a = 2$ y $b = 1$.

Solución: *El sistema es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución es

$$x = 4-2z, \quad y = z-2, \quad z \in \mathbb{R}$$

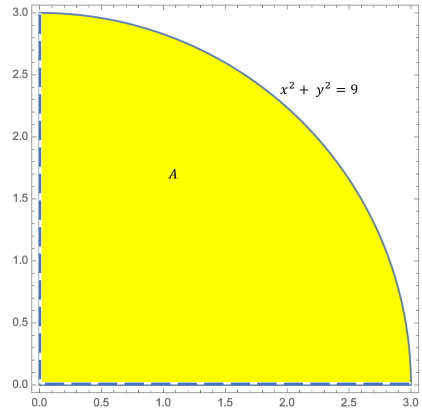
(2) Considere el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$$

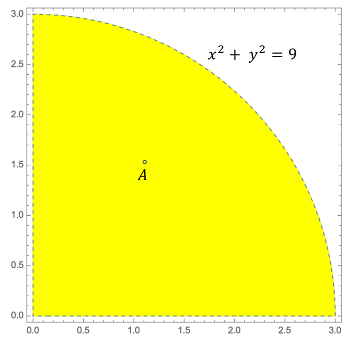
y la función

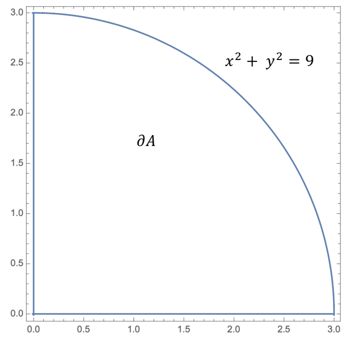
$$f(x,y) = 3x + 4y$$

(a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.
Solución: *El conjunto A es aproximadamente como en el siguiente gráfico.*



El interior y la frontera del conjunto son





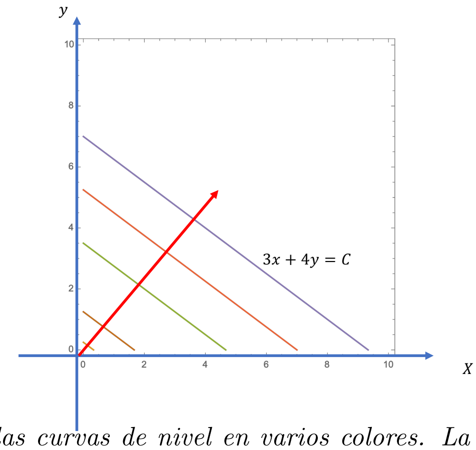
El conjunto no es A cerrado porque ∂A no es un subconjunto de A. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado. Por lo tanto, el conjunto A no es compacto. Es convexo porque el conjunto A es la intersección de tres conjuntos convexos $A = B \cap C \cap D$ con $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 9\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Los conjuntos C y D son convexos porque son unos semiplanos. El conjunto C es convexo porque la función $g(x) = 9 - x^2 - y^2$ es cóncava. Puesto que A es la intersección de conjuntos convexos, es también un conjunto convexo.

(b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A.
Solución: *La función $f(x,y) = 3x + 4y$ es continua en $\mathbb{R}^2$, pero el conjunto A no es compacto. Por lo tanto, no es posible aplicar el teorema de Weierstrass.*

(c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f, indicando la dirección de crecimiento de la función.
Solución: *Para $C \in \mathbb{R}$, las curvas de nivel f son lineas rectas*

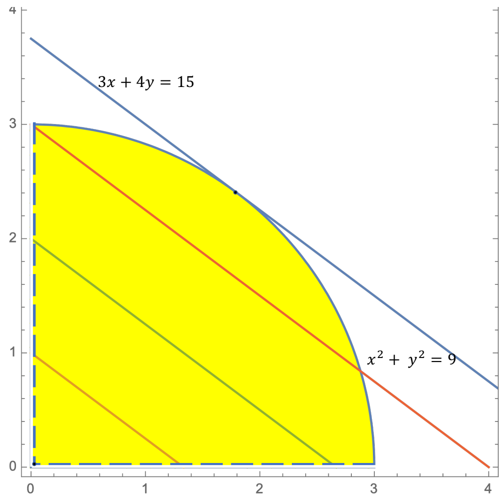
$$3x + 4y = C$$

con pendiente $-\frac{3}{4}$ *Gráficamente,*



En la figura se representan las curvas de nivel en varios colores. La flecha roja representa la dirección de crecimiento de la función f*.*

(d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A.
Solución: *Gráficamente,*



Vemos que $f(x, y) = 3x + 4y > 0$ *para todo* $(x, y) \in A$*. Por otra parte,*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x,y>0}} f(x, y) = 0$$

Por lo tanto, función f *no alcanza un mínimo global en* A*. El máximo global se alcanza en el punto* $P = (a, b)$ *donde la recta* $3x + 4y = C$ *es tangente a la gráfica de la función* $y(x)$ *definida implíciticamente por* $x^2+y^2 = 9$*. En dicho punto tenemos que* $2x+2yy' = 0$*. Es decir,* $a+by'(a) = 0$ *Por otro lado, la pendiente de la recta* $3x + 4y = C$ *es* $m = -3/4$*. Por lo tanto,* $y'(a) = -3/4$ *y tenemos que* $a - 3b/4 = 0$*,* $b = \frac{4a}{3}$*. Por otra parte,* $9 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{16a^2}{9} = \frac{25a^2}{9}$*. Como* $a > 0$*, obtenemos* $a = \frac{9}{5}$*,* $b = \frac{12}{5}$*. El valor mínimo de* f *se alcanza en el punto* $P = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ *y* $f\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) = 15$*.*

(3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + z^2 + 3 &= 0 \\ y^2 + xz &= 4 \end{aligned}$$

(a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$.
Solución: *Observamos que* $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$ *es una solución del sistema de ecuacións. Las funciones* $f_1(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 + 3$ *and* $f_2(x, y, z) = y^2 + xz - 4$ *son de clase* C^∞. *Calculamos*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(-1,2,0)} = \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 2y & x \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(-1,2,0)} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ *y* $z(x)$ *en un entornno del punto* $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$.

(b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = -1$.
Solución: *Derivando implícitamente con respecto de* x,

$$\begin{aligned} 2x + 2y(x) + 2xy'(x) + 2z(x)z'(x) &= 0 \\ z(x) + 2y(x)y'(x) + xz'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Introducimos los valores $x = -1$, $y(-1) = 2$, $z(1) = 0$ *para obtener el siguiente sistema*

$$\begin{aligned} 2 - 2y'(-1) &= 0 \\ 4y'(-1) - z'(-1) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$y'(-1) = 1, \quad z'(-1) = 4$$

(c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$.
Solución: *El polinomio de Taylor de orden 1 de la función* $z(x)$ *en el punto* x_0 *es*

$$P_1(x) = z(-1) + +z'(-1)(x - x_0)$$

Esto es,

$$P_1(x) = 0 + 4(x + 1) = 4x + 4$$

El polinomio de Taylor de orden 1 de la función $y(x)$ *en el punto* x_0 *es*

$$Q_1(x) = y(-1) + +y'(-1)(x - x_0)$$

Esto es,

$$Q_1(x) = 2 + (x + 1) = x + 3$$

(4) Clasifique la forma cuadrática $Q(x, y, z) = axz + x^2 + 4xy + 5y^2 + 6yz + 2z^2$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(20 puntos)**

Solución: *La matriz asociada es*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ 4 & 10 & 6 \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideramos $2A$. *Tenemos* $D_1 = 2 > 0$ *por lo que sólo puede ser definida positiva o semidefinida positiva.* $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4 > 0$ *y* $D_3 = |A| = -10a^2 + 48a - 56$. *Como las raíces de* $-10a^2 + 48a - 56$ *son* 2 *y* $\frac{14}{5}$, *la forma cuadrática es definida positiva para* $2 < a < \frac{14}{5}$ *y semidefinida positiva para* $a = 2$ *y* $a = \frac{14}{5}$.

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x,y,z) = x^3 + y + z^2$$

en el conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, \quad x + y = 2\}$$

(a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.
Solución: *El Lagrangiano es*

$$L(x,y) = x^3 - \lambda\left(4 - x^2 - y^2 - 2z^2\right) - \mu(2 - x - y) + y + z^2$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \mu + 3x^2 + 2\lambda x &= 0 \\ \mu + 2\lambda y + 1 &= 0 \\ 4\lambda z + 2z &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 &= 4 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

(b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.
Solución: *De la última ecuación obtenemos $y = 2 - x$. La tercera ecuación puede reescribirse como $2z(1+2\lambda) = 0$. Obtenemos que o bien $z = 0$ o bien $\lambda = \frac{1}{2}$.*
Sustituyendo $z = 0$, $y = 2 - x$ en la cuarta ecuación obtenemos $x^2 - 2x = 0$. Por lo tanto, $x = 0$ o $x = 2$. Tenemos las soluciones

$$x = 0, y = 2, z = 0, \lambda = \frac{1}{4}, \mu = 0$$

y

$$x = 2, y = 0, z = 0, \lambda = -\frac{11}{4}, \mu = -1$$

Sustituyendo $y = 2 - x$, $\lambda = \frac{1}{2}$ en las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$\mu + 3x^2 - x = 0, \quad \mu + x - 1 = 0$$

Por lo tanto, $3x^2 - x = x - 1$. Es decir, $3x^2 - 2x + 1 = 0$. Pero esta ecuación no tiene soluciones reales.

(c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S.
Solución: *La matriz hessiana asociada a la función lagrangiana es*

$$HL(x,y,z;\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 2\lambda + 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$HL\left(0,2,0;-\frac{1}{4},0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. La forma cuadrática asociada es

$$Q(x,y,z) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2$$

Calculamos el espacio tangente $T_{(0,2,0)}S$. Sea $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$, $g_2(x,y,z) = x + y - 2$. Tenemos, $\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$, $\nabla g_1(0,2,0) = (0,4,0)$, $\nabla g_2(x,y,z) = \nabla g_1(0,2,0) = (1,1,0)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_{(0,2,0)}S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0,4,0)\cdot(x,y,z) = 0, (1,1,0)\cdot(x,y,z) = 0 \quad \} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y = 0\} = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Substituyendo $x = 0$, $y = 0$ *en* $Q(x, y, z)$, *obtenemos* $\bar{Q}(y) = Q(0, 0, z) = 2z^2 > 0$ *si* $z \neq 0$. *Por lo tanto,* $\bar{Q}(z)$ *es definida positiva y el punto crítico condicionado* $(0, 2, 0)$ *corresponde a un mínimo local de* f *en* S. *Por otra parte,*

$$HL\left(2, 0, 0; -\frac{11}{4}, -1\right) = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. La forma cuadrática asociada es

$$Q(x, y, z) = \frac{13}{2}x^2 - \frac{11}{2}y^2 - 9z^2$$

Además, $\nabla g_1(2, 0, 0) = (4, 0, 0)$, $\nabla g_1(0, 2, 0) = (1, 1, 0)$. *Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} T_{(2,0,0)}S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (4, 0, 0) \cdot (x, y, z) = 0, (1, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \quad \} \\ &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Substituyendo $x = 0$, $y = 0$ *en* $Q(x, y, z)$, *obtenemos* $\bar{Q}(y) = Q(0, 0, z) = -9z^2 > 0$ *si* $z \neq 0$. *Por lo tanto,* $\bar{Q}(z)$ *es definida negativa y el punto crítico condicionado* $(2, 0, 0)$ *corresponde a un máximo local de* f *en* S.

(d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S?
Solución: *El conjunto* S *es compacto porque* $x^2 \leq 4$, $y^2 \leq 4$, $z^2 \leq 2$ *en* S. *Se puede aplicar el teorema de Weierstrass y la función* f *alcanza un máximo global en* $(2, 0, 0)$ *y un mínimo global en* $(0, 2, 0)$ *en* S. *Los valores son* $f(2, 0, 0) = 8$ *y* $f(0, 2, 0) = 2$.