

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Ejemplo de examen

Mayo 2023



- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax + 2z = a \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

- (a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de a .
 (b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a para los que el sistema sea compatible.
 (2) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 10 \leq y \leq 10 - \frac{2x^2}{5}\}$$

y la función

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- (a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A , su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.
 (b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A .
 (c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f , indicando la dirección de crecimiento de la función.
 (d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f , determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A .
 (3) Considere la función $f(x, y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3}$.
 (a) **(10 puntos)** Determine los puntos críticos de la función f en el conjunto \mathbb{R}^2 .
Sugerencia: $\sqrt{784} = 28$.
 (b) **(20 puntos)** Clasifique los puntos críticos calculados en el apartado anterior en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla.
 (c) **(10 puntos)** Determine el mayor subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 donde la función f es convexa.
 (d) **(10 puntos)** Determine todas las soluciones locales y globales del problema siguiente

$$\begin{array}{ll} \max / \min & f(x, y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3} \\ \text{en el conjunto} & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{4}\} \end{array}$$

- (4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^3 + 5xy + z^2 &= 2 \\ xz + 2yz &= -1 \end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.
 (b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = 1$.

- (c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$.

- (5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = x^3 - x + y^2 + 2$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 4x + 2y^2 = 0\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.

- (b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.
- (c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S .
- (d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S ?