uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

Matemáticas para la Economía II (Grados Empresa)

Paula Rosado Jiménez

Optimización

5. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

DETERMINACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Se dice que f alcanza en (x_0, y_0) un máximo (mínimo) relativo si existe un entorno de (x_0, y_0) de manera que para todo (x, y) perteneciente a dicho entorno se verifica $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $[f(x, y) \geq f(x_0, y_0)]$.

Los máximos y mínimos relativos de f se denominan conjuntamente extremos relativos de f .

- Condición necesaria de la primera derivada

  Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y f alcanza un extremo relativo en un punto (x_0, y_0) entonces las derivadas parciales de f en el punto se anulan.

  Los puntos que cumplen esta condición se denominan **puntos críticos** y se obtienen resolviendo el sistema que se forma con la igualdad a 0 de las derivadas parciales.

  Los puntos críticos pueden ser extremos relativos (máximos o mínimos) y puntos de silla.

- Condición suficiente de la segunda derivada.

  Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y el punto $P = (x_0, y_0)$ un punto crítico y la matriz Hessiana $H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ Se cumple que:

$$|H(x_0, y_0)| > 0 \to \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0 \; El\ punto\ P\ es\ mínimo\ relativo \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0 \; El\ punto\ P\ es\ máximo\ relativo \end{cases}$$

$$|H(x_0, y_0)| < 0 \to P\ es\ un\ punto\ de\ silla$$

$$|H(x_0, y_0)| = 0 \to El\ criterio\ no\ es\ concluyente$$

EJEMPLOS

1. Optimizar la función $f(x, y) = \ln(1 - x^2) - 2y^2$

   Calculamos el sistema formado por sus derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{df}{dx} \equiv \frac{-2x}{1-x^2} = 0 \\ \frac{df}{dy} \equiv -4y = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \; El\; punto\; crítico\; es\; P(0,0)$$

Obtenemos ahora las segundas derivadas para conformar la matriz Hessiana.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-2(1-x^2)+2x(-2x)}{(1-x^2)^2} \overset{(0,0)}{\rightarrow} \frac{d^2f}{dx^2}(0,0) = -2$$

$$\frac{d^2f}{dydx} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = -4$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Según el criterio visto de la segunda derivada, tenemos:

$$|H(0,0)| = 8 > 0 \quad y \quad \frac{d^2f}{dx^2}(0,0) = -2 < 0$$

El punto P = (0,0) es un máximo relativo

2. Sea la función $f(x,y) = xe^y - e^x$ obtener sus puntos críticos

Calculamos el sistema formado por sus derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{df}{dx} \equiv e^y - e^x = 0 \\ \frac{df}{dy} \equiv xe^y = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} e^x = e^y \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = y, entoces\; el\; punto\; crítico\; es\; P(0,0)$$

Obtenemos ahora las segundas derivadas para conformar la matriz Hessiana.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -e^x \overset{(0,0)}{\rightarrow} \frac{d^2f}{dx^2}(0,0) = -1$$

$$\frac{d^2f}{dydx} = e^y \overset{(0,0)}{\rightarrow} \frac{d^2f}{dydx}(0,0) = 1 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = xe^y \overset{(0,0)}{\rightarrow} \frac{d^2f}{dx^2}(0,0) = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Según el criterio visto de la segunda derivada, tenemos:

$$|H(0,0)| = -1 < 0$$

El punto P = (0,0) es un punto de silla

3. Considere la función $f(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$ donde a $a \neq 0$ es un parámetro.

   Determinar los puntos críticos en función del parámetro a.

$$\frac{df}{dx} \equiv 3ay - 3x^2 = 0 \to y = \frac{x^2}{a} \ sabemos\ que\ a \neq 0$$

$$\frac{df}{dy} \equiv 3ax - 3y^2 = 0 \quad sustituimos\ la\ y\ obtenida\ en\ \frac{df}{dx}$$

$$ax - \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 0 \to ax - \frac{x^4}{a^2} = 0 \to a^3x - x^4 = 0 \ \to x(a^3 - x^3) = 0 \ \to \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Volviendo $y = \frac{x^2}{a} \to \begin{cases} \cdot Si\ x = 0 \to y = 0 \to P_1 = (0,0) \\ \cdot Si\ x = a \to y = a \to P_2 = (a,a) \end{cases}$

Tenemos dos puntos críticos.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -6x \qquad \frac{d^2f}{dydx} = 3a \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = -6y$$

$$H = \begin{pmatrix} -6x & 3a \\ 3a & -6y \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos para los dos puntos:

$$P_1 = (0,0) \to H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{pmatrix} \qquad |H(0,0)| = -9a^2 < 0$$

$$El\ punto\ (0,0)\ es\ un\ punto\ de\ silla.$$

$$P_2 = (a,a) \to H(a,a) = \begin{pmatrix} -6a & 3a \\ 3a & -6a \end{pmatrix}$$

$$|H(a,a)| = 36a^2 - 9a^2 = 25a^2 > 0 \quad y \quad \frac{d^2f}{dx^2}(a,a) = -6a \to \begin{cases} > 0\ si\ a < 0 \\ < 0\ si\ a > 0 \end{cases}$$

El punto $P_2 = (a,a)$ es máximo si $a > 0$ y mínimo en caso de que $a < 0$

4. Considere la función $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + 2xy - 16x + \frac{y^2}{2} - 2y - 4$. Determinar si la función tiene puntos críticos y clasificarlos

$$\frac{df}{dx} \equiv 3x^2 + 4x + 2y - 16 = 0$$

$$\frac{df}{dy} \equiv 2x + y - 2 = 0 \ \to y = 2 - 2x \ \ sustituimos\ en\ la\ \frac{df}{dx}$$

$$3x^2 + 4x + 2(2 - 2x) - 16 = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to 3x^2 = 12 \to x = \pm 2$$

Para $x = 2 \to y = 2 - 4 = -2 \to P_1 = (2,-2)$

Para $x = -2 \to y = 2 + 4 = 6 \to P_2 = (-2,6)$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x + 4 \qquad \frac{d^2f}{dxdy} = 2 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 6x + 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos para los dos puntos:

$$P_1 = (2,-2) \rightarrow H = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |H(2,-2)| = 12 > 0 \ \ y \ \ \frac{d^2 f}{dx^2} = 16 > 0$$

El punto $P_1 = (2,-2)$ es un mínimo relativo.

$$P_2 = (-2{,}6) \rightarrow H = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |H(-2{,}6)| = -12 < 0$$

El punto $P_2 = (-2{,}6)$ es un punto de silla

FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS.

Una matriz se pude considerar como:

- Definida positiva o Semidefinida positiva
- Definida negativa o Semidefinida negativa
- Indefinida

Existen dos criterios para esta clasificación.

- Criterio de los autovalores:
    - Una matriz se considera definida positiva si todos sus autovalores son positivos
    - Una matriz se considera semidefinida positiva si todos sus autovalores son positivos o ceros.
    - Una matriz se considera definida negativa si todos sus autovalores son negativos.
    - Una matriz se considera semidefinida negativa si todos sus autovalores son negativos o ceros.
    - Una matriz se considera indefinida si tiene autovalores positivos y negativos
- Criterio de los menores principales:

Los menores complementarios de una matriz son los determinantes de diferentes órdenes que se pueden obtener desde la diagonal principal. Por ejemplo, en la matriz simétrica:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Contamos con 3 menores principales:

Menor de orden 1 $\Delta_1 = a$

Menor de orden 2 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}$

Menor de orden 3 $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$

- Una matriz se considera definida positiva si todos sus menores principales son positivos

- Una matriz se considera semidefinida positiva si todos sus menores principales son positivos y el último 0. O bien si un menor es 0, a partir de él todos son 0 y loas anteriores positivos. Secuencia de signo de los menores + + + + 0…0

- Una matriz se considera definida negativa si los menores principales llevan la secuencia alterna de signos, empezando por negativo. - + - + - + - +

- Una matriz se considera semidefinida negativa si los menores principales llevan la secuencia alterna de signos, empezando por negativo y cuando aparezca uno que es 0, todos a partir de él son 0. - + - + - + - + 0 … 0

- Una matriz se considera indefinida si los menores principales llevan alguna secuencia de signos diferentes a las anteriores.

Una vez que tenemos definida cuando una matriz es definida positiva, negativa e indefinida, podemos concretar ya cuando una función de dos variables es cóncava o convexa.

- Una función $f(x, y)$ es **cóncava** cuando la matriz Hessiana de la función es definida o semidefinida negativa.

- Una función $f(x,y)$ es **convexa** cuando la matriz Hessiana de la función es definida o semidefinida positiva

Ejemplos

1. Considere la función $f(x,y) = 2x + y - lnx - lny$ determinar si es cóncava o convexa

La función es una composición de funciones, polinómicas y logarítmicas, las que presentan problemas de definición son las logarítmicas, concretamente se definen en la parte positiva de las variables, por tanto: $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0.\ y > 0\}$

Para determinar las regiones de concavidad, necesitamos realizar las derivadas segundas para obtener la matriz Hessiana y clasificarla:

$$\frac{df}{dx} = 2 - \frac{1}{x} \qquad \frac{df}{dy} = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \qquad \frac{d^2f}{dxdy} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \text{ los menores de esta matriz son } \begin{matrix} \Delta_1 = \frac{1}{x^2} \\ \Delta_2 = |H| = \frac{1}{(xy)^2} \end{matrix}$$

Los dos menores son positivos, entonces, la matriz Hessiana es definida positiva, la función es convexa en todo su dominio.

2. Dado $a \in R$ se considera la función $f(x,y) = ax^2 + ay^2 - 6x + (a-1)x^2$

Estudiar la concavidad y la convexidad de $f(x,y)$ según los valores del parámetro a

Necesitamos calcular la matriz Hessiana para clasificarla.

$$\frac{df}{dx} = 2ax - 6 + 2(a-1)x \qquad \frac{df}{dy} = 2ay$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2a + 2(a-1) = 4a - 2 \qquad \frac{d^2f}{dxdy} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 2a$$

$$H = \begin{pmatrix} 4a-2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Menores principales:

$$\Delta_1 = 4a - 2 \qquad \Delta_2 = 8a^2 - 4a$$

Estudiamos el signo de cada uno de ellos.

$$\Delta_1 > 0 \rightarrow 4a - 2 > 0 \rightarrow a > \frac{1}{2}$$

$$\Delta_2 = 8a^2 - 4a = 4a(2a-1) se\ anula\ para\ a = 0\ y\ a = 1/2$$

	$\boldsymbol{a < 0}$	$\boldsymbol{a = 0}$	$\boldsymbol{0 < a < 1/2}$	$\boldsymbol{a = 1/2}$	$\boldsymbol{a > 1/2}$
$\boldsymbol{\Delta_1}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\boldsymbol{\Delta_2}$	$+$	0	$-$	0	$+$
FORMA	Definida Negativa	Semidefinida Negativa	Indefinida	Indefinida	Definida Positiva

La función es cóncava cuando $a \leq 0$ y es convexa cuando $a > 1/2$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Los problemas de optimización visto hasta ahora se han aplicado a funciones en su dominio de definición. También nos podemos encontrar funciones encerradas en un recinto o condicionadas por otras. Tenemos entonces una función objetivo a optimizar $f(x,y)$ y otra función que nos condiciona en que puntos del plano se estudia la optimización, $g(x,y) = 0$

En este caso aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange λ.

Lo que hacemos en primer lugar es construir una nueva función llamada *Lagrangiano* $\mathcal{L}(x,y)$ que une a las dos funciones mediante el multiplicador de Lagrange, y a esta función lagranganiano es a la que se le aplica los criterios necesarios y suficientes para obtener los máximos y mínimos en los recintos determinados.

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

EJEMPLOS

1. Sean las funciones $f(x,y) = xy \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 8$ Calcular y clasificar los puntos críticos de $f(x,y)$

   En primer lugar, calculamos el Lagrangiano.

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

A esta función aplicamos la condición necesaria:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} \equiv y - 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} \equiv x - 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial \lambda} \equiv x^2 + y^2 - 8 = 0 \quad (3)$$

Resolvemos el sistema.

De (1) $2\lambda = \frac{y}{x}$ y de (2) $2\lambda = \frac{x}{y}$ igualando ambas ecuaciones $\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow x^2 = y^2$

De esta igualdad tenemos que $y = \pm x$

Sustituyendo estos dos casos en (3) tenemos:

- $y = x \rightarrow x^2 + x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x = \pm 2$ En este caso hemos encontrado dos puntos: $P_1 = (2,2)$ $P_2 = (-2,-2)$ Y en este supuesto como $2\lambda = \frac{x}{y} \rightarrow \lambda = \frac{x}{2y}$

  $\lambda = \frac{1}{2}$ para cada punto

- $y = -x \rightarrow x^2 + (-x)^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x = \pm 2$ En este caso hemos encontrado dos puntos: $P_3 = (2,-2)$ $P_4 = (-2,2)$ Y como $2\lambda = \frac{x}{y} \rightarrow \lambda = \frac{x}{2y}$

  $\lambda = \frac{-1}{2}$ para cada punto

Para la clasificación de los puntos necesitamos ahora comprobar la condición suficiente a partir de la matriz Hessiana de las variables, no se incluye el multiplicador de Lagrange.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} \equiv y - 2\lambda x \qquad \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} \equiv x - 2\lambda y$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2} \equiv -2\lambda \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x \partial y} \equiv 1 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial y^2} \equiv -2\lambda$$

$$H = \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$|H| = 4\lambda^2 - 1, \text{como } \lambda = \pm\frac{1}{2} \rightarrow |H| = 0$$

El criterio no es concluyente para determinar el tipo de punto crítico que se obtiene, ahora bien, si nos vamos al criterio de los menores para determinar la concavidad y convexidad, tenemos la siguiente conclusión.

Para los puntos P_1 y P_2 tenemos que $\lambda = \frac{1}{2}$ entonces $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de donde los menores son $\Delta_1 = -1 < 0$ y $\Delta_2 = 0$ por tanto la serie de signo es $-$ 0 que nos indica que es semidefinida negativa, entonces cóncava, lo que nos induce a pensar que en esos puntos hay máximos. Pero al ser semidefinida, hay que decir que son puntos dudosos.

Lo mismo ocurre en los puntos P_3 y P_4 pero con respecto al mínimo. Por que ahora que $\lambda = \frac{-1}{2}$ entonces $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de donde los menores son $\Delta_1 = 1 > 0$ y $\Delta_2 = 0$ por tanto la serie de signo es $+$ 0 que nos indica que es semidefinida positiva, entonces convexa, lo que nos induce a pensar que en esos puntos hay mínimos. Pero, de nuevo como es semidefinida los puntos son dudosos.

2. Se considera el problema de optimizar la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$ en el conjunto $A = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$

   En primer lugar, calculamos el lagranganiano.

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy \ - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

   A esta función aplicamos la condición necesaria:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} \equiv 2x + 3y - 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} \equiv 2y + 3x - 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial \lambda} \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

   Resolvemos el sistema.

De (1) $\lambda = \frac{2x+3y}{2x}$ y de (2) $\lambda = \frac{2y+3x}{2y}$ Igualando $\frac{2x+3y}{2x} = \frac{2y+3x}{2y} \to 2xy + 3y^2 = 2xy + 3x^2$

De esta igualdad tenemos que $y = \pm x$

Sustituyendo estos dos casos en (3) tenemos:

- $y = x \rightarrow x^2 + x^2 - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ En este caso hemos encontrado dos puntos: $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $P_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ Y en este supuesto como

$$\lambda = \frac{2x + 3y}{2x};\ como\ y = x \rightarrow \lambda = \frac{5}{2}\ para\ cada\ punto$$

- $y = -x \rightarrow x^2 + (-x)^2 - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ En este caso hemos encontrado dos puntos: $P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ $P_4 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Y como

$$\lambda = \frac{2x + 3y}{2x};\ como\ y = -x \rightarrow \lambda = \frac{-1}{2}\ para\ cada\ punto$$

Matriz Hessiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} \equiv 2x + 3y - 2\lambda x \qquad \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} \equiv 2y + 3x - 2\lambda y$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2} \equiv 2 - 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x \partial y} \equiv 3 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial y^2} \equiv 2 - 2\lambda$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda & 3 \\ 3 & 2 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

Aplicamos a cada punto:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lambda = \frac{5}{2} \rightarrow H = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \ |H| = 0\ y\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2} < 0$$

$$P_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lambda = \frac{5}{2} \rightarrow H = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \ |H| = 0\ y\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2} < 0$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lambda = \frac{-1}{2} \rightarrow H = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \ |H| = 0\ y\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2} > 0$$

$$P_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lambda = \frac{-1}{2} \rightarrow H = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \ |H| = 0\ y\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2} > 0$$

En todos los casos $|H| = 0$ esto nos indica que el criterio no es concluyente del todo, los puntos son dudosos, se ha indicado también el valor del primero menor principal, de esa forma parece que los puntos P_1, P_2 parece que son máximo relativo, y los puntos P_3, P_4 mínimos relactivos.

3. $\begin{array}{cc} \max\,(min) & (x+2y)^2 \\ s.a. & 2x^2+y^2=4 \end{array}$

En este ejercicio nos piden optimizar la función $f(x,y)=(x+2y)^2$ sujeto a las condiciones de $2x^2+y^2=4$

Aplicamos los multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)=(x+2y)^2\ -\lambda(2x^2+y^2-4)$$

A esta función aplicamos la condición necesaria:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,y)}{\partial x}\equiv 2(x+2y)-4\lambda x=0\quad(1)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,y)}{\partial y}\equiv 4(x+2y)-2\lambda y=0\quad(2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,y)}{\partial \lambda}\equiv 2x^2+y^2-4=0\quad(3)$$

Resolvemos el sistema.

De (1) $2(x+2y)-4\lambda x=0\quad\rightarrow 2(x+2y)=4\lambda x$

De (2) $4(x+2y)-2\lambda y=0\quad\rightarrow 2(x+2y)=\lambda y$

Igualando $4\lambda x=\lambda y\ \rightarrow y=4x$ Sustituimos en (3) $2x^2+(4x)^2-4=0\rightarrow 18x^2=4$

$$x^2=\frac{2}{9}\rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como $y=4x$ los puntos son $P_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\qquad P_2=\left(\frac{-\sqrt{2}}{3},\frac{-4\sqrt{2}}{3}\right)$

De (2) tenemos $4(x+2y)=2\lambda y\rightarrow\lambda=\frac{2(x+2y)}{y}=como\ y=4x\rightarrow\lambda=\frac{9}{2}$

Para P_1 y P_2 $\lambda=\frac{9}{2}$

Buscamos ahora las segundas derivadas para la matriz Hessiana y poder clasificar los puntos.

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2}\equiv 2-4\lambda\qquad\frac{\partial^2\mathcal{L}(x,y)}{\partial x\partial y}\equiv 4\qquad\frac{\partial^2\mathcal{L}(x,y)}{\partial y^2}\equiv 8-2\lambda$$

$$H=\begin{pmatrix}2-4\lambda & 4\\ 4 & 8-2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & 4\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

Para cada punto tenemos la misma matriz Hessiana ya que el valor del multiplicador es el mismo en ambos. $|H| = 0$ y $\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x,y)}{\partial x^2} < 0$ La matriz Hessiana es semidefinida negativa lo que implica que es cóncava y nos indica que es posible que haya un máximo.