

OpenCourseWare

TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN SISAMÓN

EDUARDO CORRAL ABAD

RAÚL GISMEROS MORENO

MARÍA JESÚS GÓMEZ GARCÍA

JESÚS MENESES ALONSO

HIGINIO RUBIO ALONSO

ABRAHAM VADILLO MORILLAS

Fundamentos de teoría de Máquinas y Mecanismos

1. Mecanismos fundamentales

1. Introducción a la Ciencia de las Máquinas y mecanismos.

La ciencia de las máquinas y mecanismos (MMS) abarca una disciplina de vital importancia para el ingeniero, ya que trata el estudio general de la cinemática y dinámica de las máquinas, así como el conocimiento de los elementos mecánicos que las componen. Esta disciplina es muy importante dentro del currículo del ingeniero y juega un papel crucial en el mundo del futuro. Es la base para el diseño, análisis y optimización de distintos sistemas mecánicos requeridos en industrias como la automotriz, aeroespacial, robótica y de fabricación. En todos estos casos, la MMS proporciona los conocimientos teóricos y prácticos necesarios para comprender, crear e innovar en estos campos.

Entre las competencias que debe tener un ingeniero se encuentran la capacidad de poseer y aplicar conocimientos científicos y tecnológicos de métodos matemáticos, analíticos y numéricos en ingeniería, así como la capacidad de diseñar, analizar y probar máquinas. Estas competencias le permiten proyectar, calcular y diseñar productos, procesos, instalaciones y plantas, además de gestionar, planificar y supervisar equipos multidisciplinarios, y llevar a cabo investigación, desarrollo e innovación en productos, procesos y métodos, entre otros.

La disciplina completa está cubierta por diversas asignaturas dentro de los planes de estudios de ingeniería mecánica, que varían según la universidad y el país, pero que académicamente abarcan las tres partes de la formación de un ingeniero: fundamentos científicos, ingeniería básica y tecnología aplicada a la ingeniería. En los primeros años, los estudiantes se forman en fundamentos de mecánica, dinámica y cinemática, lo que les proporciona una comprensión sólida de conceptos fundamentales como las leyes de Newton y los principios del trabajo y la energía. En cursos superiores, los estudiantes aplican estos conceptos básicos para profundizar en áreas más especializadas como el diseño de mecanismos, la robótica o los elementos de máquinas (sistemas de engranajes, mecanismos de levas, sistemas de bielas).

Otra parte importante en la formación del ingeniero en el campo de la MMS es la práctica de laboratorio y los proyectos de diseño. Estos ejercicios prácticos permiten a los estudiantes aplicar sus conocimientos teóricos a situaciones reales, desarrollando habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el trabajo en equipo. La **construcción y prueba de prototipos** (ver Figura 1), apoyada en las **nuevas tecnologías digitales**, contribuye también a garantizar una **formación integral del ingeniero**.



Figura 1. Equipo de estudiantes en la competición MostoStudent probando el prototipo de moto de competición diseñada por ellos mismos

2. Un poco de historia

Desde la más remota antigüedad, el hombre ha utilizado máquinas

según la Real Academia de la Lengua, en su primera acepción como: “Artificio para aprovechar, dirigir o regular la acción de una fuerza”. Esta definición puede completarse con otras desarrolladas por científicos y organizaciones que han realizado grandes aportaciones a la ciencia de las máquinas y los mecanismos, entre ellos encontramos:

Franz Reuleaux (1829–1905) – Ingeniero mecánico alemán, considerado el padre de la cinemática moderna:

"Una máquina es un sistema de elementos sólidos conectados entre sí, diseñado para transformar, transmitir o modificar movimiento y fuerza con un propósito definido."

Donde destaca el análisis cinemático de los mecanismos y la función de transmisión de movimiento.

Leonardo da Vinci (1452–1519) – Artista, inventor e ingeniero renacentista:

"La máquina es una prolongación de los miembros del hombre."

Una definición más filosófica, que destaca cómo la máquina amplía las capacidades humanas.

Robert Thurston (1839–1903) – Ingeniero estadounidense y primer presidente de la ASME (American Society of Mechanical Engineers):

"Una máquina es un dispositivo mediante el cual se puede aplicar energía para realizar un trabajo útil."

Esta definición introduce el concepto de trabajo útil como objetivo principal de una máquina.

Arthur Morin (1795–1880) – Ingeniero francés y experto en mecánica aplicada:

"Máquina es todo conjunto de cuerpos dispuestos de manera que puedan transformar fuerzas para producir un efecto determinado."

Orientada al estudio de las fuerzas y su transformación, típica de la escuela francesa de mecánica.

IFTOMM (Federación Internacional para la Promoción de la Ciencia de Mecanismos y Máquinas):

"Conjunto de elementos mecánicos interconectados cuya función es modificar, transmitir y/o transformar energía, movimiento o fuerza para realizar una tarea específica."

Esta es una definición moderna, estandarizada, aceptada en el ámbito académico y profesional actual.

Podemos distinguir dos etapas de la Historia de las Máquinas:

- Etapa preindustrial: desde el paleolítico hasta finales del siglo XVIII.
- Etapa industrial: desde la 1ª Revolución Industrial hasta nuestros días.

2.1. Etapa preindustrial

Se considera esta etapa desde la Edad de Piedra (Paleolítico Superior) donde el hombre comienza a usar herramientas.

El Primer invento mecánico significativo fue la rueda (Sumeria, 3500-4000 a.C.), para su uso en carros o de alfarero. Con las primeras civilizaciones avanza la ciencia de las máquinas hacia nuevos artilugios. En la edad antigua, en la Grecia clásica se desarrolló el conocimiento en geometría e inventores como **Arquímedes** o **Herón de Alejandría** desarrollaron ingeniosas máquinas, con un nivel tecnológico muy elevado como por ejemplo el Mecanismo de Antikythera. Por su parte, los romanos desarrollaron aparatos de guerra (onagro, balistas), dispositivos de elevación de grandes cargas (grúa de rueda), máquinas para agricultura y minería, ruedas hidráulicas, instrumentos quirúrgicos, etc. El primer gran tratado de máquinas titulado *De architectura* se lo debemos a **Vitrubio** (Vitrubio, siglo I a.C.).

En la Edad Media, con la caída del imperio romano en occidente se pierde parte del conocimiento mecánico. Los árabes lo conservan y avanzan: los hermanos **Ben Musa** (siglo IX), **Al-Jazari** (siglos XII-XIII), con un tratado con cincuenta artefactos.

Es en 1440, cuando **Gutenberg** crea la imprenta de tipos móviles y cambia la historia.

Con el Renacimiento, la tecnología florece, en especial, la ingeniería mecánica: Bruneleschi, Taccola, Di Giorgi o Leonardo Da Vinci (Códices Atlanticus o Madrid I), en Italia. Juanelo Turriano (el mecanismo de elevación de agua de Toledo o el hombre de palo) o Pedro Juan de Lastanosa (Los veintidós libros de los ingenios y de las máquinas), en España.

Durante el siglo XVI, se suceden tratados de Máquinas: G. Agricola, J. Besson , A. Ramelli, ...

El Siglo XVII, la Mecánica alcanza ya una cierta madurez como ciencia.

Galileo Galilei (1564-1642) formula las leyes del movimiento uniformemente acelerado y la ley del sincronismo del péndulo y se le considera el iniciador de la Dinámica.

C. Huygens (1629-1695) describió los relojes de péndulo e inventó el péndulo cicloidal.

Isaac Newton (1642-1727) formula las tres leyes fundamentales de la Dinámica y enuncia la Ley de la Gravitación Universal.

El Siglo XVIII, L. Euler (1707-1783), establece que el movimiento plano de un sólido puede describirse como la composición de una traslación y una rotación alrededor de un punto.

James Watt (1736-1819), investigó sobre la síntesis de mecanismos: estudió la trayectoria de un punto del acoplador del cuadrilátero articulado y creó un mecanismo que generaba un movimiento rectilíneo aproximado. Estas investigaciones las aplicó a su máquina de vapor.

2.2. Etapa industrial

El Siglo XIX, los conocimientos de Mecánica de Máquinas se consolidan y maduran. La Geometría y el Análisis Matemático contribuyeron notablemente a este progreso.

A. M. Ampère (1775-1836) reconoce la posibilidad de estudiar el movimiento de los mecanismos con independencia de las fuerzas que lo producen, y acuñó el término "cinemática", traducción del vocablo griego que significa movimiento.

G. G. de Coriolis (1792-1843), definió la componente de la aceleración de Coriolis.

La ciencia moderna sobre las máquinas comienza con Franz Reuleaux (1829-1905): Fue el primero en analizar los Mecanismos de modo sistemático y redujo toda máquina a una combinación de componentes: barras, ruedas, levas,

etc. También definió los conceptos de elemento, par (inferior y superior), cadena cinemática, equivalencia cinemática e inversión.

M. Grübler (1851-1935), crea un criterio para determinar la movilidad de los mecanismos planos y espaciales.

R. Willis (1800-1875), propuso un criterio de clasificación de los mecanismos según la relación de transmisión del movimiento entre los elementos de entrada y salida. Además, estableció la relación de velocidades en un sistema de engranajes epicicloidales.

P. Chebyshev (1821-1894), se dedicó al dimensionamiento del cuadrilátero articulado capaz de generar trayectorias rectas y circulares con error mínimo, utilizando los polinomios.

S. Roberts (1827-1893), demostró la existencia de tres tipos diferentes de cuadriláteros articulados capaces de trazar una determinada curva de acoplador (a la vez que Chebyshev).

L. Burmester (1840-1927), a finales del siglo XIX, formuló ciertos principios matemáticos que permiten generalizar y describir el comportamiento cinemático de mecanismos planos e introdujo técnicas geométricas para realizar la síntesis del movimiento de los mecanismos.

Al inicio del **Siglo XX**, la TMM presenta dos vertientes: la Escuelas Alemana, fundada por Burmester se centró en los problemas de síntesis dimensional aplicada a los mecanismos planos; y la Escuela Rusa, donde los discípulos de Chebyshev siguieron sus trabajos en las técnicas de ajustes y aproximación de curvas.

Finalizada la 2ª Guerra Mundial, la Escuela Americana (A. Svboda, J.A. Hrones y G.L. Nelson) empezó a usar los computadores, para lo cual se fomentó el desarrollo de nuevos métodos algebraicos y numéricos, mucho más generales que los métodos gráficos previamente utilizados.

En la década de los 50 se comienzan a introducir las computadoras digitales en la industria y la programación en los estudios de ingeniería en las universidades y en los 60 varios investigadores y sus grupos desarrollaron programas: **Allen S. Hall Jr.**, en la Universidad de Purdue; **C.W. McLarnan**, en la Universidad del Estado de Ohio; **J.E. Shigley**, en la Universidad de Michigan; **F. Freudenstein**, en la Universidad de Columbia; y **J. Denavit y R. Hartenberg**, en la Universidad de Northwestern.

F. Freudenstein (1926–2006) puede considerarse el “padre de la cinemática moderna”. Freudenstein revisó los primeros programas de computadora desarrollados para el diseño de mecanismos (anteriores a 1961) y aplicó la computación a la síntesis cinemática de mecanismos: adaptó las técnicas con base gráfica sugeridas por Burmester en 1876 y las reformuló para obtener la solución por computadora. En su Tesis Doctoral desarrolló la conocida “Ecuación de Freudenstein”, donde usa un método algebraico simple para determinar la síntesis de función de un cuadrilátero articulado. Además, complementó la Ecuación de Freudenstein con el método de Sandor (y sus extensiones) para la síntesis óptima

A finales de los 60, se empezaron a resolver problemas de síntesis en modo de lote con la computadora, con técnicas que usaban puntos de precisión o técnicas de optimización. La computación cambió lentamente del modo de lote al modo interactivo, lo que constituyó un paso importante en hacer las técnicas más útiles a los diseñadores.

A partir de los años 80, se avanzó en el principio de la integración del análisis, síntesis y dinámica de los mecanismos (dinámica multicuerpo, con autores como **J. García de Jalón, P. Nikravesh o A.A. Shabana**) con otras áreas del diseño ayudado por computador, como el dibujo, los elementos finitos y la simulación. Posteriormente

En la actualidad, se dispone de un impresionante conjunto de herramientas para el análisis y diseño óptimo de mecanismos

3. Esquema general de un conjunto mecánico con sus elementos y sistemas auxiliares.

El Sistema Mecánico aborda mucho más que el propio concepto de máquina, los sistemas incluyen subsistemas auxiliares y elementos adicionales que permiten el correcto funcionamiento de la máquina con el objetivo de conseguir el óptimo funcionamiento de la misma.

En la Figura 2 se presenta el esquema general de un sistema mecánico completo, donde se identifican dos partes fundamentales de la máquina en sí: el sistema transmisor (que sería la máquina en sí por definición) y el sistema de sustentación, o parte estructural de la máquina que soporta su peso y la mantienen en una posición estable durante su funcionamiento, permitiendo su correcto funcionamiento bajo diversas condiciones de carga.

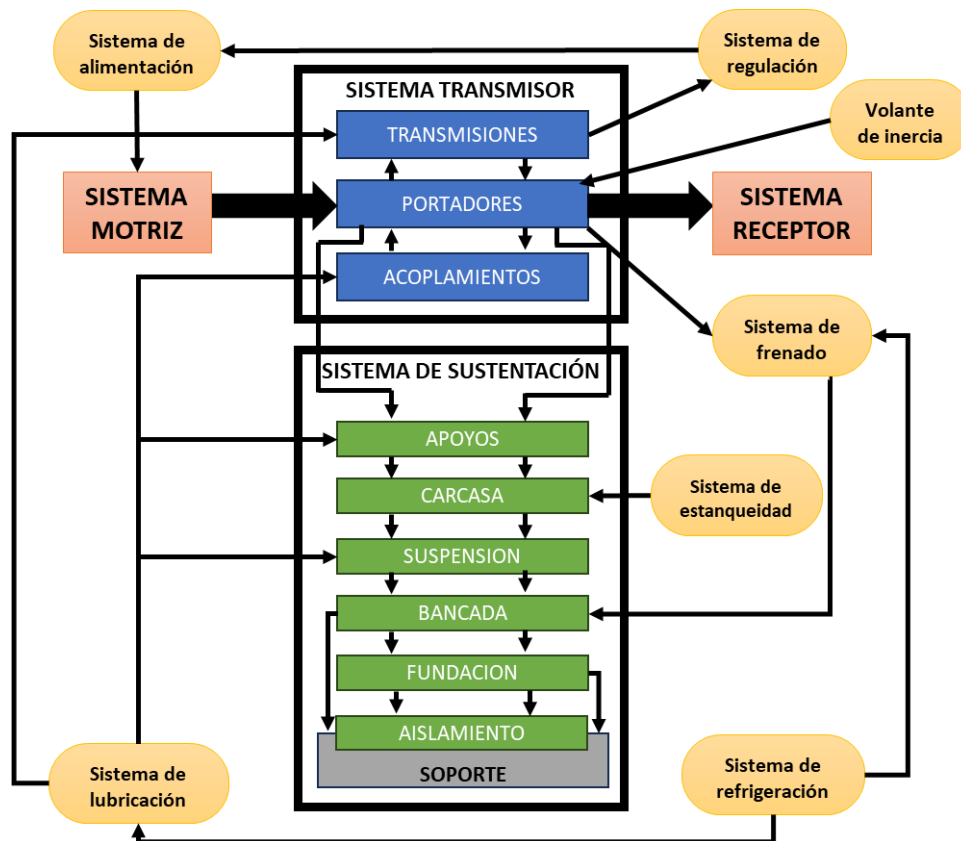


Figura 2. Esquema general de un conjunto mecánico

Dentro del sistema transmisor distinguimos tres elementos:

1. Transmisiones: mecanismos encargados de transmitir y transformar el movimiento y los esfuerzos desde una fuente (sistema motriz) para vencer los esfuerzos requeridos por el sistema receptor. Los sistemas de transmisión se clasifican en:
 - a. Transmisiones rígidas: formadas por eslabones rígidos unidos entre sí con movimientos relativos entre ellos que transmiten el movimiento (o esfuerzos), dentro de este tipo se encuentran los

- engranajes y trenes de engranajes, las ruedas de fricción, los mecanismos de leva-seguir y los eslabonamientos articulados, entre otros
- b. Transmisiones flexibles: donde uno de los elementos que forma parte del sistema es flexible como es el caso de las cadenas, correas y cables.
- 2. Elementos portadores: son los encargados de transmitir el movimiento del sistema motriz a la entrada de la transmisión y de la salida del sistema de transmisión al sistema receptor. Estos en la mayoría de los casos son ejes o árboles que transmiten los movimientos de rotación.
- 3. Acoplamientos: que permiten unir los elementos portadores con los sistemas de entrada y salida. Según su aplicación pueden ser acoplamientos permanentes o temporales (embragues).

4. Dinámica de máquinas

La dinámica de máquinas se encarga de estudiar los esfuerzos (fuerzas y momentos) aplicados sobre los mecanismos que producen el movimiento. Estos esfuerzos se transmiten desde el sistema motriz hasta el sistema receptor a través de los eslabones del mecanismo. Existen diferentes tipos de esfuerzos según su naturaleza:

- Las del propio peso de los eslabones de la máquina debido a la fuerza de la gravedad $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$
- Cargas externas, debido a las cargas proporcionadas por el sistema motriz u otras
- Esfuerzos resistentes debidas al sistema receptor y que se denominan resistencias pasivas
- Los esfuerzos que aparecen cuando los miembros del mecanismo tienen movimiento acelerado, y que se denominan esfuerzos de inercia $\vec{J} = -m \cdot \vec{a}$ y $\vec{M}_I = -I_G \cdot \vec{\alpha}$

La aparición de las resistencias pasivas afecta al rendimiento de la máquina, definiéndose éste como el cociente entre el trabajo útil (W_{util}) obtenido a la salida de la máquina dividido entre el trabajo motriz (W_{motriz}) recibido por el sistema motriz.

$$\eta = \frac{W_{util}}{W_{motriz}} = \frac{W_{util}}{W_{util} + W_{res pas}}$$

5. Resistencias pasivas en pares elementales

Para poder estimar las resistencias pasivas que aparecen en la máquina como consecuencia de tener elementos en contacto con movimiento relativo entre ellos a través de los pares cinemáticos se estudia de manera teórica el contacto entre dos sólidos genéricos ① y ② y se estudian los esfuerzos aplicados en dicho contacto considerando que el contacto es puntual según la Figura 3.

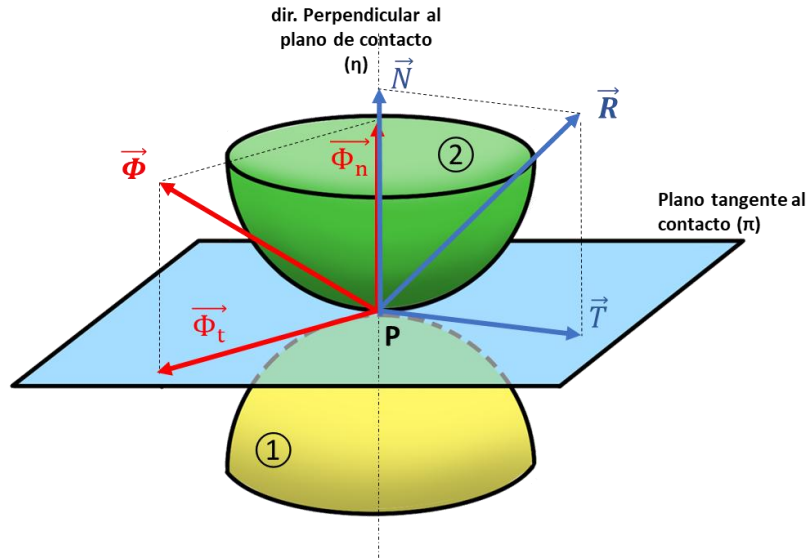


Figura 3. Contacto teórico puntual entre dos sólidos 1 y 2

Considerando que en el punto de contacto P se aplican la fuerza y el par resultantes entre de ambos sólidos denominados $\{\vec{R}, \vec{\Phi}\}$ respectivamente, que produce el movimiento relativo entre los sólidos ① y ②. Cada uno de los dos vectores pueden descomponerse en dos vectores, uno en el plano tangente del contacto π y otro en la dirección perpendicular a dicho plano como en la ecuación (1).

$$\{\vec{R}, \vec{\Phi}\} \Rightarrow \{\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \vec{\Phi} = \vec{\Phi}_t + \vec{\Phi}_n\} \quad (1)$$

Donde:

- $\vec{T}$ es la componente tangencial de la fuerza de contacto que produce el movimiento de deslizamiento relativo entre ① y ②
- $\vec{N}$ es la componente normal de la fuerza de contacto y es la que mantiene ambos elementos en contacto permanente
- $\vec{\Phi}_t$ es la componente tangencial del par que produce el movimiento y este provoca un movimiento relativo de rodadura.
- $\vec{\Phi}_n$ es la componente normal del mismo par y provoca un movimiento relativo de pivotamiento.
- Cuando se produce un movimiento relativo entre dos sólidos aparece un esfuerzo debido al contacto que se opone a ese movimiento siendo el esfuerzo una fuerza cuando el movimiento es de traslación y un par cuando éste es de rotación. En ese sentido y considerando los esfuerzos $\vec{T}$, $\vec{\Phi}_t$ y $\vec{\Phi}_n$, que en el caso más general provocarían el movimiento relativo entre ① y ②, las resistencias pasivas se opondrán a cada uno de esos movimientos considerando las resistencias al deslizamiento, a la rodadura y al pivotamiento respectivamente.

5.1. Resistencia al deslizamiento

Sean dos sólidos ① y ② de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, en contacto y con un movimiento relativo de deslizamiento determinado por la velocidad $\vec{v}_{21}$ y producido por la componente horizontal del vector $\vec{R}$, denominado $\vec{T}$. Para calcular el valor de la resistencia al deslizamiento comenzamos con el sólido en reposo y de manera incremental aumentamos el valor de $\vec{T}$ hasta conseguir el instante antes de que se produzca el movimiento. En ese punto encontramos un equilibrio de fuerzas entre la resistencia al deslizamiento y la fuerza $\vec{T}$ siendo:

$$\vec{T} = -\vec{F}_R$$

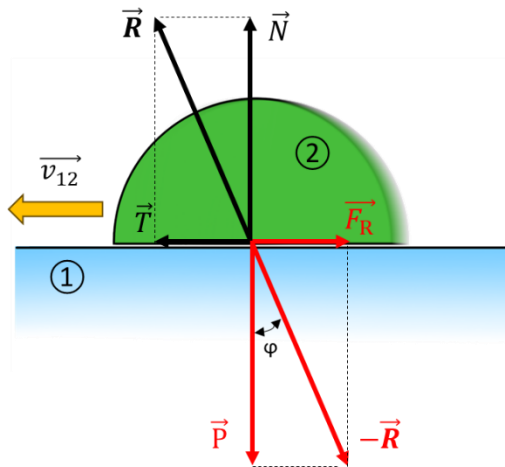


Figura 4. Contacto entre dos sólidos con movimiento relativo de deslizamiento

En el equilibrio y de se obtiene por geometría:

En el instante en el que estamos en equilibrio podemos obtener el valor del coeficiente de rozamiento estático (ver Figura 4):

$$\begin{aligned} -\vec{R} &= \vec{P} + \vec{F}_R \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{T}{N} = \frac{F_R}{P} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \mu_0 \end{aligned}$$

siendo el valor de la fuerza de resistencia al deslizamiento la conocida fórmula:

$$F_R = \mu \cdot N$$

El coeficiente de rozamiento estático puede utilizarse para movimientos relativos de baja velocidad, es decir, en casos en los que la velocidad relativa de deslizamiento no supere los 5m/seg. En caso contrario el valor decrece y es necesario calcular el coeficiente de rozamiento dinámico que se puede obtener bien experimentalmente o mediante la fórmula

$$\mu(v) = \mu_0 \frac{1 + \alpha |\vec{v}|}{1 + \beta |\vec{v}|}$$

Donde $\vec{v}$ es la velocidad relativa de deslizamiento y α , β parámetros relativos al contacto que están tabulados.

El coeficiente de rozamiento o coeficiente de resistencia al deslizamiento presenta las siguientes propiedades o características:

- Depende de la naturaleza de las superficies en contacto. El material de los sólidos en contacto afecta a su valor.
- Depende del estado de las superficies en contacto. Los acabados de los sólidos en contacto pueden modificar el valor del coeficiente (ver Figura 5).
- Depende de la disposición relativa de las superficies en contacto. Hace referencia a la concavidad y convexidad de las superficies en contacto.

- Depende de la duración del evento de rozamiento. La fuerza de rozamiento produce pérdidas de energía en el sistema que se eliminan aumentando la temperatura de las superficies de contacto, lo que en tiempos de exposición largos puede producir valores elevados de temperatura que pueden modificar las propiedades de los materiales o generar micro-soldaduras. En el video <https://www.youtube.com/watch?v=3mZQ7WAvf8> puede verse el efecto producido al poner dos sólidos en contacto con un movimiento relativo de deslizamiento y los efectos producidos por la exposición prolongada.

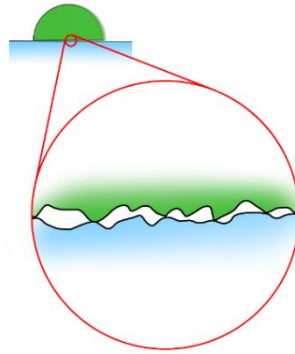


Figura 5. Contacto entre dos sólidos. Acabado superficial.

Para estimar las pérdidas en rendimiento de la máquina producidas por la resistencia al deslizamiento es posible calcular la potencia a partir del trabajo desarrollado por la fuerza de rozamiento, considerando en la Figura 6 **¡Error!** **No se encuentra el origen de la referencia.** un diferencial de desplazamiento $\vec{ds}$ producido por la velocidad relativa de deslizamiento $\vec{v}_{12}$. Así el diferencial de trabajo desarrollado será:

$$= \vec{F}_R \cdot \vec{ds} = \mu \cdot N \cdot ds$$

Y la potencia desarrollada por el diferencial de trabajo

$$= \frac{dW}{dt} = \mu \cdot \frac{s}{dt} = \mu \cdot N \cdot v$$

Que se pierde produciendo desgaste y calentamiento en el contacto.

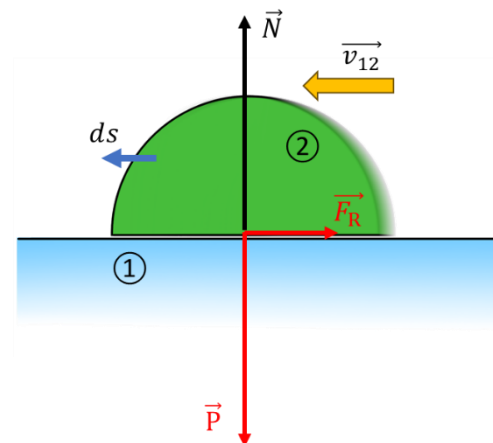


Figura 6. Contacto entre dos sólidos. Movimiento de deslizamiento

Para conocer de forma gráfica si la fuerza resultante $\vec{R}$ que se aplica a un sólido para producir el movimiento relativo respecto de otro es capaz de superar la resistencia al deslizamiento se construye el **cono de deslizamiento**. Se trata de un cono invertido cuyo vértice es el punto de contacto teórico entre los sólidos y cuya generatriz forma un ángulo $\varphi = \text{atan}(\mu)$ respecto de la normal del contacto.

La generatriz del cono marca el estado de equilibrio entre la fuerza que produce el movimiento y la resistencia, dividiendo el espacio en dos áreas diferenciadas. Cuando la fuerza resultante se encuentra en el interior del cono la resistencia al deslizamiento será superior a la fuerza que provoca el movimiento no produciéndose deslizamiento. En caso contrario existirá un deslizamiento entre los sólidos.

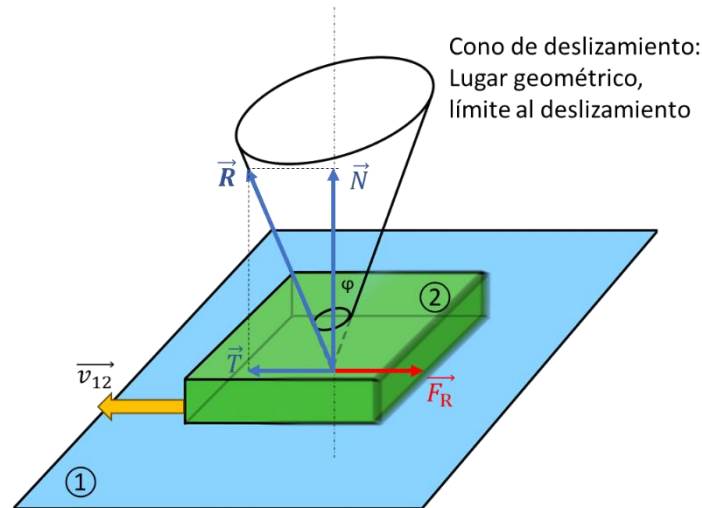


Figura 7. Cono de deslizamiento.

5.2. Resistencia a la rodadura

La resistencia a la rodadura se produce cuando el movimiento relativo entre los sólidos es de rodadura, en ese caso existe un par de rodadura que provoca el movimiento. Para conocer la existencia del par de resistencia a la rodadura que se opone a este movimiento procedemos de la misma forma que en el caso anterior. Consideramos el rodillo que rueda sin deslizar por una superficie plana de la Figura 8.

En lugar de aplicar el par de rodadura $\vec{\phi}_t$ y con el fin de poder verlo en plano aplicamos una fuerza F a una distancia B del punto de contacto A . Comenzamos con un valor de F bajo donde no se produce el movimiento y vamos incrementando su valor hasta llegar al momento en el que se va a iniciar el movimiento. Siempre que el valor de F sea inferior al valor de la fuerza de rozamiento el movimiento que se produce es exclusivamente de rodadura. Aun así, para valores pequeños de F el cilindro no rueda, debido a la existencia de un par de resistencia a la rodadura.

En ese caso calculamos el par de resistencia a la rodadura según la ecuación

$$\Phi_{ROD} = \delta \cdot N$$

Donde δ es el coeficiente de resistencia a la rodadura.

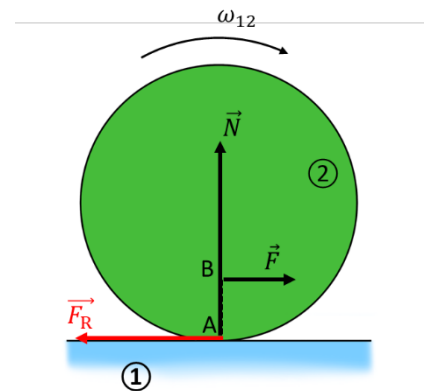


Figura 8. Movimiento de rodadura

El coeficiente de resistencia a la rodadura se obtiene al considerar que el contacto entre los sólidos no es rígido y, por lo tanto, existe una pequeña deformación que desplaza la normal en el contacto justo antes de iniciarse el movimiento como se puede apreciar en la Figura 9, donde la distribución de presiones en el contacto varía desde

la condición de reposo al instante del inicio del movimiento. El desplazamiento de la normal una distancia δ provoca en el punto de contacto A un par que se opone al movimiento.

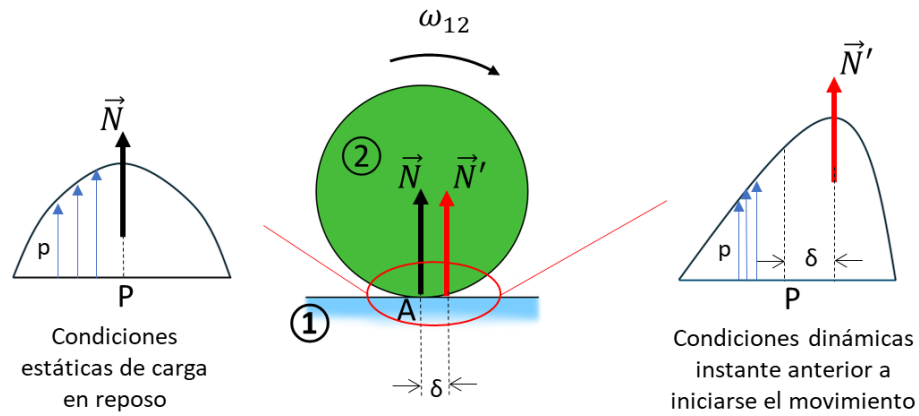


Figura 9. Desplazamiento de la componente normal en el contacto ante rodadura pura

El coeficiente de resistencia a la rodadura presenta las siguientes propiedades:

- Depende de la velocidad de la rodadura. A diferencia del coeficiente de rozamiento la velocidad de rotación si influye
- Depende de las propiedades elásticas de las superficies en contacto. Ya que su valor se relaciona con la presión entre superficies al inicio y el final del contacto.
- Depende de la temperatura de las superficies en contacto. Que modifica las propiedades del material.
- Depende de la presión específica
- Depende de los radios de curvatura del contacto

5.3. Resistencia al pivotamiento

La resistencia al pivotamiento no considera el contacto puntual como en casos anteriores y se estudia a partir del deslizamiento producido entre dos sólidos en movimiento con una superficie de contacto entre ellos considerada elíptica.

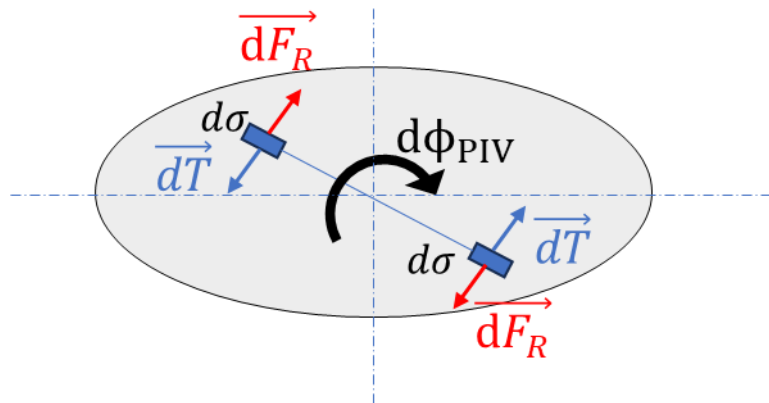


Figura 10. Elipse de contacto en el estudio del par de resistencia al pivotamiento.

Si tomamos dos diferenciales de superficie con simetría radial en la elipse de contacto y calculamos la resistencia al deslizamiento de ambas, se observa que el movimiento de pivotamiento se produce debido al par $\vec{\phi}_P$ que en los diferenciales de superficie se traduce en un par de fuerzas $\vec{dT}$ con el mismo módulo y dirección, pero con sentido contrario. Al igual que en casos anteriores se va incrementando su valor hasta alcanzar el instante antes de producirse el movimiento para encontrar el equilibrio, en esa situación tendremos:

$$dF_R = dT = \mu \cdot dN$$

y el diferencial de par de rodadura se obtiene a partir del par de fuerzas separadas a una distancia $2r$

$$\phi_{PIV} = \iint_{\sigma} 2 \cdot r \cdot \mu \cdot dN = 2 \cdot \mu \cdot \iint_{\sigma} r \cdot dN$$

A efectos prácticos y con el fin de obtener un valor de par resistente equivalente al resto de resistencias pasivas se define el coeficiente de resistencia al pivotamiento al resolver la integral para cada caso. Para ello se aplica la teoría de Herzt sobre deformación de cuerpos elásticos sometidos a compresión, que establece la distribución de esfuerzos sobre el área de contacto y la extensión de ésta.

$$\phi_P = 0,093 \cdot \mu \cdot l \cdot N = \mu_P \cdot N$$

Donde

$$l = \sqrt[3]{N} \cdot (\rho_1, \rho_2, E_2)$$

Siendo ρ_i el radio de curvatura de los sólidos 1 y 2 en el contacto y E_i el módulo de Young. Dado que el coeficiente de resistencia al pivotamiento depende del coeficiente de rozamiento comparten las mismas propiedades, además del que éste depende de la carga y de las características de los materiales.

$$\mu_P \gg (\mu_{ROD} \equiv \delta)$$

5.4. Aplicación: movimiento a la deriva

Dado un sólido rígido que desplaza por el espacio tridimensional, donde todos sus puntos se mueven con la misma velocidad y en la misma dirección m , manteniendo constante la orientación debido a una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto del sólido (movimiento a la deriva). En estos casos el sólido, que está en movimiento ha vencido las resistencias pasivas para comenzar su movimiento y esto hace que cualquier cambio en la dirección del movimiento producido por una fuerza $\vec{f}$ externa genere una nueva dirección n de deriva sin necesidad de volver a vencer esta resistencia.

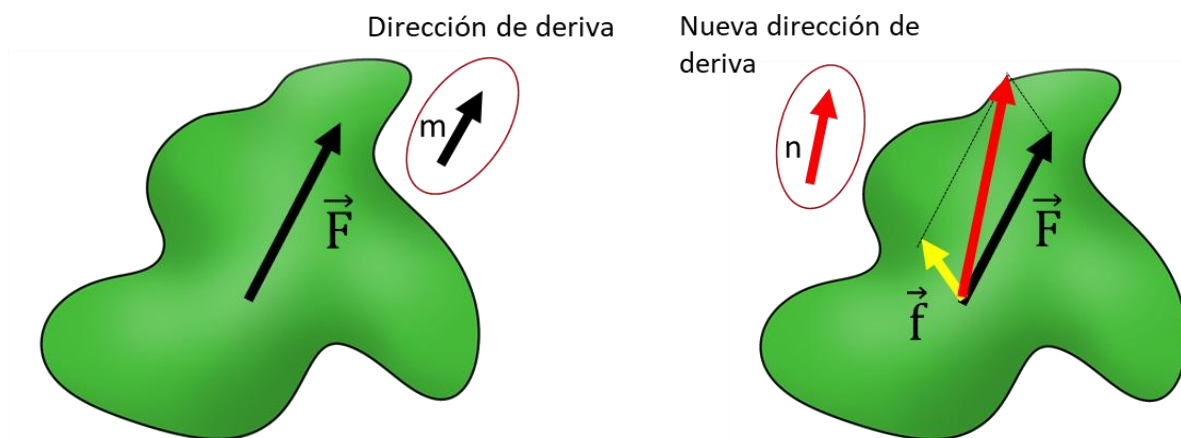


Figura 11. Descripción del movimiento a la deriva

El **movimiento a la deriva** hace referencia a un desplazamiento adicional o secundario que experimenta un cuerpo respecto de su trayectoria principal debido a la acción de fuerzas externas que no actúan exactamente en la dirección de dicho movimiento.

Esta característica se utiliza en múltiples aplicaciones para conseguir movimientos más precisos en determinadas direcciones, por ejemplo, en el caso del mecanismo denominado **regulador de bolas** o regulador de Watts.

- El manguito gira sobre un soporte fijo, en lugar del móvil para producir rozamiento.
- El manguito realiza el movimiento vertical generado por la variación de la Fuerza centrífuga de las bolas sin tener que vencer un nuevo rozamiento

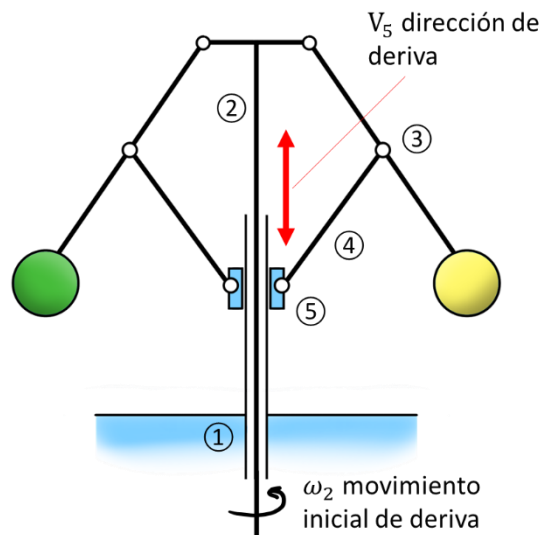


Figura 12. Funcionamiento de un regulador de bolas o de Watt

6. Apoyos de ejes y árboles

Los elementos de apoyo juegan un papel muy importante dentro de las máquinas pues mantienen al eje en su posición permitiendo el giro o movimiento relativo. Estos apoyos aseguran la estabilidad, alineación y transmisión de esfuerzos dentro de la máquina.

El elemento de apoyo general se denomina cojinete cuando sirven de apoyo a ejes que soportan cargas en la dirección radial y quicio o quicionera cuando el eje soporta cargas axiales (tipo bisagra).

Cojinete (def RAE)

m. Mec. Pieza hueca en la que se apoya y gira el eje de un mecanismo. *Para evitar chirridos, engrase bien los ejes y sus cojinetes. Cojinete de bolas.*

Quicio (def. RAE)

m. Parte de las puertas o ventanas en que entra el espigón del quicial, y en que se mueve y gira.



(a) <https://www.skf.com/es/products/plain-bearings/bushings-thrust-washers-strips/bushings>



(b) <https://imposur.cl/repuestos.html>

Figura 13. Cojinete (a) y quicionera (b)

En ambos tipos de apoyo y previo a la selección o diseño del elemento es importante conocer las cargas que va a sufrir el apoyo en función de las solicitaciones de la máquina. Para ellos calcularemos la presión específica en cada punto de la superficie de contacto del elemento con el eje (denominado gorrón cuando es el eje el que está en movimiento) debido a la carga en dos casos concretos: gorrón nuevo y gorrón usado.

6.1. Análisis de cojinetes

Sea P la carga normal que transmite el eje al cojinete (según Figura 14), en cada elemento de superficie de contacto ($d\sigma$) se desarrollará una reacción en la dirección normal al contacto $p \cdot d\sigma$ siendo p la presión específica del elemento considerado. En la Figura 14 se muestra el contacto entre un eje genérico con su apoyo en su vista lateral y frontal.

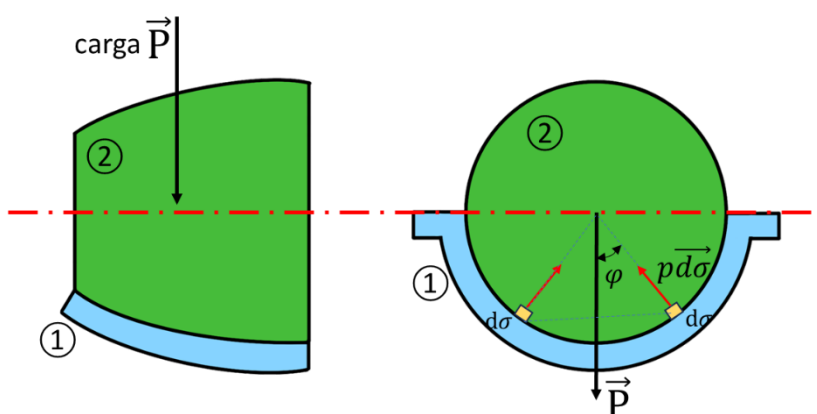


Figura 14. Apoyo de eje ② sobre cojinete ①

Cálculo de la distribución de presiones en el contacto

Aplicando equilibrio de fuerzas en la superficie de contacto encontramos la relación entre la carga aplicada y la distribución de presiones que soporta el cojinete:

$$\vec{P} = \iint_{\sigma} p \cdot d\sigma \cdot \vec{n}$$

Considerando la simetría en el eje vertical, las componentes horizontales de los vectores $p \vec{d\sigma}$ se anulan quedando únicamente la suma de las componentes verticales

$$= \iint_{\sigma} p \cdot \cos \varphi \cdot d\sigma$$

Donde φ es el ángulo que marca la posición del $d\sigma$ desde la posición vertical (dirección de la carga).

En el caso de un **gorrón nuevo**, la distribución de presiones a lo largo de toda la superficie de contacto se considera constante, por lo tanto:

$$= p \cdot \iint_{\sigma} \cos \varphi \cdot d\sigma$$

y para el caso particular en el que el contacto es cilíndrico de sección constante de radio R y longitud L, podemos resolver la integral al tener en cuenta que $d\sigma = R \cdot L \cdot d\varphi$

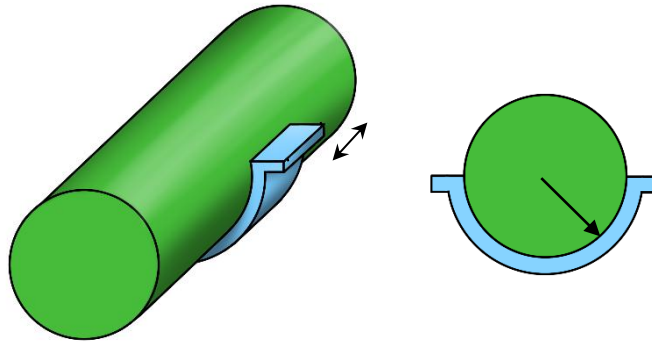


Figura 15. Apoyo de eje (2) sobre cojinete (1), caso cilindro de sección constante

Quedando en este caso la relación:

$$= p \cdot R \cdot l \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = 2pRl = p \cdot S$$

Es decir, la distribución de presiones en el gorrón nuevo es constante y en este caso tiene un valor de

$$p = \frac{P}{S}$$

donde S es la proyección de la superficie de contacto sobre el plano perpendicular a la dirección de la carga.

En el caso de un **gorrón usado** la distribución de presiones a lo largo de la superficie no se mantiene constante debido al desgaste producido, sin embargo, si se considera que el desplazamiento de todos los puntos del eje debido al desgaste se mantiene constante.

En este caso y estableciendo la relación entre el desgaste (δ) producido en la dirección radial del cojinete y el desplazamiento (D) del eje en la dirección vertical de la carga como puede verse en la Figura 16, podemos considerar constante la relación

$$D = \frac{\delta}{\cos \varphi} = cte$$

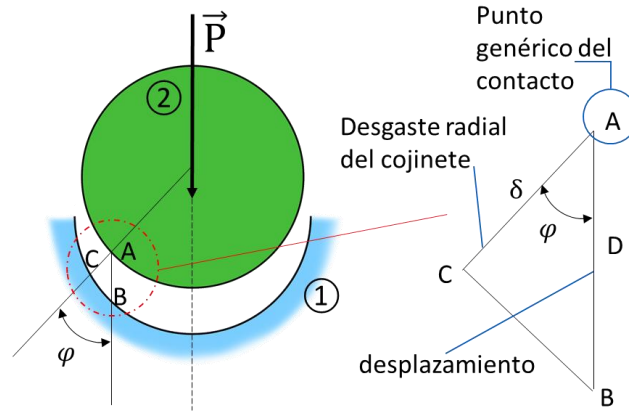


Figura 16. Caso de apoyo con gorrón usado, y descripción de la relación entre el desgaste (δ) y el desplazamiento (D)

El desgaste δ en la dirección radial producido se considera proporcional a la potencia de rozamiento debido al contacto, de manera que $\delta = k \cdot Pot_{roz}$ y considerando la potencia de rozamiento a partir de la fuerza de resistencia al deslizamiento ($\mu \cdot p$) y de la velocidad v que guarda relación con la velocidad de rotación del eje a través del radio entonces:

$$Pot_{roz} = \mu \cdot p \cdot v = \mu \cdot p \cdot (r \cdot \omega) \rightarrow \delta = k \cdot \mu \cdot \omega \cdot p \cdot r \rightarrow \delta = k' \cdot p \cdot r$$

Donde el coeficiente de rozamiento y la velocidad de rotación del eje se consideran constantes, por lo tanto y a partir de la condición de desplazamiento constante tenemos:

$$\frac{p \cdot r}{\cos \cos \varphi} = cte$$

Así para obtener la distribución de presiones en el contacto en función de la carga aplicada llegamos a la siguiente relación:

$$= \iint_{\sigma} \cdot \cos \cos \varphi \cdot d\sigma = \frac{p \cdot r}{\cos \cos \varphi} \iint_{\sigma} \frac{\varphi}{r} \cdot d\sigma \text{ denotando } [A] = \iint_{\sigma} \frac{\varphi}{r} \cdot d\sigma$$

$$p = \frac{P \cdot \cos \cos \varphi}{r \cdot [A]}$$

el término $[A]$ depende únicamente de la geometría del contacto.

Cálculo del para de rozamiento en el cojinete

Al ser un contacto por fricción en el movimiento la fuerza de rozamiento aplicada en el contacto ejerce un par en el eje que se opone al movimiento el cálculo, para un diferencial de superficie ($d\sigma$) según la Figura 14 será:

$$d\Phi_R = dF_R \cdot r \text{ donde } dF_R = \mu \cdot dN = \mu \cdot p \cdot d\sigma$$

de manera que:

$$\Phi_R = \iint_{\sigma} \mu \cdot p \cdot r \cdot d\sigma$$

Para el caso de un gorrón usado donde la presión es constante a lo largo de toda la superficie de contacto tenemos:

$$\Phi_R = \mu \cdot p \iint_{\sigma} \cdot \sigma \text{ denominando } [B] = \iint_{\sigma} \cdot \sigma \text{ entonces } \Phi_R = \mu \cdot p \cdot [B]$$

Para el caso de gorrón usado ($\frac{p \cdot r}{\cos \cos \varphi} = cte$)

$$= \mu \cdot \frac{p \cdot r}{\cos \cos \varphi} \iint_{\sigma} \cos \cos \varphi \cdot d\sigma \text{ denominando } [C] = \iint_{\sigma} \cos \cos \varphi \cdot d\sigma \text{ entonces } = \mu \cdot P \cdot \frac{[C]}{[A]}$$

Los términos [B] y [C] dependen de la geometría del contacto.

6.2. Análisis de quicioneras

En el caso de los quicios la carga del eje sobre el apoyo se realiza en la dirección axial, en lugar de la dirección radial del caso del cojinete. Como ejemplo podemos ver un caso de apoyo en la Figura 17 donde, como en el caso de los cojinetes se realizan el mismo análisis con las mismas consideraciones en los casos de quicionera nueva ($p = cte$) o quicionera usada ($\frac{p \cdot r}{\cos \cos \varphi} = cte$).

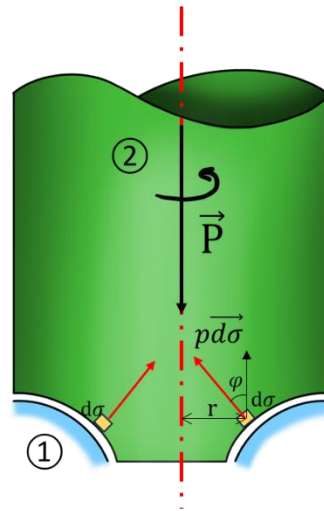


Figura 17. Apoyo de eje ② sobre quicionera ①.

Recordando las fórmulas de distribución de presiones y el par de rozamiento para ambos casos:

- Quicionera nueva $= \cdot \iint_{\sigma} \cos \cos \varphi \cdot d\sigma$ donde para el caso de un cilindro de sección constante, radio R y longitud L la presión en el contacto será

$$= \frac{P}{S}$$

Donde $S = 2 \cdot R \cdot L$ la proyección de la superficie de contacto sobre el plano perpendicular a la dirección de la carga.

El par de rozamiento será en el caso general

$$\Phi_R = \mu \cdot p \cdot [B]$$

- Quicionera usada

$$p = \frac{P \cdot \cos \cos \varphi}{r \cdot [A]}$$

Y el par de rozamiento

$$= \mu \cdot P \frac{[C]}{[A]}$$

En este caso de la distribución de presiones es importante señalar que el parámetro r mide la distancia del punto de contacto a la línea neutra del eje, por lo tanto, a medida que nos acercamos a esa línea el radio disminuye tendiendo a cero y por lo tanto la presión en el contacto aumenta hacia el infinito. Esto hace que deba reconsiderarse el diseño de estos elementos.

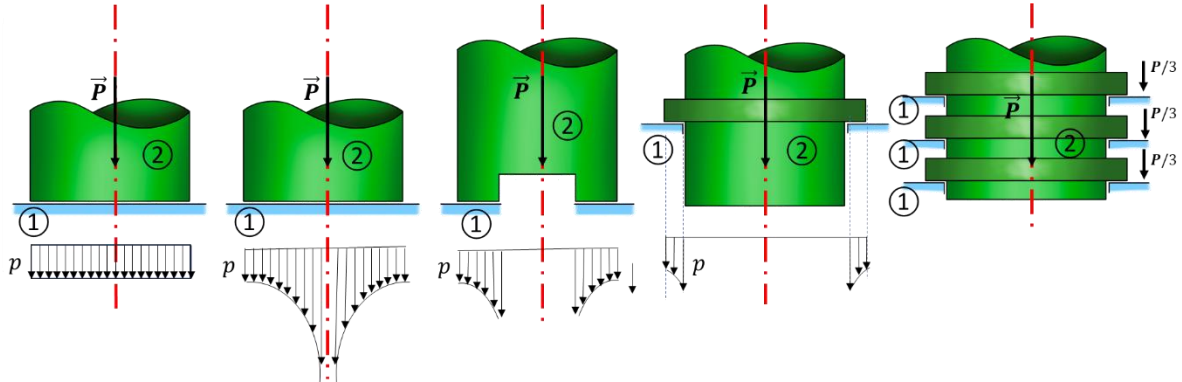


Figura 17. Casos de apoyo de quicios planos y distribución de presiones.

En la Figura 17 se aprecia en los dos primeros casos la distribución de presiones de quicios planos en el caso de quicio nuevo y usado. Los siguientes tres casos son soluciones constructivas que evitan el contacto en las zonas próximas a la línea neutra del eje.

6.3. Círculo de rozamiento

Por último, definimos y obtenemos el círculo de rozamiento que delimita la zona en la que la fuerza aplicada sobre el eje permite producir el movimiento de rotación pura sin vencer la fuerza de rozamiento.

Cuando el eje (de radio r) gira dentro del cojinete, el punto de apoyo se desplaza de la línea de acción de la carga P . Dicha línea forma un ángulo φ con la línea que une el nuevo punto de apoyo A con el centro del gorrón. Hasta que el contacto entre gorrón y apoyo no alcanza el punto A el eje no comienza a girar. Este valor define el par de arranque, que es el par necesario que debemos aplicar para que el eje comience a girar (alcance el ángulo φ).

De esta manera se define el círculo de rozamiento como la circunferencia imaginaria cuya tangencia con la fuerza de reacción en el apoyo determina cuando el gorrón comienza a girar dentro de la mangueta.

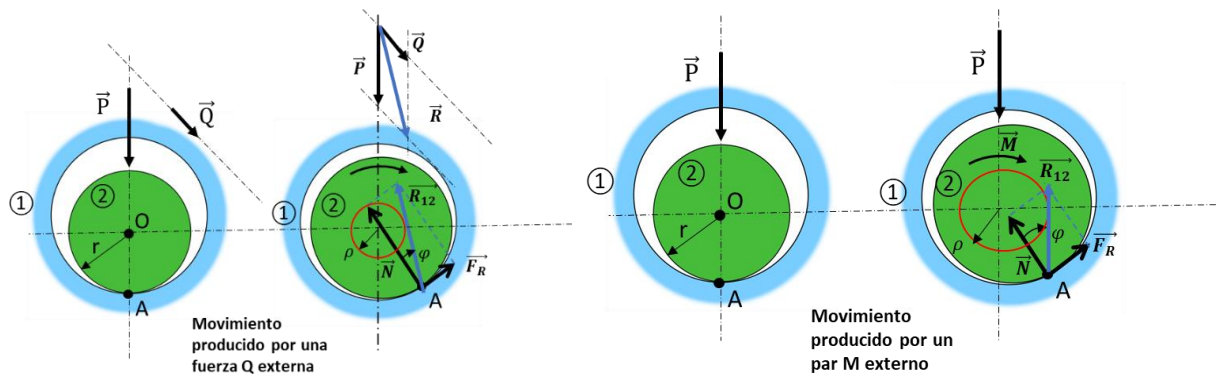


Figura 17. Obtención del círculo de rozamiento.

En la Figura 17 se presentan en rojo los círculos de rozamiento obtenidos en dos casos de carga distintos, a la izquierda el movimiento se produce por la acción de una fuerza externa Q y en la derecha por un par M . Como puede apreciarse en ambos casos el radio del círculo de rozamiento puede obtenerse por trigonometría a partir del ángulo $\varphi = \arctan(\mu)$ y del radio del eje. Dado que ese valor del ángulo es muy próximo a cero podemos aproximar el valor del seno a la tangente de la siguiente forma:

$$\rho = r \cdot \sin(\varphi) \approx r \cdot \tan(\varphi) = \mu \cdot r$$