

# Ingeniería de Control II

## Tema 2: Obtención de la función de transferencia de un sistema

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,  
L. Moreno, S. Garrido,

2025



- 1 Esquema de un sistema de control en tiempo discreto
- 2 Muestreo y bloqueo
- 3 Obtención de las funciones de transferencia discretas equivalentes
- 4 Teorema de muestreo

# Control en tiempo discreto

## Esquema típico

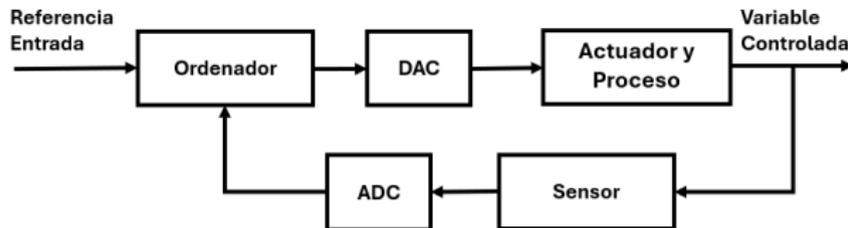


Figura 1: Sistema de control digital.

- Para controlar un sistema físico real o proceso mediante un controlador digital (computador) es necesario tomar medidas del sistema, procesarlas y actuar sobre el sistema.
- Normalmente el proceso o planta y el actuador son analógicos, por lo que hay que pasar de señales continuas a discretas y viceversa.

# Ejemplo

## Control de una turbina de avión

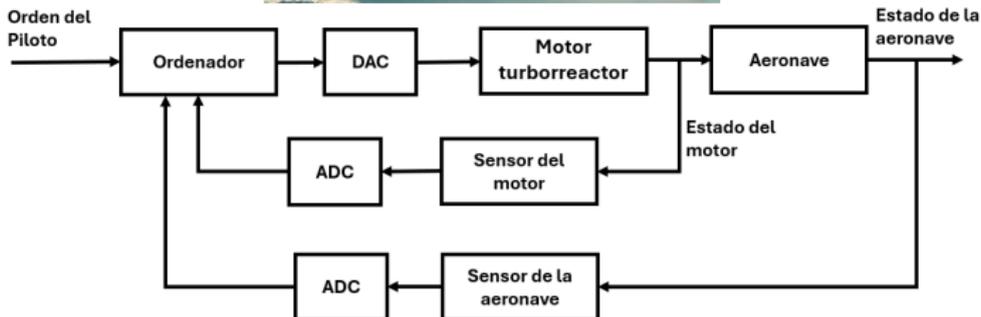


Figura 2: Sistema de control de una turbina de avión.

# Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias aparecen en problemas donde la variable independiente, normalmente el tiempo, sólo puede tomar un número discreto de valores. La ecuación en diferencias no lineal

$$y(k+n) = f[y(k+n-1), y(k+n-2), \dots, y(k+1), y(k), u(k+n), u(k+n-1), \dots, u(k+1), u(k)] \quad (1)$$

se dice que es de orden  $n$  ya que es la diferencia entre los tiempos mayor y menor de los argumentos  $y(\cdot)$  y  $u(\cdot)$ .

Por el momento sólo nos interesaremos en los sistemas lineales, cuya expresión es más sencilla:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + a_{n-2}y(k+n-2) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \quad (2)$$

$$= b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \quad (3)$$

# Muestreadores y bloqueadores

- **Muestreador (Sampling).** El muestreador es un circuito que permite la capturar el valor de una señal analógica en un cierto instante de tiempo.
- **Bloqueador o retenedor (hold).** El bloqueador o retenedor tiene como entrada una señal digital y se encarga de mantener en la salida constante el valor de entrada durante un tiempo específico.
- **Convertor Analógico/Digital (A/D).** Convierte una señal analógica en una señal digital codificada numéricamente.
- **Convertor Digital/Analógico (D/A).** Convierte una señal digital codificada numéricamente en una señal analógica.

# Muestreador

## Modelo del ADC

- Normalmente en los esquemas de control el proceso de muestreo y conversión de la señal analógica en una digital se suele representar mediante el siguiente símbolo que representa a un muestreador ideal:

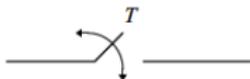


Figura 3: Muestreador.

- Solemos asumir que:
  - Las salidas del ADC son exactamente iguales en magnitud a las entradas (i.e., despreciamos los errores de redondeo).  
**Ganancia unidad.**
  - Los ADC dan las salidas instantáneamente. **No hay retardo.**
  - El muestreo es perfectamente uniforme.
  - Es decir, el ADC es un muestreador ideal con **periodo T**.

# Bloqueador

## De orden cero

- El bloqueador (retenedor) convierte la señal digital en una señal continua. El más simple es el **bloqueador de orden cero** (zero order hold), que mantiene el valor de la señal constante durante el ciclo de muestreo, es decir:

$$\{u(k)\} \rightarrow u(t) = u(k), \quad kT \leq t < (k+1)T, k = 0, 1, 2, \dots$$

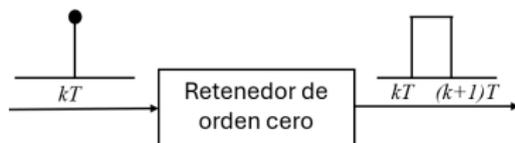


Figura 4: Bloqueador de orden cero.

- Se suele asumir que en el bloqueador (DAC)
  - Las salidas son de exactamente igual magnitud que las entradas. **Ganancia unidad.**
  - Da la salida analógica instantáneamente. **No hay retardo.**
  - Las salidas son constantes durante todo el periodo de muestreo para el BOC. Otros bloqueadores son el first-order hold que construye la señal con rectas y el second-order hold que construye la señal con parábolas.

# Bloqueador: respuesta temporal

- Las respuestas de un bloqueador de orden cero y de orden uno.

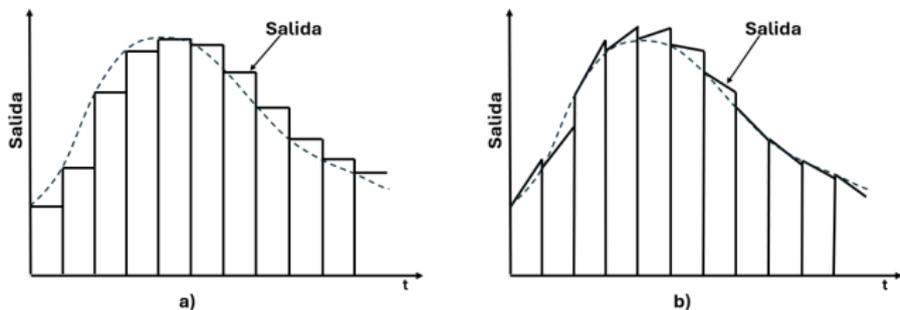


Figura 5: Bloqueadores: a) Bloqueador de orden cero. b) Bloqueador de orden uno.

# Bloqueador

## Función de transferencia

- Si se observa la figura anterior, el bloqueador es básicamente la resta de dos escalones unitarios desfasados en el tiempo un periodo.
- Tomando la transformada de Laplace, obtenemos la función de transferencia del bloqueador de orden cero, es decir:

$$G_{boc} = \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t - T)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

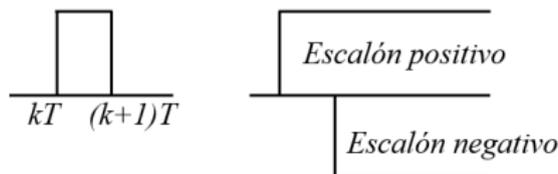


Figura 6: Bloqueador - resta de dos escalones unitarios desfasados.

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

## Funciones de transferencia en serie

- Un sistema de tiempo discreto incluye diferentes subsistemas interconectados que incluyen uno o varios muestreadores. La localización de estos tiene una fuerte influencia en la función de transferencia global.
- Para dos sistemas conectados en serie  $H_1(s)$  y  $H_2(s)$ , la transformada de Laplace de la salida viene expresada por

$$Y(s) = H_2(s)H_1(s)U(s)$$

- Si se hace la transformada inversa, obtenemos la respuesta temporal

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t h_2(t - \tau) \left[ \int_0^\tau h_1(\tau - \lambda) u(\lambda) d\lambda \right] d\tau \\ &= \int_0^t u(t - \tau) \left[ \int_0^\tau h_1(\tau - \lambda) h_2(\lambda) d\lambda \right] d\tau \\ &= \int_0^t u(t - \tau) h_{eq}(\tau) d\tau\end{aligned}\tag{4}$$

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

Cont.

- Si la salida de los bloques situados en cascada es muestreada:

$$y(kT) = \int_0^{kT} u(kT - \tau) h_{eq}(\tau) d\tau, k = 1, 2, \dots$$

- En la salida se produce la convolución de la entrada y las dos respuestas impulsionales, por lo que **no resulta posible separar los efectos de las señales que la generan.**

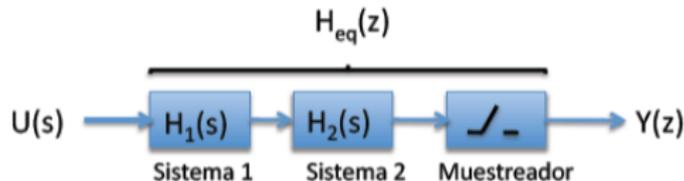


Figura 7: Configuración función de transferencia muestreador.

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

Cont.

- Si uno de los dos bloques es el muestreador, la salida del sistema realiza la convolución de una señal muestreada  $u^*(t)$  con la respuesta impulsional del sistema de tiempo continuo  $H(s)$ .

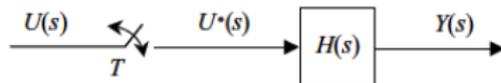


Figura 8: Configuración muestreador función de transferencia.

- La salida es una suma de las respuestas impulsionales del sistema  $h(t)$  desplazada a las posiciones del tren de impulso, con lo que la función temporal resultante es:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t h(t - \tau) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(\tau - kT) \right] d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \int_0^t h(t - \tau)\delta(\tau - kT)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)h(t - kT) \end{aligned}$$

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

Cont.

- Muestreando la salida obtenemos la suma de convolución

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} u(iT)h(kT - iT), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

es decir,

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

o en el dominio del tiempo

$$Y^*(s) = H^*(s)U^*(s)$$

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

## Cascada de bloques

- En el caso de sistemas conectados en cascada muestreados al final y **sus componentes no se pueden separar después del muestreo:**

$$Y(z) = H(z)U(z) = (H_1 H_2 \dots H_n)(z)U(z)$$

- Sin embargo, si los sistemas situados en cascada están separados por muestreadores, cada bloque tiene una salida y entrada muestreada, así como una función de transferencia  $Z$ .

$$Y(z) = H(z)U(z) = H_1(z)H_2(z) \dots H_n(z)U(z)$$

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

## Ejemplos de configuraciones

- Ejemplos:

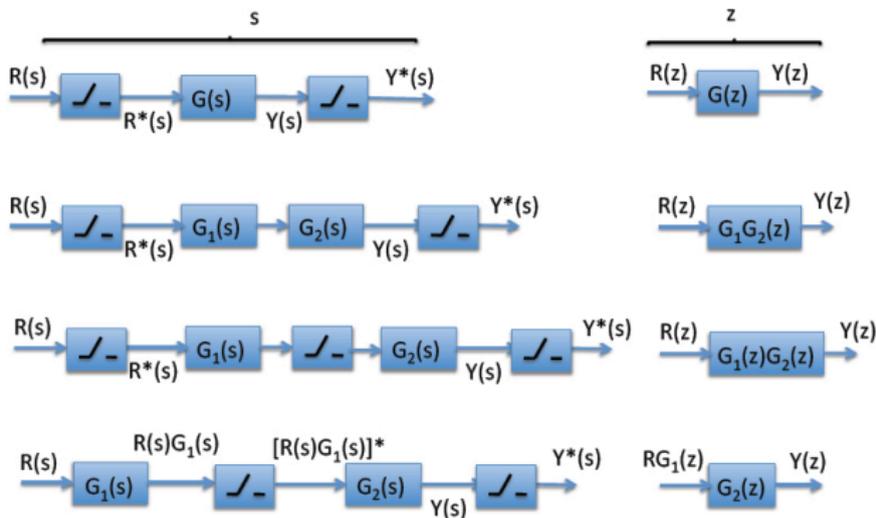


Figura 9: Ejemplos de configuraciones.

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

## Ejemplo

- Encontrar la secuencia de respuesta impulsional muestreada equivalente y la función de transferencia z equivalente para una conexión en cascada de dos sistemas analógicos con entrada muestreada  $H_1(s) = \frac{1}{s+2}$  y  $H_2(s) = \frac{2}{s+4}$ , para el caso en que estén conectados directamente y el caso en que estén separados por un muestreador.

- **Solución:**

- En ausencia de muestreadores entre los sistemas, la función de transferencia global es

$$H(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}$$

y la respuesta impulsional en cascada es

$$h(t) = e^{-2t} - e^{-4t}$$

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

## Ejemplo (Cont.)

- La respuesta impulsional muestreada será entonces

$$h(kT) = e^{-2kT} - e^{-4kT}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Y la función de transferencia en  $z$  será

$$H(z) = \frac{z}{z - e^{-2T}} - \frac{z}{z - e^{-4T}} = \frac{(e^{-2T} - e^{-4T})z}{(z - e^{-2T})(z - e^{-4T})}$$

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

## Ejemplo (Cont.)

- En el caso en que los sistemas estén separados por un muestreador, entonces cada sistema tiene una función de transferencia  $z$  diferenciada

$$H_1(z) = \frac{z}{z - e^{-2T}} \quad H_2(z) = \frac{2z}{z - e^{-4T}}$$

- Y la función de transferencia en  $z$  global será

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{2z^2}{(z - e^{-2T})(z - e^{-4T})}$$

- Expandiendo en fracciones parciales

$$H(z) = \frac{2}{e^{-2T} - e^{-4T}} \left[ \frac{e^{-2T}z}{z - e^{-2T}} - \frac{e^{-4T}z}{z - e^{-4T}} \right]$$

# Efecto del muestreador sobre la función de transferencia

## Ejemplo (Cont.)

- Y haciendo ahora la transformada inversa

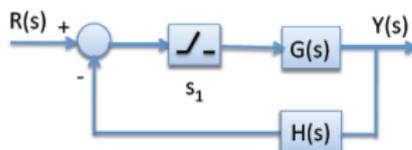
$$h(kT) = \frac{2}{e^{-2T} - e^{-4T}} [e^{-2T} e^{-2kT} - e^{-4T} e^{-4kT}]$$

$$h(kT) = \frac{2}{e^{-2T} - e^{-4T}} [e^{-2(k+1)T} - e^{-4(k+1)T}], k = 0, 1, 2, \dots$$

# Sistema realimentado con muestreador

## Función de transferencia discreta

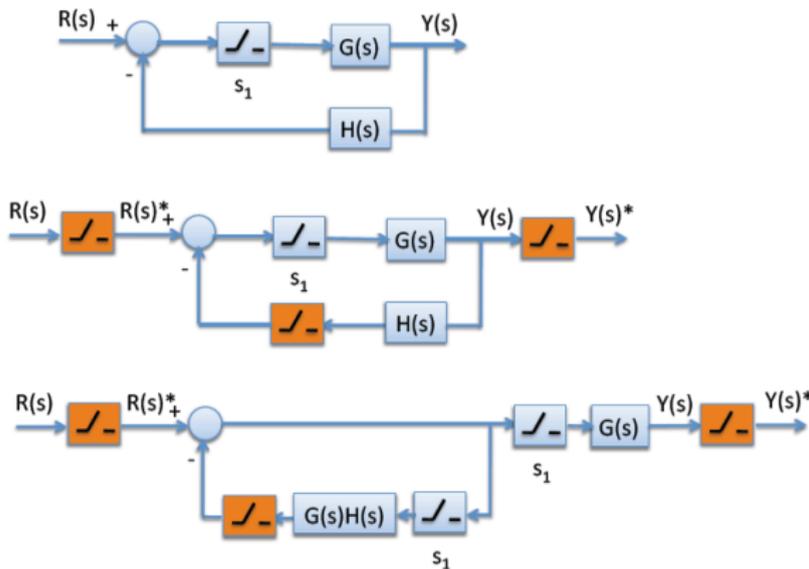
- Queremos encontrar la FDT discreta del sistema realimentado con muestreador de la figura:



- Introducimos muestreadores ficticios a la salida de cualquier subsistema que tenga la entrada muestreada.
  - Esto se justifica porque la salida de un sistema muestreado solo existe en instantes discretos de tiempo y la señal no es entrada a ningún otro bloque.
- Introducimos muestreadores ficticios en las entradas a un sumador cuya salida sea muestreada.
  - Esto se justifica porque la salida de un sumador muestreado equivale a la suma de las entradas muestreadas supuesto que todos los muestreadores estén sincronizados.

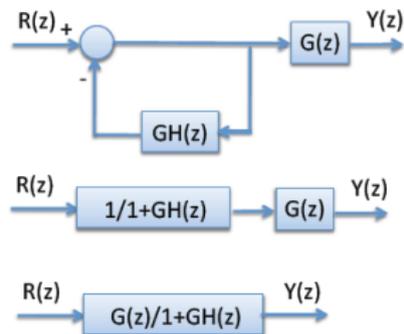
# Sistema realimentado con muestreador

## Función de transferencia discreta



# Sistema realimentado con muestreador

## Función de transferencia discreta



# Combinación de bloqueador, sistema y muestreador

## Función de transferencia

- En control suelen aparecer en cascada el bloqueador, el sistema y el muestreador, y como tanto la entrada como la salida están muestreadas, es posible obtener la función de transferencia  $z$  global a partir de las funciones de transferencia  $z$  de los subsistemas.

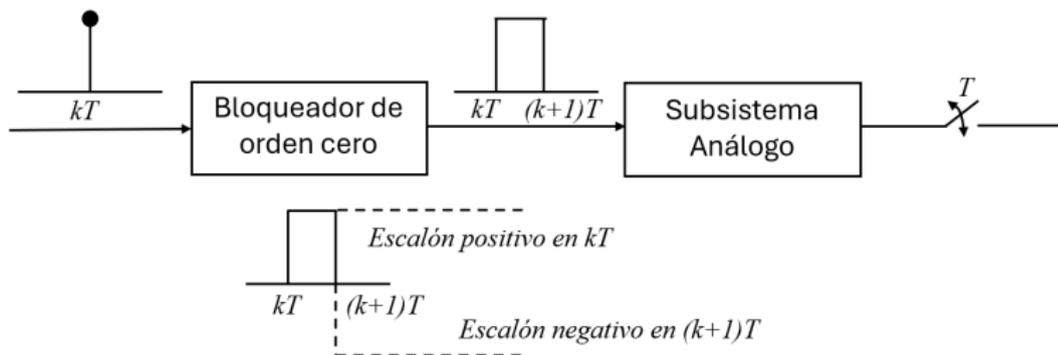


Figura 10: Combinación de bloqueador, sistema y muestreador.

# Combinación de bloqueador, sistema y muestreador

## Función de transferencia (cont.)

- En el campo de Laplace, la función de transferencia global es:

$$G_{BS}(s) = G_B(s)G_S(s) = (1 - e^{-sT})\frac{G_S(s)}{s}$$

donde  $G_B(s)$  bloqueador,  $G_S(s)$  sistema.

- En el campo temporal

$$g_{BS}(t) = g_B(t) * g_S(t) = g_{S/s}(t) - g_{S/s}(t - T)$$

con

$$g_{S/s}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_S(s)}{s}\right\}$$

- Si la muestreamos, da como resultado

$$g_{BS}(kT) = g_{S/s}(kT) - g_{S/s}(kT - T)$$

# Combinación de bloqueador, sistema y muestreador

Respuestas impulsiones del bloqueador y del sistema

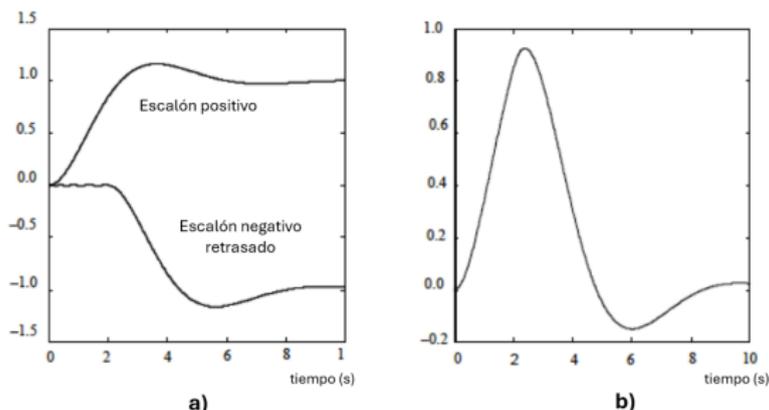


Figura 11: a) Respuesta de un sistema analógico a entradas escalón. b) Respuesta de un sistema analógico a una entrada de pulso unitario.

# Combinación de bloqueador, sistema y muestreador

Función de transferencia equivalente (cont.)

- Si hacemos la transformada Z de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned}G_{BSM}(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{g_{S/s}^*(t)\} \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G_S(s)}{s}\right]^*\} \end{aligned} \quad (5)$$

- Puesto en una notación más compacta:

$$G_{BSM}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_S}{s}\right\} \quad (6)$$

# Ejemplo 1

- Calcular la función de transferencia  $z$  de un sistema formado por un muestreador, bloqueador y el sistema analógico que se muestra en la siguiente figura:

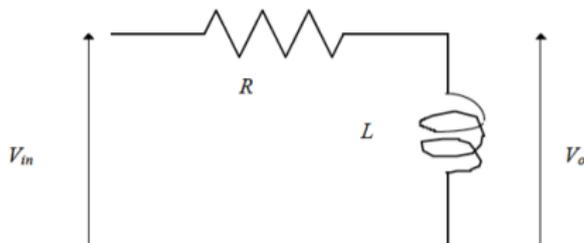


Figura 12: Circuito RL.

# Ejemplo 1

## Solución

- Relación entre el voltaje de entrada y salida:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{Ls}{Ls + R} = \frac{(L/R)s}{(L/R)s + 1}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{\tau s}{\tau s + 1}, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

- Y usando la expresión del  $G_{BSM}(z)$

$$\begin{aligned} G_{BSM}(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_S}{s}\right\} \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s + 1/\tau}\right\} \\ &= \frac{z - 1}{z} \left\{ \frac{z}{z - e^{-T/\tau}} \right\} \\ &= \frac{z - 1}{z - e^{-T/\tau}} \end{aligned}$$

## Ejemplo 2

- Calcular la función de transferencia Z de un sistema formado por un muestreador, bloqueador y el sistema analógico formado por un conjunto amplificador y motor de CC cuya función de transferencia s es la siguiente:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K}{s(\tau_m s + 1)}$$

# Ejemplo 2

## Solución

- Dada:

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{K/\tau_m}{s^2(s + 1/\tau_m)}$$

- Expandiendo en fracciones parciales:

$$\frac{G(s)}{s} = K \left[ \frac{A_{11}}{s^2} + \frac{A_{12}}{s} + \frac{A_2}{s + 1/\tau_m} \right]$$
$$A_{11} = \left. \frac{1/\tau_m}{s + 1/\tau_m} \right]_{s=0} = 1, A_{12} = \left. \frac{d}{ds} \left( \frac{1/\tau_m}{s + 1/\tau_m} \right) \right]_{s=0} = -1$$
$$A_2 = \left. \frac{1/\tau_m}{s^2} \right]_{s=-1/\tau_m} = \tau_m$$

# Ejemplo 2

## Solución

- Y usando la expresión del conjunto B-S-M,  $G_{BSM}(z)$ :

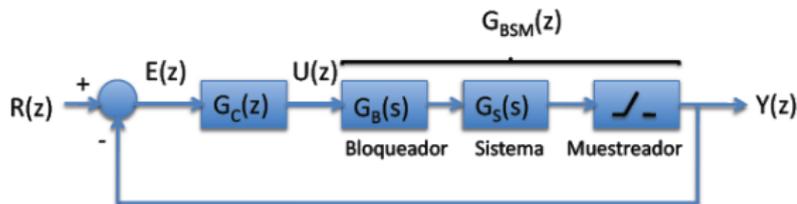
$$\begin{aligned}G_{BSM}(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_S}{s}\right\} \\&= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{K\left[\frac{1}{s^2} - \frac{\tau_m}{s} + \frac{\tau_m}{s + 1/\tau_m}\right]\right\} \\&= K\tau_m\left[\frac{T/\tau_m}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z - e^{-T/\tau_m}}\right] \\&= K\tau_m\left[\frac{(T/\tau_m + e^{-T/\tau_m} - 1)z + [1 - e^{-T/\tau_m}(T/\tau_m + 1)]}{(z-1)(z - e^{-T/\tau_m})}\right]\end{aligned}$$

# Función de transferencia en bucle cerrado

## Sistema con control en tiempo discreto

- La función de transferencia en bucle cerrado de un sistema que incluye un controlador en tiempo discreto  $G_C(z)$  y el equivalente discreto  $G_{BSM}(z)$  de un sistema que incluye bloqueador-sistema de tiempo continuo-muestreador es de la forma

$$G_{bc}(z) = \frac{G_C(z)G_{BSM}(z)}{1 + G_C(z)G_{BSM}(z)} \quad (7)$$



- cuya ecuación característica en bucle cerrado viene dada por

$$1 + G_C(z)G_{BSM}(z) = 0 \quad (8)$$

- La FDT z de un sistema con bloqueador (ADC), muestreador (DAC) y un sistema analógico viene dada por:

```
>> G= tf(num, den)
```

```
>> Gd= c2d(g,T, 'method')
```

donde `method` es el método de obtención de la función de transferencia discreta y  $T$  el periodo de muestreo.

- Ejemplo:  $G(s) = (2s^2 + 4s + 3)/(s^3 + 4s^2 + 6s + 8)$

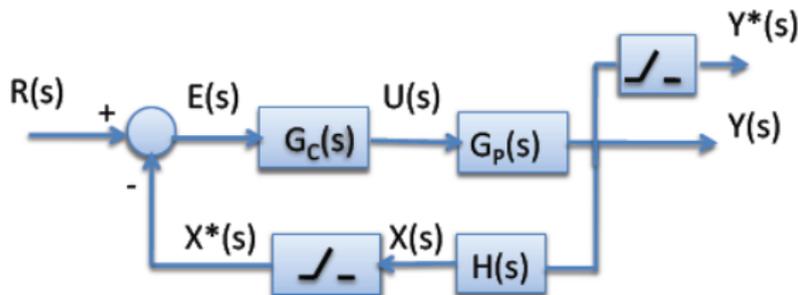
```
>> G = tf( [2 4 3], [1 4 6 8])
```

```
>> Gd= c2d(g, 0.1, 'zoh') % orden cero
```

```
>> Gd= c2d(g, 0.1, 'foh') % orden uno
```

# Ejemplo

- Calcular las funciones de transferencia de Laplace del sistema continuo y del muestreado para el sistema



- La señal  $x(t)$  tiene la transformada de Laplace:

$$X(s) = H(s)G_P(s)G_C(s)E(s) \quad (9)$$

Esta transformada implica tres multiplicaciones en el dominio  $s$  que corresponde a tres convoluciones en el dominio del tiempo.

# Ejemplo

Cont.

- En el diagrama de bloques se ve que  $E(s) = R(s) - X^*(s)$ , y sustituyendo en la expresión de  $X(s)$

$$X(s) = H(s)G_P(s)G_C(s)[R(s) - X^*(s)] \quad (10)$$

- por lo que la variable muestreada tendrá por transformada de Laplace

$$X^*(s) = HG_PG_C R^*(s) - HG_PG_C^*(s)X^*(s) \quad (11)$$

- Despejando  $X^*(s)$

$$X^*(s) = \frac{HG_PG_C R^*(s)}{1 + HG_PG_C^*(s)} \quad (12)$$

# Ejemplo

Cont.

- Entonces  $E(s)$

$$E(s) = R(s) - \frac{HG_P G_C R^*(s)}{1 + HG_P G_C^*(s)} \quad (13)$$

- Operando

$$Y(s) = G_C(s)G_P(s) \left[ R(s) - \frac{HG_P G_C R^*(s)}{1 + HG_P G_C^*(s)} \right] \quad (14)$$

- con lo que la salida muestreada queda en la forma

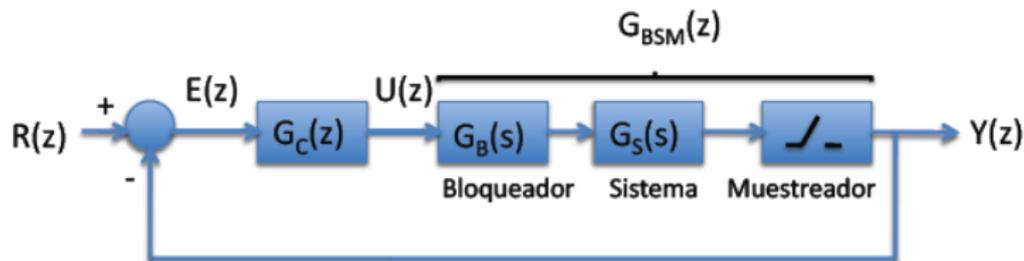
$$Y^*(s) = G_C G_P R^*(s) - G_C G_P^*(s) \frac{HG_P G_C R^*(s)}{1 + HG_P G_C^*(s)} \quad (15)$$

- y aplicando  $z = e^{st}$  lo reescribimos en el dominio  $z$

$$Y(z) = G_C G_P R(z) - G_C G_P(z) \frac{HG_P G_C R(z)}{1 + HG_P G_C(z)} \quad (16)$$

# Error en régimen permanente de un sistema

En bucle cerrado



- El error  $E(z)$  viene dado por

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_C(z)G_{BSM}(z)} \quad (17)$$

- y aplicando el teorema del valor final

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)R(z)}{z(1 + G_C(z)G_{BSM}(z))} \end{aligned} \quad (18)$$

# Tipo de un sistema

## Tiempo discreto

- El tipo de un sistema es el número  $n$  de polos unitarios, es decir, en  $(z - 1)$ , de la función de transferencia  $z$  del sistema.

$$F(z) = \frac{N(z)}{(z - 1)^n D(z)}, \quad n \geq 0$$

# Error en régimen permanente de un sistema en lazo cerrado

## Entrada escalón unitario muestreado

- La función de transferencia de una entrada escalón unitario viene dada por

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \quad (19)$$

- Introduciéndola en la expresión del error, obtenemos

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(1 + G_C(z)G_{BSM}(z))} \\ &= \frac{1}{1 + K_p} \end{aligned} \quad (20)$$

- donde  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_C(z)G_{BSM}(z)$  es la denominada constante del error de posición, que tiene un valor finito para sistemas de tipo cero e infinito para sistemas de tipo 1 o superior.

# Error en régimen permanente de un sistema en lazo cerrado

## Entrada rampa muestreada

- La función de transferencia de una entrada rampa muestreada viene dada por

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (21)$$

- Introduciéndola en la expresión del error, obtenemos

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)(1 + G_C(z)G_{BSM}(z))} \\ &= \frac{1}{K_V} \end{aligned} \quad (22)$$

- donde  $K_V = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T}(z-1)G_C(z)G_{BSM}(z)$  es la denominada constante del error de velocidad y tiene un valor cero para sistemas de tipo 0, finito para sistemas de tipo 1 e infinito para sistemas de tipo 2 o superior.

# Ejemplo

- Obtener el error de posición para un sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia equivalente de la planta (con bloqueador y muestreador) es

$$G_{BSM}(z) = \frac{K(z + a)}{(z - 1)(z - b)}$$

y la del controlador

$$G_C(z) = \frac{K_c(z - b)}{(z - c)}$$

con  $0 < a, b, c < 1$ .

- **Solución:**

$$G_{ba}(z) = G_C(z)G_{BSM} = \frac{KK_c(z+a)}{(z-1)(z-c)}$$

el sistema es de tipo 1, por lo que tendrá un error nulo ante entrada escalón en régimen permanente, y para entrada rampa:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)(1 + G_C(z)G_{BSM}(z))} \\ &= \frac{T(1-c)}{KK_c(1+a)} \end{aligned} \quad (23)$$

Se puede observar que el error en régimen permanente ante rampa se reduce cuando se aumenta la ganancia  $K_c$  del controlador y depende de las posiciones del polo y cero del controlador.

- **Teorema:**

La señal  $f(t)$  de banda limitada, cuya transformada de Fourier  $F(j\omega)$  es distinta de cero en el intervalo  $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$  y cero en el resto, puede ser reconstruida a partir de la forma de onda de la señal de tiempo discreto

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - kT)$$

si y sólo si la frecuencia de muestreo  $\omega_s = 2\pi/T$  satisface la condición:

$$\omega_s > 2\omega_m$$

# Teorema del muestreo

## Demostración

- Considere la secuencia de impulsos unitarios

$$\delta_T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

y su transformada de Fourier

$$\delta_T = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

# Teorema del muestreo

## Demostración

- El muestreo por impulsos se obtiene multiplicando las formas de onda de  $f(t)$  por  $\delta_T$ . Por el teorema de convolución en frecuencia, el espectro del producto de las dos señales viene dado por la convolución de sus espectros respectivos, esto es:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\delta_T(t) \times f(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \delta_T(j\omega) * F(j\omega) \\ &= \left[ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] * F(j\omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)\end{aligned}$$

# Teorema del muestreo

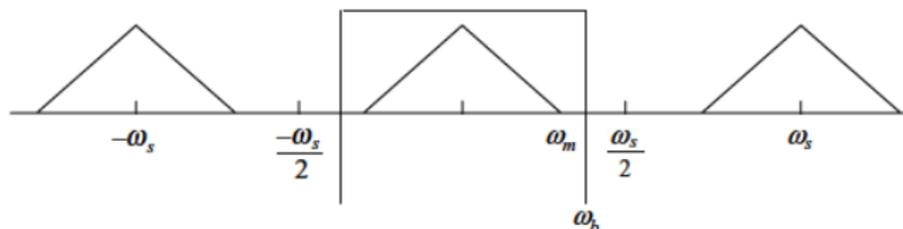


Figura 13: El espectro de la forma de onda.

- El espectro de la forma de onda continua puede ser recuperado mediante un filtro paso bajo ideal de ancho de banda  $\omega_b$  en el rango  $\omega_m < \omega_b < \omega_s/2$ .

# Elección de la frecuencia de muestreo

- Las señales de banda finita son una idealización asociada con las señales de duración infinita, ya que la duración infinita implica en realidad un ancho de banda infinito.
- Desde un punto de vista práctico tienen lo que podríamos denominar un ancho de banda efectivo limitado, a partir del cual el efecto de los componentes espectrales son despreciables.
- Este hecho hace que podamos tratar las señales como si fuesen de banda limitada y elegir para ellas una frecuencia de muestreo mayor que la especificada por el teorema de muestreo.
- Como regla práctica, esta frecuencia de muestreo  $\omega_s$  se puede tomar como

$$\omega_s = k\omega_m, \quad 5 \leq k \leq 10$$

# Elección de la frecuencia de muestreo

- La elección de  $k$  depende de la aplicación y del coste de muestrear a una cierta frecuencia: a mayor frecuencia, mayor coste (memoria).
- Un sistema de control en lazo cerrado no puede tener un periodo de muestreo por debajo del tiempo necesario para medir la salida, es decir, la frecuencia de muestreo está acotada superiormente por el **retardo del sensor**.