Ingeniería de Control II

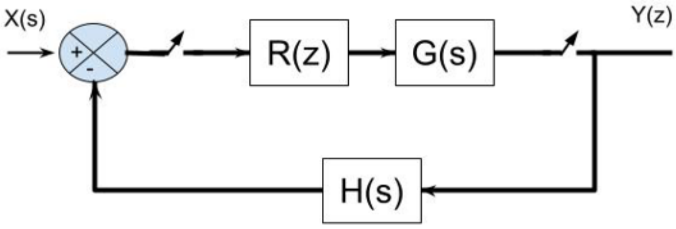
Examen resuelto

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido

2025

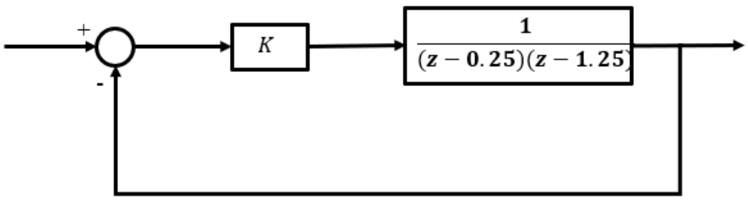
Examen

- **Ejercicio 1**
  Encuentra la función de transferencia discreta equivalente del siguiente diagrama usando el método de los residuos:

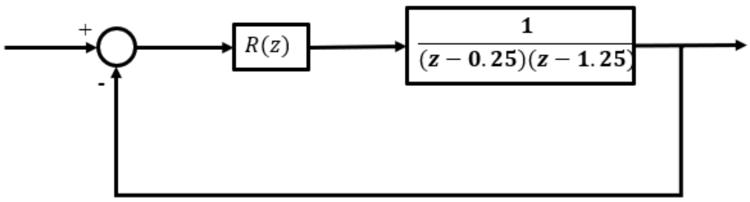


  donde:
  $R(z) = \frac{z-1}{z}$
  $G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{5}{s+1}$
  $H(s) = \frac{1}{s}$

- **Ejercicio 2**
  Sea el siguiente sistema:



  - Obtener, utilizando el Test de Jury, los valores de K que hacen al sistema estable.
  - Considerando ahora:



    Calcular el regulador más simple posible, utilizando el método de diseño basado en el lugar de las raíces, que haga que el sistema realimentado tenga los polos dominantes en $z_d = 0{,}25 \pm i0{,}25$.
  - Obtener, para ese regulador, el valor del error de posición.

  Notas:
  - *Dibujar y obtener con detalle el lugar de las raíces.*
  - *Explicar y justificar todo el procedimiento.*

Examen

- **Ejercicio 3**
  Se tiene el siguiente sistema discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

  - Determinar la matriz de controlabilidad de la salida. ¿Es este sistema completamente controlable en la salida?
  - Si el estado inicial es $x(0) = (0\ 0)^t$, ¿Cuál es la secuencia de entradas u(0),u(1) necesarias para que el sistema pase a tener la salida $y(2) = (3\ 9)^t$.
  - Se tiene ahora una única salida, luego la expresión de la salida para el mismo sistema pasa a ser la siguiente:

$$y(k) = [3\ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

    Se controla este sistema mediante realimentación de estado. Determinar la matriz K de realimentación de estado que hace que los polos del sistema en cadena cerrada sean $p_{1,2} = 0,5 \pm j0,5$.

- **Ejercicio 4**
  Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad (1)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

  - Determinar la observabilidad de estado del sistema.
  - Dada la secuencia de salida $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, para entradas $u(0) = 0$, $u(1) = 0$; determinar el estado inicial de partida del sistema $x(0)$.
  - Dada una ganancia de realimentación $K_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para un observador de estado de orden completo del sistema, determinar los polos del observador de estado del sistema y los polos del sistema. Es adecuada la matriz de realimentación de estado del observador para observar el sistema?

Solución

Solución ejercicio 1:

- Ecuaciones del sistema:

$$U(s) = X(s) - H(s)Y^*(s) \rightarrow U(z) = X^*(z) - H^*(s)Y^*(s)$$

$$Y(s) = G(s)R(z)U^*(s) \rightarrow Y(z) = G^*(s)R(z)U^*(s)$$

$$Y(z) = \frac{G^*(s)R(z)X^*(z) - H^*(s)Y^*(s)}{1 + H^*(s)G^*(s)R(z)}$$

- Calculamos G(z):

$$G^*(s) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{5}{s+1}\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{5}{s(s+1)}\right]$$

$$R_{-1} = \lim_{p\rightarrow 1}\left[\frac{5}{p(1-e^{-T(s-p)})}\right] = \frac{-5}{1-e^{-Ts}e^{-T}} = \frac{-5z}{z-e^{-T}}$$

$$R_0 = \lim_{p\rightarrow 0}\left[\frac{5}{(p+1)(1-e^{-T(s-p)})}\right] = \frac{5}{1-e^{-Ts}} = \frac{5z}{z-1}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\left[\frac{-5z}{z-e^{-T}} + \frac{5z}{z-1}\right] = 5\frac{1-e^{-T}}{(z-e^{-T})}$$

- Calculamos $H^*(s)$:

$$H^*(s) = Z\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$R_0 = \lim_{p\rightarrow -1}\left[\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}} = \frac{z}{z-1}$$

- Función de transferencia del sistema:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{z^{-1}5(1-e^{-T})}{z(z-e^{-T})}}{1+\frac{z^{-1}5(1-e^{-T})}{z(z-e^{-T})}} = \frac{5z^{-1}(1-e^{-T})}{(z-e^{-T})}\left[\frac{1}{1+5\frac{1-e^{-T}}{(z-e^{-T})}}\right]$$

Solución ejercicio 2:

- $G(z) = \frac{1}{(z-0{,}25)(z-1{,}25)}$
- k critica

  $P(z) = 1 + k\frac{1}{(z-0{,}25)(z-1{,}25)} = 0$

  $P(z) = z^2 - 1,5z + (0,3125 + k) = 0$
- Test de Jury:

  1. $|a_0| < a_n \Rightarrow 0{,}3125 + k < 1$

     $0,3125 + k < 1 \Rightarrow k < 0,8125$
     $0,3125 + k > -1 \Rightarrow k < -1,3125$

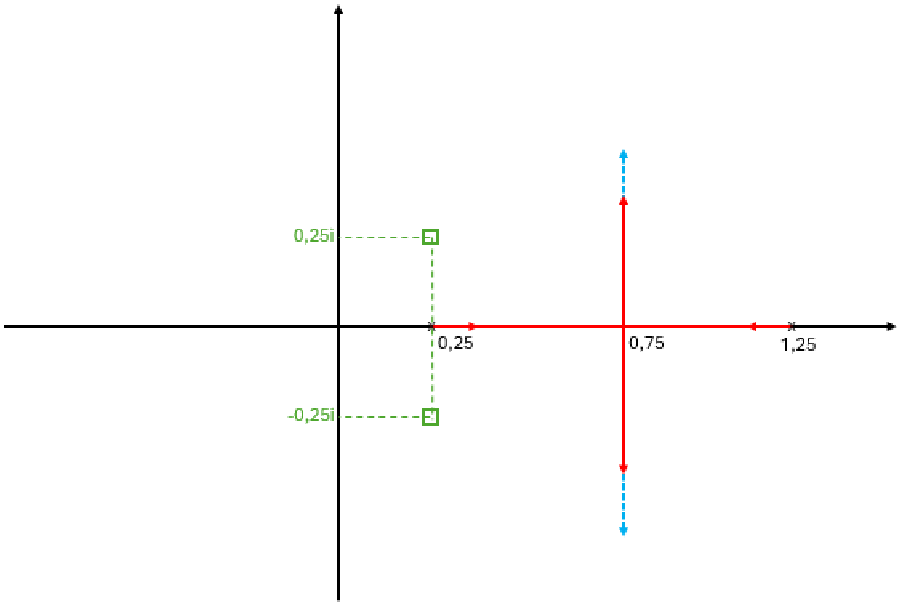
     $-1{,}3125 < k < 0{,}8125$
  2. $P(1) > 0 \Rightarrow P(1) = 1 - 1,5 + 0,3125 + k > 0$
     $-0{,}1875 + k > 0 \Rightarrow \quad k > 0{,}1875$
  3. $(-1)^2 P(-1) > 0 \Rightarrow P(-1) = 1 + 1,5 + 0,3125 + k > 0$
     $2,81 + k > 0 \Rightarrow k > -2,81$

  De los 3 resulta:

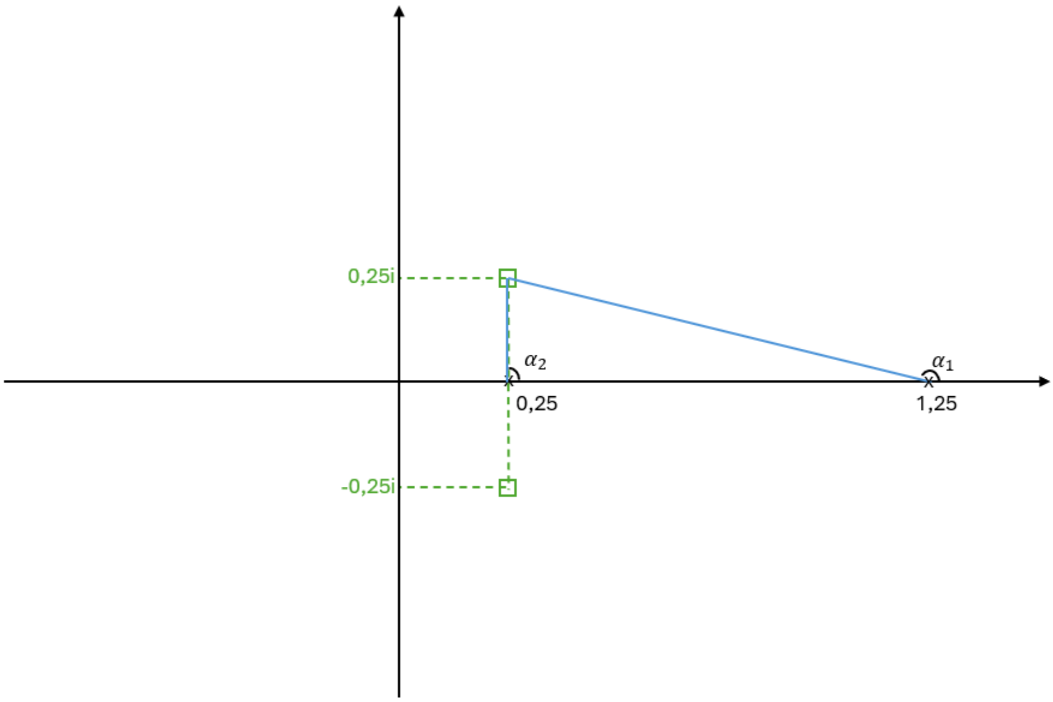
  $0,1875 \quad < \quad k < 0,6875 \Rightarrow$ Estable.
- Regulador de tipo P con $\quad z_d = 0{,}25 \pm i0{,}25$
  - numero de polos $n = 2$
  - numero de ceros $m = 0$
  - numero de ramas $n = 2$
  - numero de asíntotas $n - m = 2$
  - Ángulos de las asíntotas
    $\theta = \frac{(2q+1)\pi}{n-m} = \pm\frac{\pi}{2}$
  - Centroide
    $\sigma = \frac{\sum p - \sum z}{n-m} = \frac{0{,}25+1{,}25}{2} = 0{,}75$
  - Puntos de dispersión
    $\frac{dk}{dz} = 0; \quad -k = z^2 - 1,5z + 0,3215$
    $\frac{dk}{dz} = 2z - 1,5 = 0 \quad \Rightarrow z = 0,75$

Solución ejercicio 2 (Cont.):

- Lugar Geométrico de Las Raíces



- Criterio del argumento



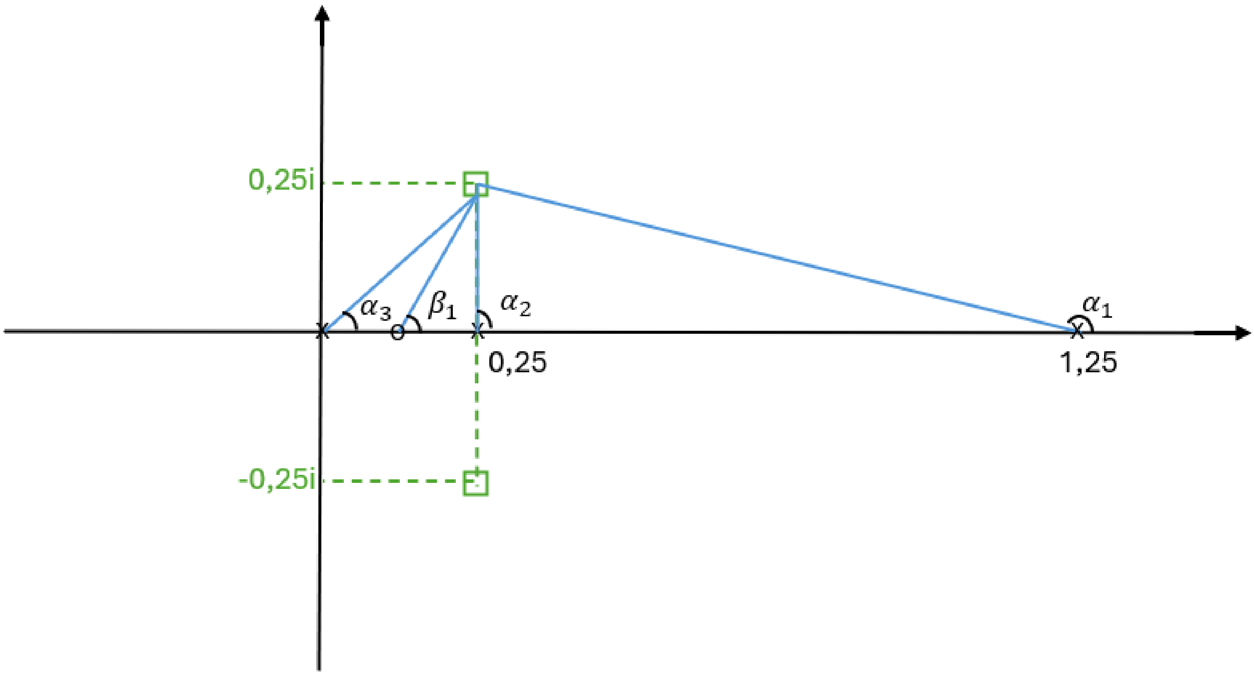
$\sum \arg p - \sum \arg z = \pi \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$

$\alpha_1 + \alpha_1 = 180$?

$(\pi - tg^{-1}\frac{0,25}{1}) + \frac{pi}{2}) = 165,963^\circ + 90^\circ = 255,963^\circ \neq \pi$

Los polos dominantes no pertenecen al lugar geométrico de las raíces, intentamos un PD . Añadimos la parte derivativa (un nuevo cero y un polo en origen) $\Rightarrow R(z) = \frac{z-c}{z}$.

Solución ejercicio 2 (Cont.):



- Criterio del argumento

  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \beta_1 = \pi$

  $255,963^\circ + tg^{-1}\frac{0,25}{0,25} - tg^{-1}\frac{0,25}{0,25-c} = 180^\circ$

  $300,96^\circ - 180^\circ = tg^{-1}\frac{0,25}{0,25-c} = 120,96^\circ$

  $\frac{0,25}{0,25-c} = -1,667 \Rightarrow c = 0,4$

  $R(z) = \frac{z-0,4}{z}$

- Criterio del modulo

  $|k| = \frac{|z-0,25||z-1,25||z|}{|z-0,4|}$

  $|k| = 0,3125$

  $R(z) = 0,3125\frac{z-0,4}{z}$

- Calculamos el error.

  $ep = \frac{1}{1+k_p}$; $k_p = \text{lím}_{z\to 1} 0,3125\frac{z-0,4}{z(z-0,25)(z-1,25)} \Rightarrow k_p = \frac{0,1875}{0,1875} = 1$

  $ep = \frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow ep = 50\,\%$

Solución ejercicio 3:

- Matriz de controlabilidad en la salida:

$$M_{cs} = [CH \quad CGH]$$

donde

$$CH = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

y

$$CGH = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$M_{cs} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

lo cual indica que el sistema es completamente controlable en la salida.

- Secuencia de entradas:

$$y(2) - CG^2x(0) = M_{cs} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

y dados los valores iniciales,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$5u(1) - 2u(0) = 3,$$
$$5u(1) + 4u(0) = 9.$$

Solucionando para $u(0)$ y $u(1)$, encontramos que:

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 1.$$

- Matriz de realimentación:

$$[zI - G + HK] = z^2 - z + 0{,}5$$

Solución ejercicio 3 (Cont.):

donde

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Expandiendo la operación,

$$\begin{bmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-2+k_1 & k_2 \\ 1k_1 & z+1+1k_2 \end{bmatrix} = z^2 - z + 0{,}5.$$

Igualando términos y resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} z^2 + z(-1+2k_2+k_1) - 2 - 4k_2 + k_1 &= z^2 - z + 0{,}5, \\ -1 + 2k_2 + k_1 &= -1, \\ -2 - 4k_2 + k_1 &= 0{,}5. \end{aligned}$$

Solucionando para k_1 y k_2, encontramos:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

Solución

Solución ejercicio 4:

- La matriz de observabilidad M_o se define como:

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix}$$

  Calculamos el determinante de M_o:

$$\det(M_o) = 0,5 * 0,5 - 0,6 = 0,25 - 0,6 = -0,35$$

  Como $\det(M_o) \neq 0$, el sistema es completamente observable.
- Determinación del estado inicial. Dadas las salidas y las entradas, el sistema se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

  Sustituyendo los valores dados:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

  Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$x_1(0) = 1{,}76, \quad x_2(0) = 0{,}118$$

- La ecuación del observador del sistema es:

$$\dot{x}(k+1) = Gx(k) + Ke[y(k) - \hat{y}(k)] + Hu(k)$$

  donde G, H, C, y Ke son las matrices del sistema, entrada, salida, y la ganancia del observador respectivamente.
- Ecuación Característica
  La ecuación característica con la ganancia de realimentación $Ke = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es:

$$|zI - G + KeC| = \left| \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ -0{,}1 & z-0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ 0,4 & z+0,5 \end{bmatrix} \right|$$
$$= (z-1)(z+0,5) = 0$$

  Los polos del observador son $z = 1$ y $z = -0,5$.
  Los polos del sistema se calculan con la matriz G original:

$$|zI - G| = \left| \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ -0,1 & z-0,5 \end{bmatrix} \right| = (z-1)(z-0,5) = 0$$

  Los polos del sistema son $z = 1$ y $z = 0,5$.