uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Diferenciación de funciones de varias variables

3. DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. El límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si existe se llama derivada parcial respecto de la variable x en el punto (x_0, y_0) y de denota por $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ o también como D_1

Equivalentemente sea el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si existe se llama derivada parcial respecto de la variable y en el punto (x_0, y_0) y de denota por $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ o también como D_2

Estos límites son realmente derivadas de funciones de una variable, por lo que se pueden aplicar las reglas de derivación habituales de función de una variable.

EJEMPLO

Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Calcular las derivadas parciales en el punto (0,0)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} \to 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0 \cdot h^2}{0+h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^5} \to 0$$

Calcular la derivada parcial de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = xcosxseny$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = cosxseny - xsenxseny$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xcosxcosy$$

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)ln(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xln(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\frac{2x}{x^2+y^2} = 2x(ln(x^2+y^2)+1)$$

La función es simétrica (intercambiamos x por y y nos queda la misma función) entonces

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y(ln(x^2+y^2)+1)$$

Además de la derivada parcial de la función existen las derivadas direccionales. Derivadas en un punto según una dirección del vector $\bar{u}$

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un punto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y un vector $\bar{u} = (u_1, u_2)$. La derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto (x_o, y_o) y vector $u = (u_1, u_2)$. Es el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P+hu) - f(P)}{h}$$

Y se denota por $D_u f(P)$

EJEMPLO

a) Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ en la dirección del vector $u = \left({}^4\!/_5, {}^3\!/_5\right)$

$$\left.\begin{array}{l} P = (0,0) \\ u = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \end{array}\right\} P + hu = (0,0) + h\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{4h}{5}, \frac{3h}{5}\right)$$

$$f(P+hv) = f\left(\frac{4h}{5}, \frac{3h}{5}\right) = \frac{\left(\frac{4h}{5}\right)^2 \frac{3h}{5} - \left(\frac{3h}{5}\right)^3}{\left(\frac{4h}{5}\right)^2 + \left(\frac{3h}{5}\right)^2} = \frac{\frac{48h^3}{5^3} - \frac{27h^3}{5^3}}{\frac{16h^2}{5^2} + \frac{9h^2}{5^2}} = \frac{21h^3}{125h^2} = \frac{21h}{125}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P+hv) - f(P)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{21h}{125} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{21h}{125h} = \frac{21}{125}$$

b) Sea la función $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$ con $p = (1,2)\ y\ u = (3,4)$

$$\left.\begin{matrix} P = (1,2) \\ u = (3,4) \end{matrix}\right\} P + hu = (1,2) + h(3,4) = (1+3h, 2+4h)$$

$$f(P+hu) = f(1+3h, 2+4h) = 1 + 3h + 2(1+3h)(2+4h) - 3(2+4h)^2$$

$$= 1 + 3h + 4 + 8h + 12h + 24h^2 - (12 + 48h + 48h^2) = \ -7 - 25h - 24h^2$$

$$f(1,2) = 1 + 4 - 12 = -7$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P+hu) - f(P)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-7 - 25h - 24h^2 - (-7)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h(25+24h)}{h} \ \to -25$$

Existe una relación entre las dos derivadas, de hecho, la derivada parcial es el caso particular de la derivada direccional en el vector canónico. La derivada parcial respecto a x es el equivalente a la derivada direccional en la dirección del vector (1,0). Y la parcial respecto a y es la derivada direccional en la dirección del vector (0,1).

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = D_{(1,0)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = D_{(0,1)}$$

GRADIENTE

El vector formado por las derivadas parciales se llama **gradiente.** Y se representa por la letra nabla $\nabla = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$

EJEMPLOS

Calcular el gradiente en los puntos que se indica

a) $f(x,y) = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}\ en\ p = (a/2, a/2)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -x(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2y) = -y(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) $f(x,y) = ln(1+xy)^{1/2} \ \ en\, p = (1,1)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{(1+xy)^{-1/2}y}{(1+xy)^{1/2}} = \frac{y}{2(1+xy)}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{(1+xy)^{-1/2}x}{(1+xy)^{1/2}} = \frac{x}{2(1+xy)}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \frac{1}{4}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

c) $f(x,y) = e^y cos(3x+y) \ \ en \ \ p = \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -3e^y sen(3x+y)$$

$$\frac{\partial f\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)}{\partial x} = -3e^0 sen(2\pi) = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^y cos(3x+y) - e^y sen(3x+y)$$

$$\frac{\partial f\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)}{\partial y} = e^0\left(cos(2\pi) - sen(2\pi)\right) = 1$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (0,1)$$

PROPIEDADES:

a) La derivada direccional máxima de la función se alcanza en el vector normalizado del gradiente. $\frac{\nabla}{\|\nabla\|}$ y el valor de dicha derivada es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$

b) La derivada direccional se puede calcular a partir del gradiente:

$$D_u f(P) = \nabla\big(f(x_0, y_0)\big) \cdot u$$

Halla la derivada direccional de $f(x,y) = xe^y - ye^x$ en el punto (1,0) y dirección (3,4)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y - ye^x \rightarrow \frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = e^0 - 0 \cdot e^1 = 1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y - e^x \rightarrow \frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 1 \cdot e^0 - e^1 = 1 - e$$

$$D_u f(P) = \nabla\big(f(x_0, y_0)\big) \cdot u$$

$$D_u f(P) = \nabla\big(f(x_0, y_0)\big) \cdot u = (1,1-e) \cdot (3,4) = 3 + 4 - 4e = 7 - 4e$$

Sea $f(x,y) = 2xe^{y/x}$ en el punto (2,0) y el vector (3,2)

Halle la derivada direccional de la función f en el punto p en la dirección del vector v. ¿Cuál es la dirección de mayor crecimiento de f en el punto p? ¿Cuál es el máximo de la derivada direccional?

La función es continua y derivable en el punto ya que su dominio es $\mathbb{R}^2 \setminus x = 0$

Esto quiere decir que la función es diferenciable

$$\frac{df}{dx} = 2e^{y/x} + 2x \cdot \frac{-y}{x^2} e^{y/x} = 2e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right) \rightarrow \frac{df(2,0)}{dx} = 2$$

$$\frac{df}{dy} = 2x\frac{1}{x}e^{y/x} = 2e^{y/x} \rightarrow \frac{df(2,0)}{dy} = 2$$

$$D_u = \nabla f \cdot u = (2,2) \cdot (3,2) = 10$$

La dirección máxima se alcanza en el gradiente normalizado:

$$D_{max} = \left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}}, \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Una aplicación geométrica del gradiente es el cálculo del plano tangente en un punto.

Ecuación del plano tangente $z - z_0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

Considere la función $f(x, y) = 2xe^{y/x}$ en el punto (2,0). Calcule el plano tangente a la gráfica de f en el punto (2, 0, 4).

$$\frac{df}{dx} = 2e^{y/x} + 2x \cdot \frac{-y}{x^2} e^{y/x} = 2e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right) \rightarrow \frac{df(2,0)}{dx} = 2$$

$$\frac{df}{dy} = 2x\frac{1}{x}e^{y/x} = 2e^{y/x} \rightarrow \frac{df(2,0)}{dy} = 2$$

$$z - z_0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \rightarrow z - 4 = (2,2)(x - 2, y - 0)$$

$$z - 4 = 2x - 4 + 2y \rightarrow 2x + 2y - z = 0$$