Ingeniería de Control II

Tema 1:
Transformada Z de sistemas en tiempo discreto

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido

2025

Ejercicio 1

Calcular la transformada z unilateral de la función rampa unitaria:

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Tener en cuenta que la función se puede reescribir teniendo en cuenta el periodo de muestreo: $x(kT) = kT, \;\; k = 0, 1, 2 ...$

Solución:

Aplicando la definición de la transformada y la fórmula que permite obtener el sumatorio de la serie resultante, la transformada sería:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$X(z) = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + ...)$$

$$X(z) = T\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

Ejercicio 2

Calcular la transformada z de la función sinusoidal:

$$x(t) = \begin{cases} \sin wt, & t \geq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Solución:

Teniendo en cuenta que $e^{jwt} = \cos wt + j \sin wt$ y $e^{-jwt} = \cos wt - j \sin wt$, tenemos:

- $\sin wt = \frac{1}{2j}(e^{jwt} - e^{-jwt})$
- $\cos wt = \frac{1}{2}(e^{jwt} + e^{-jwt})$

La transformada z de la función exponencial la conocemos:

$$f(k) = e^{-\alpha k}, \quad k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

La función sinusoidal se puede reescribir como resta de exponenciales, luego la transformada buscada será:

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{jwT}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-jwT}z^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{(e^{jwT} - e^{-jwT})z^{-1}}{1 - (e^{jwT} + e^{-jwT})z^{-1} + z^{-2}}$$

Entonces:

$$X(z) = \frac{z^{-1}\sin wT}{1 - 2z^{-1}\cos wT + z^{-2}} = \frac{z \sin wT}{z^2 - 2z\cos wT + 1}$$

Ejercicio 3

Calcular la transformada z de la función:

$$f(k) = \begin{cases} a^{k-1}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

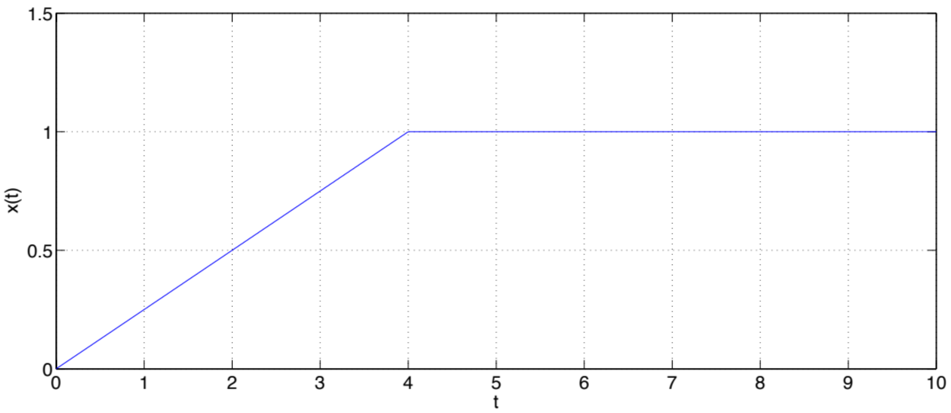
Solución:

Para resolver este problema hay que usar la propiedad de traslación real o temporal: $Z\left[f(k-n)\right] = z^{-n}F(z)$
Como el retardo en este caso es de una unidad: $Z\left[f(k-1)\right] = z^{-1}F(z)$
La transformada z de la función la conocemos: $Z\left[a^k\right] = \frac{1}{1-az^{-1}}$
Por lo tanto:

$$Z\left[f(k)\right] = Z\left[a^{k-1}\right] = z^{-1}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

Ejercicio 4

Obtener la transformada z de la curva mostrada en la figura suponiendo que el tiempo de muestreo T es 1 sg.



Solución:

De la figura obtenemos:

$$x\,(0) = 0, \;\; x\,(1) = 0,5 \;\; x\,(2) = 0,5$$
$$x\,(3) = 0,75 \;\; x\,(k) = 1, k = 4, 5, 6 \ldots$$

La transformada z de $x(k)$ será:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 0{,}25z^{-1} + 0{,}50z^{-2} + 0{,}75z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \ldots$$

$$X(z) = 0{,}25(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}) + z^{-4}\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}{4(1 - z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}{4(1 - z^{-1})}\frac{(1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})} = \frac{z^{-1}(1 - z^{-4})}{4(1 - z^{-1})^2}$$

Otra forma de calcularlo sería a partir de la expresión de la curva:

$$x(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}(t - 4)u(t - 4)$$

Donde $u(t-4)$ es un escalón unitario que ocurre cuando $t = 4$. Como conocemos el tiempo de muestreo la transformada z puede ser calculada de la forma siguiente:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z\left[\frac{1}{4}t\right] - Z\left[\frac{1}{4}(t - 4)u(t - 4)\right]$$

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{4}\frac{z^{-4}z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z^{-1}(1 - z^{-4})}{4(1 - z^{-1})^2}$$

Ejercicio 5

La función $y(k)$ está compuesta por una suma de funciones $x(h)$, en donde $h = 1, 2, 3, ..., k$, de tal forma que:

$$y(k) = \sum_{h=0}^{k} x(h) \quad k = 0, 1, 2, ...$$

donde $y(k) = 0$ para $k < 0$. Obtener la transformada z de $y(k)$.

Solución:

Si descomponemos la expresión:

$$y(k) = x(0) + x(1) + x(2) + ... + x(k-1) + x(k)$$
$$y(k-1) = x(0) + x(1) + x(2) + ... + x(k-1)$$

Restando: $y(k) - y(k-1) = x(k), \quad k = 0, 1, 2, ...$
Transformando en z: $Z\left[y(k) - y(k-1)\right] = Z\left[x(k)\right]$
Utilizando la traslación real o temporal, la expresión anterior queda:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z)$$

Finalmente, la transformada queda:
$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$, donde $X(z) = Z\left[x(k)\right]$

Ejercicio 6

Dadas las transformadas z de $\sin wt$ y $\cos wt$, obtener la transformada z de $e^{-\alpha t}\sin wt$ y $e^{-\alpha t}\cos wt$ usando el teorema de la translación compleja.

Solución:

Teniendo en cuenta que $Z\left[\sin wt\right] = \frac{z^{-1}\sin wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}$, substituimos z por $ze^{\alpha T}$ para obtener la transformada z:

$$Z\left[e^{-\alpha t}\sin wt\right] = \frac{e^{-\alpha T}z^{-1}\sin wT}{1-2e^{-\alpha T}z^{-1}\cos wT + e^{-2\alpha T}z^{-2}}$$

Teniendo en cuenta que $Z\left[\cos wt\right] = \frac{1-z^{-1}\cos wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}$, substituimos z por $ze^{\alpha T}$ para obtener la transformada z:

$$Z\left[e^{-\alpha t}\cos wt\right] = \frac{1-e^{-\alpha T}z^{-1}\cos wT}{1-2e^{-\alpha T}z^{-1}\cos wT + e^{-2\alpha T}z^{-2}}$$

Ejercicio 7

Determinar el valor final $x(\infty)$ utilizando el teorema del valor final:

$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}},\ a > 0$

Solución:

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})X(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(1 - \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right) = 1$$

Nota: Como $X(z)$ es realmente la transformada de $x(t) = 1 - e^{-at}$, se puede calcular a partir de esta expresión:

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-at}\right) = 1$$

Ejercicio 8

Encontrar $x(k)$ **para** $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ **cuando:**

$$X(z) = \frac{10z + 5}{(z-1)(z-0{,}2)}$$

Solución:

Primero reescribimos la expresión para tenerla como polinomio en z^{-1}:

$$X(z) = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1{,}2z^{-1} + 0{,}2z^{-2}}$$

Para resolver este problema vamos a utilizar el método de la división directa, obteniendo la transformada inversa de z mediante la expansión de $X(z)$ en serie en potencias de z^{-1}. Este método es útil cuando es difícil obtener la expresión en forma cerrada o sólo se necesitan los primeros términos de $x(k)$.

Se expande $X(z)$ para aprovechar la definición de la transformada z:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \ldots + x(kT)z^{-k} + \ldots$$

Dividiendo sucesivamente, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}} &= 10z^{-1} + \frac{17z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}} \\
&= 10z^{-1} + 17z^{-2} + \frac{18,4z^{-3} - 3,4z^{-4}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}} \\
&= 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18,4z^{-3} + \frac{18,68z^{-4} - 3,68z^{-5}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $X(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18{,}4z^{-3} + 18{,}68z^{-4} + \ldots$

Comparando este resultado con la expansión se obtienen los primeros términos de la serie:

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 10, \quad x(2) = 17, \quad x(3) = 18{,}4, \quad x(4) = 18{,}68$$

Obtener la transformada inversa de z para la siguiente expresión mediante expansión en fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{z^2 + z + 2}{(z-1)(z^2 - z + 1)}$$

Solución:

Primero se expande $X(z)$ en fracciones parciales y se obtienen los coeficientes por igualación:

$$X(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz + C}{z^2 - z + 1} = \frac{(A+B)z^2 + (-A - B + C)z + (A - C)}{(z-1)(z^2 - z + 1)}$$

Igualando con la ecuación del enunciado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} A + B = 1 \\ -A - B + C = 1 \\ A - C = 2 \end{array}\right\}$$

Resolviendo:

$$A = 4, \quad B = -3, \quad C = 2$$

$$X(z) = \frac{4}{z-1} + \frac{-3z + 2}{z^2 - z + 1} = \frac{4z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{-3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

Hay que tener en cuenta que los polos del término cuadrático son complejos conjugados, luego la expresión anterior se puede reescribir como:

$$X(z) = \frac{4z^{-1}}{1 - z^{-1}} - 3\left(\frac{z^{-1} - 0{,}5z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right) + \frac{0{,}5z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

$$X(z) = 4z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}} - 3z^{-1}\left(\frac{1 - 0{,}5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right) + z^{-1}\frac{0{,}5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

Sabemos que:

$$Z\left[e^{-\alpha t}\sin wt\right] = \frac{e^{-\alpha T}z^{-1}\sin wT}{1 - 2e^{-\alpha T}z^{-1}\cos wT + e^{-2\alpha T}z^{-2}}$$

$$Z\left[e^{-\alpha t}\cos wt\right] = \frac{1 - e^{-\alpha T}z^{-1}\cos wT}{1 - 2e^{-\alpha T}z^{-1}\cos wT + e^{-2\alpha T}z^{-2}}$$

Ejercicio 9 (2/2)

Se puede identificar $e^{-2\alpha T} = 1$ y $\cos wT = 0{,}5$ en este caso, luego tenemos $wT = \pi/3$ y $\sin wT = \sqrt{3}/2$. Por lo tanto:

$$Z^{-1}\left[\frac{1-0{,}5z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}\right] = 1^k \cos\frac{k\pi}{3}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{0{,}5z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}\right] = Z^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(\sqrt{3}/2)z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}1^k \sin\frac{k\pi}{3}$$

Finalmente:

$$x(k) = 4(1^{k-1}) - 3(1^{k-1})\cos\frac{(k-1)\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1^{k-1})\sin\frac{(k-1)\pi}{3}$$

Reescribiendo:

$$x(k) = \begin{cases} 4 - 3\cos\frac{(k-1)\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{(k-1)\pi}{3}, & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

Una solución alternativa sería:

$$X(z) = 4z^{-1}\frac{4}{1-z^{-1}} - 3\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}\right) + 2z^{-1}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

Como:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right] = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}(1^k)\sin\frac{k\pi}{3}$$

La solución será:

$$x(k) = \begin{cases} 4 - 2\sqrt{3}\sin\frac{k\pi}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{(k-1)\pi}{3}, & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

Aunque esta solución pueda parecer diferente de la obtenida anteriormente, ambas soluciones son correctas y tienen los mismos valores de $x(k)$.

Ejercicio 10

Obtener la transformada inversa de z para la siguiente expresión mediante expansión en fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2}$$

Solución:

Primero se expande $X(z)$ en fracciones parciales y se obtienen los coeficientes por igualación:

$$X(z) = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} = \frac{Az^2 + B(z-2) + Cz(z-2)}{(z-2)z^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} A + C = 0 \\ B - 2C = 1 \\ -2B = 2 \end{array}\right\}$$

Resolviendo:

$$A = 1,\;\; B = -1,\;\; C = -1$$

$$X(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} - z^{-2} - z^{-1}$$

Hay que tener en cuenta que $X(z)$ tiene un polo doble en $z = 0$, luego la expansión debe incluir los términos $1/z^2$ y $1/z$. Las transformadas inversas de todos los términos son conocidas:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right] = \begin{cases} 2^{k-1}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

$$Z^{-1}\left[z^{-2}\right] = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

$$Z^{-1}\left[z^{-1}\right] = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la transformada inversa de z para $X(z)$ es igual a:

$$x(k) = \begin{cases} 0 - 0 - 0 = 0, & k = 0 \\ 1 - 0 - 1 = 0, & k = 1 \\ 2 - 1 - 0 = 1, & k = 2 \\ 2^{k-1} - 0 - 0 = 2^{k-1}, & k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1 \\ 1, & k = 2 \\ 2^{k-1}, & k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

Obtener la transformada inversa de z para la siguiente expresión mediante división directa y mediante expansión en fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{z(z+2)}{(z-1)^2}$$

Solución:

División directa: reescribimos la expresión para que el término mayor sea de grado cero:

$$X(z) = \frac{z(z+2)}{(z-1)^2} = \frac{z^2+2z}{z^2-2z+1} = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

Dividiendo se van obteniendo los valores de x(k):

$$\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = 1 + \frac{4z^{-1}-z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}, \qquad X(z) = 1 + \frac{4z^{-1}-z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\frac{4z^{-1}-z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = 4z^{-1} + \frac{7z^{-2}-4z^{-3}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}, \qquad X(z) = 1 + 4z^{-1} + \frac{7z^{-2}-4z^{-3}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\frac{7z^{-2}-4z^{-3}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = 7z^{-2} + \frac{10z^{-3}-7z^{-4}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}, \qquad X(z) = 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + \frac{10z^{-3}-7z^{-4}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\frac{10z^{-3}-7z^{-4}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = 10z^{-3} + \frac{13z^{-4}-10z^{-5}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}, \qquad X(z) = 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + 10z^{-3} + \frac{13z^{-4}-10z^{-5}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

El resultado será: $X(z) = 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + 10z^{-3} + \ldots$
Los primeros términos de $x(k)$ son:
$x(0) = 1,\ \ x(1) = 4,\ \ x(2) = 7,\ \ x(3) = 10,\ \ \ldots$

Expansión en fracciones parciales:
Como el grado del numerador es igual al del denominador, podemos utilizar la primera división de las efectuadas anteriormente:

$$X(z) = 1 + \frac{4z^{-1}-z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = 1 + \frac{4z-1}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = 1 + \frac{4z-1}{(z-1)^2} = 1 + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2} = \frac{B(z-1)+C}{(z-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} B = 4 \\ C - B = -1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo:

$$B = 4, \;\; C = 3$$

$$X(z) = 1 + \frac{4z-1}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{3z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$$

Las transformadas inversas de todas las fracciones son conocidas:

$$Z^{-1}\left[1\right] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$Z^{-1}\left[\tfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right] = k, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right] = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

La solución en este caso será:

$$x(0) = 1 \;\; x(k) = 4 + 3(k-1) = 3k + 1, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Esta ecuación puede ser reescrita de forma:

$$x(k) = 3k + 1, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

También se puede resolver expandiendo a partir del método de los residuos:

$$X(z) = 1 + \frac{4z-1}{(z-1)^2} = 1 + H(z)$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{(z-1)^2} + \frac{A_2}{z-1}$$

$$A_0 = \left[z\frac{H(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=0} = -1$$

$$A_1 = \left[(z-1)^2\frac{H(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=1} = \left[\frac{4z-1}{z}\right]\Bigg|_{z=1} = 3$$

$$A_2 = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{H(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=1} = \frac{d}{dz}\left[\frac{4z-1}{z}\right]\Bigg|_{z=1} = 1$$

Ejercicio 11 (3/3)

De manera que $H(z)$ se puede escribir como:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-1}{z} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$$

$$H(z) = -1 + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

$$X(z) = 1 + \frac{4z-1}{(z-1)^2} = 1 - 1 + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} = \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

$$X(z) = \frac{3z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right] = k, \;\; k \geq 0, \;\; Z^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = 1, \;\; k \geq 0$$

La transformada inversa del primer componente es una rampa multiplicada por tres, y la del segundo es un escalón, luego la solución es la siguiente:

$$x(k) = 3k + 1, \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

Vemos que esta expresión coincide con el resultado obtenido con la otra expansión.

Ejercicio 12

Resolver la siguiente ecuación en diferencia utilizando el método de la transformada z:

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, \;\; x(0) = 0, \;\; x(1) = 1$$

Solución:

Primero hay que tener en cuenta que:

$$Z\left[x(k+2)\right] = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$$
$$Z\left[x(k+1)\right] = z^1X(z) - zx(0)$$
$$Z\left[x(k)\right] = X(z)$$

Calculando la transformada de la ecuación en diferencia:

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) + 3zX(z) - 3zx(0) + 2X(z) = 0$$

Substituyendo las condiciones dadas y simplificando, llegamos a:

$$X(z) = \frac{z}{z^2+3z+2} = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

Expandiendo en fracciones simples:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z+2}$$

$$A_0 = \left[z\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=0} = 0$$

$$A_1 = \left[(z+1)\tfrac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=-1} = \tfrac{1}{z+2}\big|_{z=-1} = 1$$

$$A_2 = \left[(z+2)\tfrac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=-2} = \tfrac{1}{z+1}\big|_{z=-2} = -1$$

$$X(z) = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} = \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$Z^{-1}\left[\tfrac{1}{1+z^{-1}}\right] = (-1)^k, \;\; Z^{-1}\left[\tfrac{1}{1+2z^{-1}}\right] = (-2)^k$$

La solución será:

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Resolver la siguiente ecuación en diferencias utilizando el método de la transformada z dejando el resultado en función de $x(0)$ y $x(1)$:

$$x(k+2)+(a+b)x(k+1)+abx(k)=0$$

donde a y b son constantes y $k=0,1,2,\ldots$

Solución:

Calculando la transformada de la ecuación en diferencia:

$$[z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)]+(a+b)[zX(z)-zx(0)]+abX(z)=0$$

Reordenando la expresión:

$$[z^2+(a+b)z+ab]X(z)=[z^2+(a+b)z]x(0)+zx(1)$$

$$X(z)=\frac{[z^2+(a+b)z]x(0)+zx(1)}{z^2+(a+b)z+ab}=\frac{[z^2+(a+b)z]x(0)+zx(1)}{(z+a)(z+b)}$$

Como –a y –b son las raíces del polinomio característico, hay que separar dos casos: a) $a\neq b$ y b) $a=b$.

a) $a\neq b$. Expandiendo en fracciones simples:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_0}{z}+\frac{A_1}{z+a}+\frac{A_2}{z+b}$$

$$A_0=\left[z\frac{X(z)}{z}\right]\bigg|_{z=0}=0$$

$$A_1=\left[(z+a)\frac{X(z)}{z}\right]\bigg|_{z=-a}=\frac{[z+a+b]x(0)+x(1)}{z+b}\bigg|_{z=-a}=\frac{bx(0)+x(1)}{b-a}$$

$$A_2=\left[(z+b)\frac{X(z)}{z}\right]\bigg|_{z=-b}=\frac{[z+a+b]x(0)+x(1)}{z+a}\bigg|_{z=-b}=\frac{ax(0)+x(1)}{a-b}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{bx(0)+x(1)}{b-a}\frac{1}{z+a}+\frac{ax(0)+x(1)}{a-b}\frac{1}{z+b},\quad a\neq b$$

$$X(z)=\frac{bx(0)+x(1)}{b-a}\frac{1}{1+az^{-1}}+\frac{ax(0)+x(1)}{a-b}\frac{1}{1+bz^{-1}}$$

La solución será:

$$x(k)=\frac{bx(0)+x(1)}{b-a}(-a)^k+\frac{ax(0)+x(1)}{a-b}(-b)^k \quad a\neq b \quad k=0,1,2,\ldots$$

Ejercicio 13 (2/2)

b) $a = b$. Ahora hay un polo múltiple, luego la expansión se hará de forma distinta:

$$X(z) = \frac{(z^2 + 2az)x(0) + zx(1)}{(z+a)^2}$$
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{(z+a)^2} + \frac{A_2}{z+b}$$

$$A_0 = \left[z\frac{X(z)}{z} \right]\Big|_{z=0} = 0$$

$$A_1 = \left[(z+a)^2 \tfrac{X(z)}{z} \right]\Big|_{z=-a} = (z+2a)x(0) + x(1)|_{z=-a} = ax(0) + x(1)$$
$$A_2 = \tfrac{d}{dz}\left[(z+a)^2 \tfrac{X(z)}{z} \right]\Big|_{z=-a} = \tfrac{d}{dz}\left[(z+2a)x(0) + x(1) \right]\Big|_{z=-a} = x(0)$$

$$X(z) = \frac{zx(0)}{z+a} + \frac{z[ax(0)+x(1)]}{(z+a)^2} = \frac{x(0)}{1+az^{-1}} + \frac{[ax(0)+x(1)]z^{-1}}{(1+az^{-1})^2}$$

La solución será:

$$x(k) = x(0)(-a)^k + [ax(0)+x(1)]k(-a)^{k-1}, \quad a = b \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Ejercicio 14 (1/2)

Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$2x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) = u(k)$$
$$u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

donde $x(k) = 0$ para $k < 0$.

Solución:

Primero hay que calcular la transformada z de la expresión teniendo en cuenta la propiedad de translación real o temporal y la transformada de $u(k)$ ya que es conocida.

$$2X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Despejando $X(z)$ en la expresión anterior:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^3}{(z-1)(2z^2 - 2z + 1)}$$

Esta expresión se puede expandir en fracciones parciales. Los coeficientes se obtendrán por igualación:

$$X(z) = \frac{z^3}{(z-1)(2z^2 - 2z + 1)} = \frac{Az}{(z-1)} + \frac{Bz^2 + Cz}{(2z^2 - 2z + 1)}$$

Se buscan expresiones cuya transformada inversa sea conocida. En este caso hay que tener en cuenta que el numerador es igual a z^3.

$$X(z) = \frac{(2A + B)z^3 + (-2A + C - B)z^2 + (A - C)z}{(z-1)(2z^2 - 2z + 1)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A + B = 1 \\ -2A + C - B = 0 \\ A - B = 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 14 (2/2)

Resolviendo:

$$A = 1, \;\; B = -1, \;\; C = 1$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z^2+z}{2z^2-2z+1} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{-1+z^{-1}}{2-2z^{-1}+z^{-2}}$$

Esta ecuación puede reescribirse de tal forma que queden transformadas inversas conocidas (en este caso hay que buscar las del seno y el coseno):

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{1-0{,}5z^{-1}}{(1-z^{-1}+0{,}5z^{-2})} + \frac{1}{2}\frac{0{,}5z^{-1}}{(1-z^{-1}+0{,}5z^{-2})}$$

Mirando en las tablas las transformadas z del seno y el coseno, se puede identificar $e^{-2\alpha T} = 0{,}5$ y $\cos wT = 1/\sqrt{2}$. Tenemos $wT = \pi/4$, $\sin wT = 1/\sqrt{2}$ y $e^{-\alpha T} = 1/\sqrt{2}$. Por lo tanto:

$$x(k) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha kT}\cos wkT + \frac{1}{2}e^{-\alpha kT}\sin wkT$$

$$x(k) = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cos\tfrac{k\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \sin\tfrac{k\pi}{4}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x(0) = 0{,}5, \;\; x(1) = 1, \;\; x(2) = 1{,}25, \;\; x(3) = 1{,}25, \;\; \ldots$$