uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Derivadas de Orden Superior

4. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

MATRIZ HESSIANA

La matriz Hessiana es la formada por las derivadas segunda de la función.

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

El Teorema de Schwarz nos indica que las derivadas cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^x seny$ Calcular la matriz Hessiana.

  Necesitamos calcular las derivadas segundas.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x seny \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x cosy$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = e^x seny \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = e^x cosy \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -e^x seny$$

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x seny & e^x cosy \\ e^x cosy & -e^x seny \end{pmatrix}$$

- Calcular la matriz Hessiana de $f(x,y) = x\, e^{x+y^2}$ en el punto (1,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y^2} + x\, e^{x+y^2} = e^{x+y^2}(1+x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\, e^{x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = e^{x+y^2}(1+x) + e^{x+y^2} = e^{x+y^2}(2+x)$$

$$\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x^2} = e^1(2+1) = 3e$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \; 2xe^{x+y^2} + 4xy^2\, e^{x+y^2} \; = \; 2xe^{x+y^2}(1+2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f(1{,}0)}{\partial x^2} = 2\, e$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \; e^{x+y^2}(1+x)2y$$

$$\frac{\partial^2 f(1{,}0)}{\partial x \partial y} = \; e^1(1+1)2\cdot 0 = 0$$

$$H_{f(1,0)} = \begin{pmatrix} 3e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix}$$

REGLA DE LA CADENA.

La regla de la cadena es un mecanismo para calcular la derivada de una función de dos variables definidas como funciones de otras variables.

Por ejemplo, sea la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ donde x, y son a su vez otras dos funciones $x(r,s) = r + 3s \qquad y(r,s) = r^2 s$

Nos piden calcular la deriva de $\frac{\partial f}{\partial r}$ y $\frac{\partial f}{\partial s}$

La regla de la cadena nos dice que:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

Así que calculamos cada una de estas derivadas.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = (2x-2y)\cdot 1 + (-2x+2y)\cdot 2rs = (2x-2y)(1-2rs)$$

Una vez calculada las derivadas como nos piden dejar el resultado en función de r, s sustituimos los valores de x, y

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (2x-2y)\cdot(1-2rs) = 2(r+3s-r^2 s)(1-2rs)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = (2x - 2y) \cdot 3 + (-2x + 2y)r^2 = (2x - 2y)(3 - r^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (2x - 2y)(3 - r^2) = 2(r + 3s - r^2 s)(3 - r^2)$$

La utilización del capital K en el instante t genera unos beneficios en ese momento de

$B(t, K) = 5(1 + t)^{1/2} K$ Supongamos que el capital varía en el tiempo según la ecuación

$K(t) = 120\, e^{t/4}$ Determinar la tasa de cambio de B.

Es un problema de aplicación de la regla de la cadena, ya que tenemos inicialmente una función respecto de dos variables, t, K pero K es otra función respecto al tiempo t

Así la aplicación de la regla de la cadena será:

$$\frac{\partial B(t, K)}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial t}$$

El primer sumando solo depende de t el segundo de K pero K es una función en t

La tasa de cambio es una aplicación de una derivada, cualquier concepto que implique cambio se puede interpretar como una derivada.

$$\frac{\partial B(t,K)}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial t} = 5\frac{1}{2}(1 + t)^{-\frac{1}{2}} K + 5(1 + t)^{1/2} \cdot 120 \cdot \frac{1}{4} e^{\frac{t}{4}}$$

$$\frac{\partial B(t,K)}{\partial t} = 5\frac{1}{2}(1 + t)^{-\frac{1}{2}} 120 e^{t/4} + 5(1 + t)^{1/2} \cdot 120 \cdot \frac{1}{4} e^{t/4} =$$

$$= 300 \cdot e^{t/4} \left((1 + t)^{-1/2} + \frac{1}{2}(1 + t)^{1/2} \right)$$

MATRIZ JACOBIANA

La matriz jacobiana se construye a partir de las primeras derivadas de una función vectorial. Una función vectorial es aquella en la que sus componentes no son variables si no nuevas funciones.

$$f(f_1(x, y), f_2(x, y))$$

La matriz Jacobiana está forma por $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

Esta matriz y sobre todo su determinante, será útil en el cálculo de integrales en funciones de varias variables donde tengamos que realizar un cambio de variable. Y también es una herramienta que usaremos en el cálculo de los puntos críticos.

Aunque la principal utilidad que tiene la matriz Jacobiana es saber si una función tiene inversa.

Una función tendrá inversa si el determinante de la matriz Jacobiana (Jacobiano) no es nulo.

$$\det(J) \neq 0 \rightarrow \exists\, f^{-1}$$

Esta condición es necesaria pero no es suficiente. Es decir que, si el Jacobiano es 0, no se puede saber si la función tiene inversa o no.

La matriz jacobiana está relacionada con elementos de las derivadas vistos anteriormente:

- En una función $f\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el jacobiano es el gradiente $J = \nabla f$
- El Jacobiano del gradiente es la matriz Hessiana $J(\nabla f) = Hf$

EJEMPLO:

Calcular la matriz jacobiana de la función: $f(x^2 - 2xy, e^{3x+y})$

$$f_1(x,y) = x^2 - 2xy \qquad f_2(x,y) = e^{3x+y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 2y \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3e^{3x+y} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = e^{3x+y}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y & -2x \\ 3e^{3x+y} & e^{3x+y} \end{pmatrix}$$

El jacobiano de la matriz es: $|J| = (2x - 2y)e^{3x+y} + 6xe^{3x+y} = e^{3x+y}(8x - 2y)$

Este determinante se anula cuando $8x - 2y = 0 \rightarrow y = 4x$

Es decir, la función vectorial $f(x^2 - 2xy, e^{3x+y})$ tendrá inversa en todos los puntos del plano excepto en los de la recta $y = 4x$.

- Matriz Jacobiana de una composición de funciones vectoriales se calcula mediante el producto de las matrices jacobianas $J_{g\circ f} = J_g \cdot J_f$

EJEMPLO

Dadas las funciones $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$, $g(u,v) = (u+v, u, v^2)$ calcula la matriz jacobiana de $g \circ f$ en el punto (1, 1).

$$f\ tiene\ dos\ funciones \begin{cases} f_1 = x^2+1 \\ f_2 = y^2 \end{cases}$$

$$\frac{df_1}{dx} = 2x \qquad \frac{df_1}{dy} = 0 \qquad \frac{df_2}{dx} = 0 \qquad \frac{df_2}{dy} = 2y$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}\ aplicada\ en\ el\ punto\ (1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g\ tiene\ tres\ funciones \begin{cases} g_1 = u+v \\ g_2 = u \\ g_3 = v^2 \end{cases}$$

$$\frac{dg_1}{du} = 1 \qquad \frac{dg_1}{dv} = 1 \qquad \frac{dg_2}{du} = 1 \qquad \frac{dg_2}{dv} = 0 \qquad \frac{dg_3}{du} = 0 \qquad \frac{dg_3}{dv} = 2v$$

$$J_g = \begin{pmatrix} dg_1/du & dg_1/dv \\ dg_2/du & dg_2/dv \\ dg_3/du & dg_3/dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}\ aplicada\ en\ el\ punto\ (1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_{g\circ f} = J_g \cdot J_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

DIFERENCIABILIDAD.

Una función es diferenciable si existe el límite:

$$\lim_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f\big((h,k)-(x_0,y_0)\big) - f(x_0,y_0) - \frac{df}{dx}(x_0,y_0)\cdot h - \frac{df}{dy}(x_0,y_0)\cdot k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Definido en un punto (x_0, y_0)

EJEMPLO

Determinar si la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es diferenciable

Hay que calcular el límite anterior en el (0,0)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f\big((h,k)-(0,0)\big)-f(0,0)-\frac{df}{dx}(0,0)\cdot h-\frac{df}{dy}(0,0)\cdot k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Debemos calcular las derivadas parciales:

La derivada parcial respecto de x coincide con la derivada direccional en el vector (1,0)

$$f'_x = D_1 = \left\{\begin{matrix} P(0,0) \\ v=(1,0) \end{matrix}\right\} \to f\big((0,0)+h(1,0)\big) = f(h,0) = \frac{0}{h} = 0$$

El límite direccional es $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(P+hv)-f(P)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$$f'_y = D_2 = \left\{\begin{matrix} P(0,0) \\ v=(0,1) \end{matrix}\right\} \to f\big((0,0)+h(0,1)\big) = f(0,h) = \frac{0}{h} = 0$$

El límite direccional es $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(P+hv)-f(P)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

Por tanto, el límite de la diferenciabilidad queda:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f\big((h,k)\big)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \frac{\frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} \to \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2hk}{h^2+k^2} \xrightarrow{k=mh} \lim_{h\to 0} \frac{2hmh}{h^2+(mh)^2}$$

$$\to \lim_{h\to 0} \frac{2mh^2}{h^2(1+m^2)} \to \frac{2m}{1+m^2}$$

El límite depende de m, no existe y por tanto la función no es diferenciable.

Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\cdot y^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Determinar si f es diferenciable en (0,0)

Calculamos primero sus derivadas parciales:

$$\left.\begin{matrix} P=(0,0) \\ v=(1,0) \end{matrix}\right\} P+hv = (0,0)+h(1,0) = (h,0) \to f(P+hv) = f(h,0) = \frac{h\cdot 0}{h^2+0} = 0$$

$$\frac{df}{dx} = D_{(1,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(P+hv)-f(P)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \to 0$$

$$\left.\begin{matrix} P=(0,0) \\ v=(0,1) \end{matrix}\right\} P+hv = (0,0)+h(0,1) = (0,h) \to f(P+hv) = f(0,h) = \frac{0\cdot h^2}{0+h^4} = 0$$

$$\frac{df}{dy} = D_{(0,1)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(P+hv)-f(P)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \to 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|f\big((h,k)-(x_0,y_0)\big)-f(x_0,y_0)-\frac{df}{dx}(x_0,y_0)\cdot h-\frac{df}{dy}(x_0,y_0)\cdot k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|\frac{h\cdot k^2}{h^2+k^4}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = (k=mh) = \lim_{h\to 0} \frac{\left|\frac{h\cdot(mh)^2}{h^2+(mh)^4}\right|}{\sqrt{h^2+(mh)^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|m^2h^3|}{h^2(1+m^4h^2)h\sqrt{1+m^2}} \to \frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}$$

El límite depende de m, no existe y por tanto la función no es diferenciable.

POLINOMIO DE TAYLOR.

Al igual que en funciones de una variable, el polinomio de Taylor nos permite convertir cualquier función en un polinomio en el entorno de un punto. Lo que también se conoce como desarrollo en potencias de la función.

La expresión de Taylor es un polinomio infinito donde vamos a aproximar en función de la exactitud que se requiera, es decir, nos deben decir a que grado del polinomio se debe aproximar.

En funciones de varias variables lo normal es acabar en grado 1 o 2 por la extensión de la fórmula:

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df}{dx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{df}{dy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2f}{dx^2}(x_0,y_0)\cdot (x-x_0)^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{d^2f}{dy^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right]$$

En esta fórmula aparecen las derivadas primeras y segundas de la función, por lo que también se puede expresar en forma de gradiente y Hessiana.

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x,y)\cdot(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}[(x-x_0,y-y_0)^t Hf(x,y)(x-x_0,y-y_0)]$$

EJEMPLOS

a) Desarrollar en potencia de (x-1) y (y+1), el polinomio x^2+xy^2+xy

Es una forma de pedirnos que se desarrolle el polinomio de Taylor. Buscamos las derivadas en el punto $(1,-1)$

$$f(1,-1)=1 \qquad \frac{df}{dx}=2x+y^2+y\to 2 \qquad \frac{df}{dy}=2xy+x\to -1$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=2 \qquad \frac{d^2f}{dy^2}=2x\to 2 \qquad \frac{d^2f}{dxdy}=2y+1\to -1$$

Aplicamos la fórmula del polinomio de Taylor para el desarrollo en potencias.

$$P(x,y)=1+2(x-1)-(y+1)+\frac{1}{2}[2(x-1)^2-2(x-1)(y+1)+2(y+1)^2]$$

$$P(x,y)=1+2(x-1)-(y+1)+(x-1)^2-(x-1)(y+1)+(y+1)^2$$

b) Sea la función $f(x,y)=x^2e^y$ obtener el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(-1{,}0)$

Valor de la función en el punto $f(-1{,}0)=1$

Buscamos las derivadas de la función

$$\frac{df}{dx}=2xe^y\to \frac{df}{dx}(P)=2\cdot(-1)e^0=-2$$
$$\frac{df}{dy}=x^2e^y\to \frac{df}{dy}(P)=(-1)^2e^0=1$$

El gradiente es $\nabla f(-1{,}0)=(-2{,}1)$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=2e^y\to \frac{d^2f}{dx^2}(P)=2e^0=2 \qquad \frac{d^2f}{dy^2}=x^2e^y\to \frac{d^2f}{dy^2}(P)=(-1)^2e^0=1$$

$$\frac{d^2f}{dxdy}=2xe^y\to \frac{d^2f}{dxdy}(P)=2(-1)e^0=-2$$

La matriz Hessiana es $Hf(-1{,}0)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Con estos datos construimos el polinomio de Taylor en el punto

$$P(x,y)=f(x_0,y_0)+\nabla f(x,y)\cdot(x-x_0,y-y_0)+\frac{1}{2}[(x-x_0,y-y_0)^tHf(x,y)(x-x_0,y-y_0)]$$

$$P(x,y)=1+(-2{,}1)\cdot(x+1,y)+\frac{1}{2}\left[(x+1,y)^t\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}(x+1,y)\right]$$

$$P(x,y)=1-2(x+2)-(y+1)+\frac{1}{2}(2x+4-2y-2,-2x-4+y+1)\cdot(x+2,y+1)$$

$$P(x,y)=-4-2x-y+\frac{1}{2}(2x^2+4x-2yx-4y+2x+4-2xy-2x+y^2+y-3y-3)$$

$$P(x,y) = -4 - 2x - y + \frac{1}{2}(2x^2 + y^2 + 4x - 4xy - 6y + 1)$$

$$P(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy - 4y - \frac{7}{2}$$

FUNCIÓN IMPLÍCITA.

La forma habitual de expresar una función en una ecuación es mediante una igualdad a 0.

$$xy - x^2 + 4y^2 + 1 = 0$$

En esta ecuación tenemos la función $f(x,y) = xy - x^2 + 4y^2 + 1$ que cuando la tenemos de esta forma expresada se llama forma **explícita.** Y se puede escribir como $z = f(x,y)$ para indicar que tenemos una función (z) de dos variables (x,y).

Pero a veces nos podemos encontrar una función escrita de la siguiente manera:

$$e^z + 3xz - 2lnyz + 5 = 0$$

Donde z sigue siendo la función de dos variables y (x,y) las variables, pero en este caso no sabemos quien es z ya que no se puede despejar de la ecuación.

En estos casos es cuando se dice que la función está expresada en forma **implícita.** Y se escribe como $F(x,y,z) = 0$

Observamos la diferencia en la escritura:

- Forma explícita $z = f(x,y)$ Se ve claro la diferencia entre z y las variables.
- Forma implícita $F(x,y,z) = 0$. No se visualiza tan claro la diferencia, por eso a veces nos especifican función implícita respecto a z, pero también podría ser respecto a x en ese caso la función sería x y las variables y, z o respecto a y, en este caso la función sería y y las variables x, z. Hay que estar atento al enunciado.

El interés de la función implícita radica en la operación de su derivada, ya que aún sin conocer cuál es la función z si podemos calcular su derivada en un punto.

Para ello usaremos el Teorema de Función Implícita:

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Sea una función diferenciable $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y la función $F(x,y,z)$ un punto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Si se cumple que:

a) $F(P) = 0$

b) Existen las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$

c) La derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$

Entonces se puede decir que z define la función implícita respecto de las variables x, y

Y además sus derivadas parciales se pueden calcular como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

EJEMPLOS

a) Se considera la función $3xz - 8y^3 - z^3 + 6z = 3$. Demuestre que la ecuación anterior define una función diferenciable $z(x, y)$ en un entorno del punto (2,1,1) y obtener sus derivadas parciales

En primer lugar, obtenemos la función de la ecuación.

$$F(x, y, z) = 3xz - 8y^3 - z^3 + 6z - 3$$

Y comprobamos ahora que se cumplen las tres condiciones del teorema.

1. $F(P) = F(2,1,1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 - 8(1)^3 - (1)^3 + 6 \cdot 1 - 3 = 12 - 12 = 0$
2. $\partial F/\partial x = 3z$

   $\partial F/\partial y = -24y^2$

   Las derivadas parciales son polinómicas por tanto siempre están definidas.
3. $\partial F/\partial z = 3x - 3z^2 + 6 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,1) = 6 - 3 + 6 = -3 \neq 0$

Se cumplen las tres condiciones por tanto podemos decir que $z(x, y)$ es una función implícita en el entorno del punto $P = (2,1,1)$

Para el cálculo de su derivada aplicamos las expresiones del teorema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3z}{3x - 3z^2 + 6} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = \frac{24\, y^2}{3x - 3z^2 + 6}$$

No obstante, las derivadas parciales también se pueden calcular si lo hacemos de forma implícita directamente, es decir, reconociendo una vez aplicado el teorema que z es función y x, y variables.

Esto quiere decir que cada vez que nos encontremos z en la ecuación hay que derivarla como función, ya que lleva implícito las variables, por tanto, la derivada de z es $z´$, Mientras que las variables x, y sus derivadas serían 1 si se derivan respecto a ellas mismas.

Teniendo esto en cuenta podemos derivar implícitamente de la siguiente forma.

$$3xz - 8y^3 - z^3 + 6z = 3$$

- Derivamos respecto de x

$$3z + 3x\frac{\partial z}{\partial x} - 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Observamos que el primer término $(3xz)$ lo hemos derivado como un producto donde la derivada de z es $z´ = \frac{\partial z}{\partial x}$ luego el término $z^3 + 6z$ se deriva como un polinomio.

Ahora solo debemos simplificar y despejar $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$(3x - 3z^2 + 6)\frac{\partial z}{\partial x} = -3z \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3z}{3x - 3z^2 + 6}$$

- Derivamos respecto de y

$$3x\frac{\partial z}{\partial y} - 24y^2 - 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(3x - 3z^2 + 6)\frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{24y^2}{3x - 3z^2 + 6}$$

Y observamos que obviamente obtenemos el mismo resultado.

b) Se considera la función $zx^2 + e^{-xz} + yz = 0$ Demostrar que esta ecuación define una función $z(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto $P = (0, -1)$ tal que $z(0, -1) = 1$

Una función de clase C^1 quiere decir que es derivable al menos en su primera derivada.

Vamos a comprobar las condiciones del teorema sobre la función $F(x, y, z) = zx^2 + e^{-xz} + yz$

1. $F(P) = F(0, -1, 1) = 0 + e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
2. $\partial F/_{\partial x} = 2xz - ze^{-xz}$

   $\partial F/_{\partial y} = z$

   Las derivadas parciales son polinómicas y exponenciales por tanto siempre están definidas.
3. $\partial F/_{\partial z} = x^2 - xe^{-xz} + y \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0, -1, 1) = 1 \neq 0$

Se cumplen las tres condiciones por tanto podemos decir que $z(x,y)$ es una función implícita en el entorno del punto $P=(0,-1,1)$

Y las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{{}^{\partial F}/_{\partial x}}{{}^{\partial F}/_{\partial z}} = -\frac{2xz - ze^{-xz}}{x^2 - xe^{-xz} + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{{}^{\partial F}/_{\partial y}}{{}^{\partial F}/_{\partial z}} = -\frac{z}{x^2 - xe^{-xz} + y}$$