uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Ejemplo de examen con solución

Mayo 2023

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 19 de mayo de 2023.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + ay + 2z & = & a \\ 2x + ay - z & = & 2 \\ ax + 2z & = & a \end{array}\right.$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de a.

Solución: *La matriz ampliada asociada al sistema es*

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Hacemos las operaciones siguientes

$$\textit{fila 2} \mapsto \textit{fila 2} + 2 \times \textit{fila 1}$$

$$\textit{fila 3} \mapsto \textit{fila 3} + a \times \textit{fila 1}$$

Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 0 & 3a & 3 & 2+2a \\ 0 & a^2 & 2+2a & a+a^2 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos fila 3 $\mapsto$ *fila 3* $- \frac{a}{3}$*fila 2 y obtenemos*

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 0 & 3a & 3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & a+2 & \frac{1}{3}a(a+1) \end{pmatrix}$$

Así vemos que

(i) *si* $a \notin \{-2, 0\}$, *entonces el* $\operatorname{rango} A = 3 = \operatorname{rango}(A|b) = 3$. *El sistema es compatible determinado.*

(ii) *Si* $a = 0$, *entonces la el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que $\operatorname{rango} A = 2 < \operatorname{rango}(A|b) = 3$. *Por lo tanto el sistema es incompatible.*

(iii) *Finalmente, si* $a = -2$, *entonces el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

con $\operatorname{rango} A = 2 < \operatorname{rango}(A|b) = 3$ *y por lo tanto el sistema también es incompatible.*

(b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a para los que el sistema sea compatible.

Solución: *El sistema es compatible determinado si* $a \notin \{-2, 0\}$. *En este caso la solución es*

$$x = \frac{4+a}{3(a+2)}, \quad y = \frac{(a+1)(a+4)}{3a(a+2)}, \quad z = \frac{a(a+1)}{3(a+2)}$$

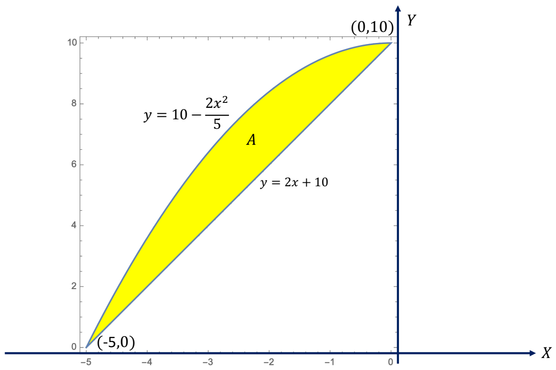
(2) Considere el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 10 \leq y \leq 10 - \frac{2x^2}{5}\}$$

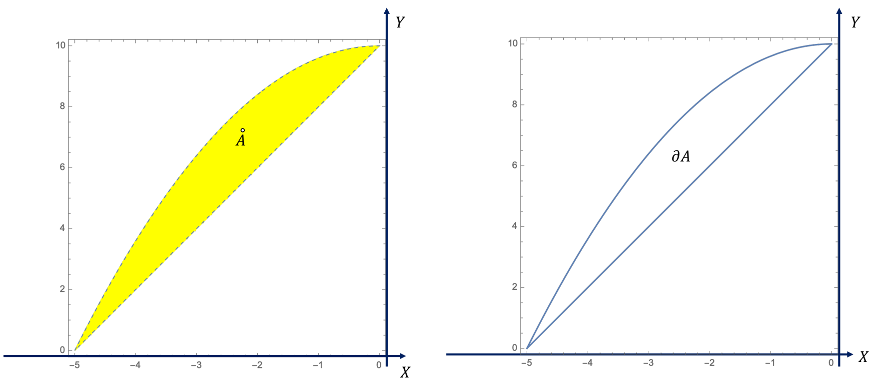
y la función

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.
Solución: *El conjunto A es aproximadamente como en el siguiente gráfico.*



El interior y la frontera del conjunto son



El conjunto A cerrado porque $\partial A \subset A$. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado. Por lo tanto, el conjunto A es compacto. Es convexo porque el conjunto A es la intersección de dos conjuntos convexos $A = B \cap C$ con $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 10 \leq y\}$ y $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 10 - \frac{2x^2}{5}\}$. El conjunto B es convexo porque es un semiplano. El conjunto C es convexo porque la función $g(x) = 10 - \frac{2x^2}{5}$ es cóncava. Puesto que A es la intersección de dos conjuntos convexos, es también un conjunto convexo.

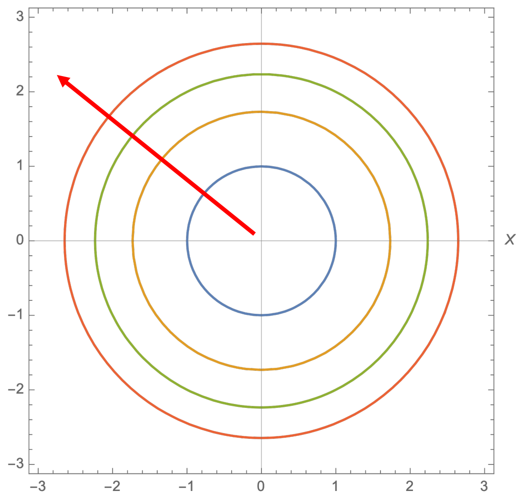
(b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A.
Solución: *El conjunto A es compacto. La función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, la función f es continua en todos los puntos de A. El teorema de Weierstrass se cumple y la función alcanza su máximo y su mínimo global sobre el conjunto A.*

(c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f, indicando la dirección de crecimiento de la función.

Solución: *Para $D \geq 0$, las curvas de nivel $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = D$ son círculos*

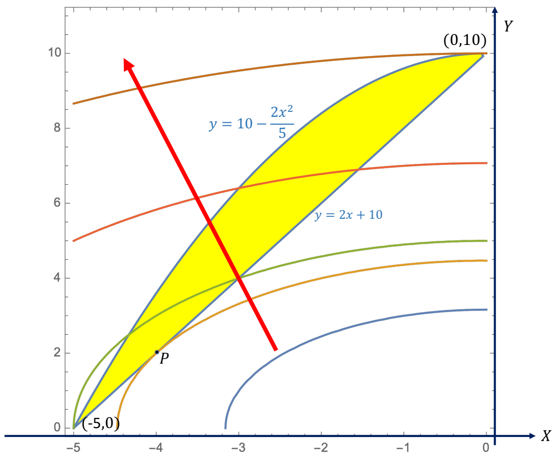
$$x^2 + y^2 = D^2 = C$$

Gráficamente,



En la figura se representan las curvas de nivel en varios colores. La flecha roja representa la dirección de crecimiento de la función f.

(d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A.
Solución: *Gráficamente,*



vemos que el máximo valor de la función se alcanza en el punto $(0,10)$ y su máximo valor es $f(0,10) = 10$.
El mínimo global se alcanza en el punto $P = (a,b)$ donde la recta $y = 2x+10$ es tangente a la gráfica de la función $y(x)$ definida implícitamente por $x^2+y^2 = C$. En dicho punto tenemos que $2x + 2yy' = 0$. Es decir, $a + by'(a) = 0$ Por otro lado, la pendiente de la recta $y = 2x+10$ es $m = 2$. Por lo tanto, $y'(a) = 2$ y tenemos que $a + 2b = 0$, $b = 2a + 10$. Por lo tanto, $a = -4$, $b = 2$. El valor mínimo de f se alcanza en el punto $P = (-4,2)$ y $f(-4,2) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

(3) Considere la función $f(x,y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3}$.

(a) **(10 puntos)** Determine los puntos críticos de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$.
Sugerencia: $\sqrt{784} = 28$.
Solución: *El vector gradiente de la función f es*

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(15x^2 - 2y - 1, -2x + 6y - \frac{4}{3}\right)$$

Las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 15x^2 - 2y - 1 &= 0 \\ -2x + 6y - \frac{4}{3} &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ *y* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(b) **(20 puntos)** Clasifique los puntos críticos calculados en el apartado anterior en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla.
Solución: *La matriz hessiana es*

$$\mathrm{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 30x & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de la matriz hessiana en los distintos puntos críticos

$$\mathrm{H}\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{26}{3} & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

- *Para el punto* $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ *tenemos que* $D_1 = -\frac{26}{3} < 0$, $D_2 = -56 < 0$. *La forma cuadrática es indefinida. Por lo tanto,* $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ *es un punto de silla.*
- *Para el punto* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *tenemos que* $D_1 = 10 > 0$, $D_2 = 56 > 0$. *La forma cuadrática es definida positiva. Por lo tanto,* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *corresponde a un mínimo local estricto.*

Por otro lado podemos observar que $f(x,0) = 5x^3 - x$. *Entonces,* $\lim_{x\to\infty} f(0,x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$. *No existen extremos globales.*

(c) **(10 puntos)** Determine el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es convexa.
Solución: *Necesitamos encontrar el mayor conjunto de puntos abierto y convexo en* $\mathbb{R}^2$ *donde la matriz hessiana sea definida o semidefinida positiva para todos sus puntos. Esto ocurre cuando* $D_1 = 30x > 0$ *y* $D_2 = 180x - 4 > 0$ *luego la solución es* $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{45}\right\}$.

(d) **(10 puntos)** Determine todas las soluciones locales y globales del problema siguiente

$$\begin{array}{ll} \max / \min & f(x,y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3} \\ \text{en el conjunto} & A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{4}\right\} \end{array}$$

Solución: *Por lo visto en la parte (a) los puntos críticos son* $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ *y* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *Sólamente el punto* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *satisface la restricción* $x > \frac{1}{4}$. *También hemos visto que la función f es convexa en el conjunto de puntos* $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{45}\right\}$ *y como se cumple que*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{4}\right\} \subset S$$

vemos que la función también es convexa en el conjunto A. Podemos concluir diciendo que el punto crítico $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *corresponde a un mínimo global del problema.*

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^3 + 5xy + z^2 &= 2 \\ xz + 2yz &= -1 \end{aligned}$$

(a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.
Solución: *Observamos que* $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$ *es una solución del sistema de ecuaciónes. Las funciones* $f_1(x, y, z) = x^3 + 5xy + z^2$ *y* $f_2(x, y, z) = xz + 2yz$ *son de clase* C^∞*. Calculamos*

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array} \right|_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \left| \begin{array}{cc} 5x & 2z \\ 2z & x + 2y \end{array} \right|_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \left| \begin{array}{cc} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ *y* $z(x)$ *en un entornno del punto* $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$*.*

(b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = 1$.
Solución: *Derivando implícitamente con respecto de* x*,*

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5xy'(x) + 5y(x) + 2z(x)z'(x) &= 0 \\ 2z(x)y'(x) + 2y(x)z'(x) + xz'(x) + z(x) &= 0 \end{aligned}$$

Introducimos los valores $x = 1$, $y(1) = 0$, $z(1) = -1$ *para obtener el siguiente sistema*

$$\begin{aligned} 5y'(1) - 2z'(1) + 3 &= 0 \\ -2y'(1) + z'(1) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$y'(1) = -1, \quad z'(1) = -1$$

(c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$.
Solución: *El polinomio de Taylor de orden 1 de la función* $y(x)$ *en el punto* x_0 *es*

$$Q_1(x) = y(1) + y'(1)(x - x_0)$$

Esto es,

$$Q_1(x) = 0 - (x - 1) = 1 - x$$

El polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x)$ *en el punto* x_0 *es*

$$P_1(x) = z(1) + z'(1)(x - x_0)$$

Esto es,

$$P_1(x) = -1 - (x - 1) = -x$$

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x,y) = x^3 - x + y^2 + 2$$

en el conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 4x + 2y^2 = 0\}$$

(a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.
Solución: *El Lagrangiano es*

$$L(x,y) = x^3 - x + y^2 + 2 + \lambda\left(2x^2 - 4x + 2y^2\right)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 3x^2 + \lambda(4x-4) - 1 &= 0 \\ 4\lambda y + 2y &= 0 \\ 2x^2 - 4x + 2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.
Solución: *De la segunda ecuación obtenemos* $(2\lambda+1)y = 0$. *Por lo que que o bien* $y = 0$ *o bien* $\lambda = -\frac{1}{2}$. *Sustituyendo* $y = 0$ *en la tercera ecuación obtenemos* $x^2 = 2x$. *Por lo tanto,* $x = 0$ *o* $x = 2$. *Tenemos las soluciones*

$$x = 0, y = 0, \lambda = -\frac{1}{4}$$

y

$$x = 2, y = 0, \lambda = -\frac{11}{4}$$

Sustituyendo $\lambda = -\frac{1}{2}$ *en la primera ecuación obtenemos* $3x^2 - 2x + 1 = 0$. *Pero esta ecuación no tiene soluciones reales.*

(c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S.
Solución: *La matriz hessiana asociada a la función lagrangiana es*

$$HL(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 4\lambda + 6x & 0 \\ 0 & 4\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$HL\left(0,0;-\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. La forma cuadrática asociada es $Q(x,y,z) = -x^2 + y^2$. *Calculamos el espacio tangente* $T_{(0,0)}S$. *Sea* $g_1(x,y) = 2x^2 - 4x + 2y^2$. *Tenemos,* $\nabla g_1(x,y) = (4x-4, 4y)$, $\nabla g_1(0,0) = (-4,0)$. *Por lo tanto,*

$$T_{(0,0)}S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-4,0)\cdot(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$$

Substituyendo $x = 0$ *en* $Q(x,y)$, *obtenemos* $\bar{Q}(y) = Q(0,y) = y^2 > 0$ *si* $y \neq 0$. *Por lo tanto,* $\bar{Q}(y)$ *es definida positiva y el punto crítico condicionado* $(0,0)$ *corresponde a un mínimo local de* f *en* S. *Por otra parte,*

$$HL\left(2,0;-\frac{11}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. La forma cuadrática asociada es $Q(x,y) = x^2 - 9y^2$. *Además,* $\nabla g_1(2,0) = (4,0)$, *Por lo tanto,*

$$T_{(2,0)}S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (4,0)\cdot(x,y) = 0\} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$$

Substituyendo $x = 0$, *en* $Q(x,y)$, *obtenemos* $\bar{Q}(y) = Q(0,y) = -9y^2 < 0$ *si* $y \neq 0$. *Por lo tanto,* $\bar{Q}(z)$ *es definida negativa y el punto crítico condicionado* $(2,0)$ *corresponde a un máximo local de* f *en* S.

(d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S?

Solución: *La restricción* $2x^2 - 4x + 2y^2 = 0$ *puede escribirse como* $x^2 + (2-x)^2 + 2y^2 = 4$. *El conjunto* S *es compacto porque* $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$ *en* S. *Se puede aplicar el teorema de Weierstrass y la función* f *alcanza un máximo global en* $(2,0)$ *y un mínimo global en* $(0,0)$ *en* S. *Los valores son* $f(2,0) = 8$ *y* $f(0,0) = 2$.

Otra manera de probar que el conjunto S *es compacto: El valor máximo de la función* $4x - 2x^2$ *es* 2. *Por lo tanto, en* S: $2y^2 = 4x - 2x^2 \leq 2$. *Y vemos que* $-1 \leq y \leq 1$. *Pero, ahora tenemos que, en* S, *la función* $2y^2 = 4x - 2x^2$ *toma valores entre* 0 *y* 2. *Por lo tanto* $0 \leq x \leq 2$. *La gráfica de la función* $4x - 2x^2$ *ayuda.*