

OpenCourseWare

Teoría de Máquinas

CRISTINA CASTEJÓN, EDUARDO CORRAL, RAÚL GISMEROS, MARÍA JESÚS GÓMEZ,
JESÚS MENESES, HIGINIO RUBIO, ABRAHAM VADILLO

Introducción a la Teoría de Máquinas



Índice

- Introducción a la Ciencia de Máquinas y Mecanismos (CMM)
- Historia de la CMM
- Esquema general de un conjunto mecánico
- Sistemas de transmisión:
 - Transmisiones rígidas
 - Transmisiones flexibles
- Estudio dinámico de una máquina
 - Rendimiento de una máquina
 - Resistencias Pasivas
- Apoyos de ejes y árboles

Introducción a la CMM

- Disciplina fundamental para el estudio de la cinemática, dinámica y componentes de máquinas.
- Base para el diseño y análisis de sistemas mecánicos en sectores como automoción, aeroespacial, robótica y manufactura.
- Proporciona conocimientos teóricos y prácticos para la creación e innovación tecnológica.
- Desarrolla competencias clave del ingeniero:
 - Aplicación de métodos matemáticos, analíticos y numéricos.
 - Diseño, análisis y validación de máquinas y procesos.
 - Gestión de equipos y proyectos de I+D+i.
 - habilidades críticas,
 - trabajo en equipo y resolución de problemas.

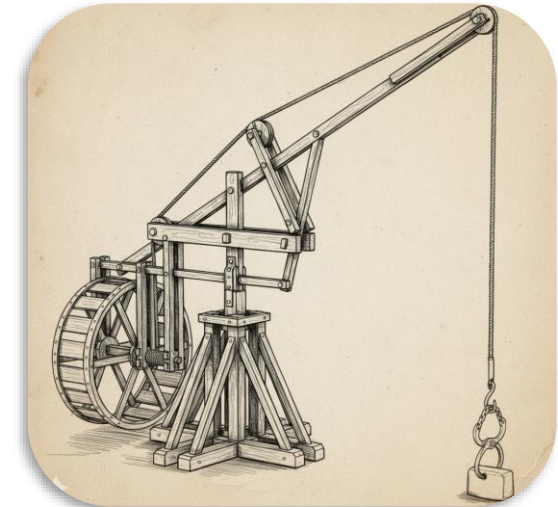
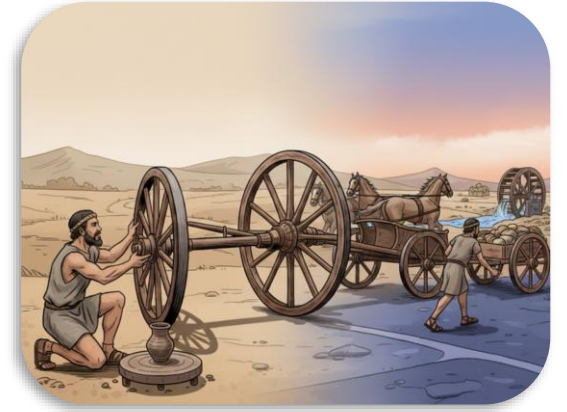


Introducción a la CMM

NIVELES	ELEMENTO/MIEMBRO	CONJUNTO
0) CONOCIMIENTOS PREVIOS Y FUNDAMENTOS TMM	EXPRESIÓN GRÁFICA MECÁNICA RESISTENCIAS PASIVAS TEORÍA GENERAL DEL ENGRASE MATERIALES · Análisis de deformaciones y tensiones · Características mecánicas · Ensayos mecánicos	SISTEMA RECEPTOR · Necesidades · Función · Características SISTEMA MOTRIZ · Propiedades · Características Sectores industriales, relacionados con T.M.M.
	MÉTODOS DE CÁLCULO ; ANALÍTICOS Y POR ORDENADOR	
A) CINEMÁTICO (DISEÑO INICIAL)	CLASIFICACIÓN (Por pares cinemáticos) DESCRIPCIÓN	ANÁLISIS DE MECANISMOS SÍNTESIS DE MECANISMOS
B) DINÁMICO (PREDIMENSIONADO)	PREDIMENSIONADO DE ELEMENTOS	ANÁLISIS DINÁMICO Volante, regulación, frenado
C) CÁLCULO Y DISEÑO	COEFICIENTE DE SEGURIDAD CÁLCULO, COMPROBACIÓN Y ELECCIÓN DE ELEMENTOS UNIONES REGÍMENES DE LUBRICACIÓN	COEFICIENTES DE SEGURIDAD - TEORÍA DE FUSIBLES MECÁNICOS - DISEÑO DE CONJUNTO - SISTEMA DE SUSTENTACIÓN /Carcasa (Estanqueidad), Bancada, etc. SIST. LUBRICACIÓN Y REFRIGERACIÓN
D) CONSTRUCCIÓN	FABRICACIÓN (TALLA, ETC.) ACABADO SUPERFICIAL AJUSTES, TOLERANCIAS, ETC. NORMALIZACIÓN	PREVISIÓN Y NORMAS DE MONTAJE PROGRAMA DE MANTENIMIENTO ENSAYOS REGLAMENTACIÓN
E) ENSAYO Y CORRECTO FUNCIONAMIENTO	EQUILIBRADO (Procedimiento) VIBRACIONES DESGASTE, CORROSIÓN Y FATIGA SUPERFICIAL	EQUILIBRADO VIBRACIONES AISLAMIENTOS ENSAYOS Y VERIFICACIONES - Dimensionales - Funcionales - Ruidos y vibraciones

Historia de la CMM

- Dos etapas de la Historia de las Máquinas:
 - **Etapla preindustrial:** desde el paleolítico hasta finales del siglo XVIII.
 - **Etapla industrial:** desde la 1ª Revolución Industrial hasta nuestros días.
- **Etapla preindustrial:**
 - Desde la Edad de Piedra (Paleolítico Superior) ? herramientas.
 - Primer invento mecánico significativo: la rueda (Sumeria, 3500-4000 a.C.).
 - Grecia clásica: geometría e invenciones como Arquímedes o Herón de Alejandría ? Mecanismo de Antikythera.
 - Roma: aparatos de guerra (onagro, balistas), dispositivos de elevación (grúa de rueda), máquinas para agricultura y minería, ruedas hidráulicas, instrumentos quirúrgicos, etc.
 - *De arquitectura* (Vitrubio, siglo I a.C.) primer gran tratado de máquinas.



Historia de la CMM

Etapa preindustrial:

- Edad Media: Europa pierde parte del conocimiento mecánico. Los árabes lo conservan y avanzan: los hermanos Ben Musa (siglo IX), Al-Jazari (siglos XII-XIII), con un tratado con cincuenta artefactos.
- En 1440, Gutenberg crea la imprenta de tipos móviles.
- Renacimiento: **Bruneleschi, Taccola, Di Giorgi o Leonardo Da Vinci** (*Códices Atlanticus o Madrid I*), en Italia. **Juanelo Turriano** (el mecanismo de elevación de agua de Toledo o el hombre de palo) o **Pedro Juan de Lastanosa** (*Los veintidós libros de los ingenios y de las máquinas*), en España.
- siglo XVI: tratados de Máquinas: **G. Agricola, J. Besson, A. Ramelli, ...**
- Siglo XVII, la Mecánica alcanza ya una cierta madurez como ciencia.
 - **Galileo Galilei** (1564-1642) formula las leyes del movimiento uniformemente acelerado y la ley del sincronismo del péndulo y se le considera el iniciador de la Dinámica.
 - **C. Huygens** (1629-1695) describió los relojes de péndulo e inventó el péndulo cicloidal.
 - **Isaac Newton** (1642-1727) formula las tres leyes fundamentales de la Dinámica y enuncia la Ley de la Gravitación Universal.
- Siglo XVIII,
 - **L. Euler** (1707-1783), establece que el movimiento plano de un sólido puede describirse como la composición de una traslación y una rotación alrededor de un punto.
 - **James Watt** (1736-1819), investigó sobre la síntesis de mecanismos: estudió la trayectoria de un punto del acoplador del cuadrilátero articulado y creó un mecanismo que generaba un movimiento rectilíneo aproximado. Estas investigaciones las aplicó a su máquina de vapor.

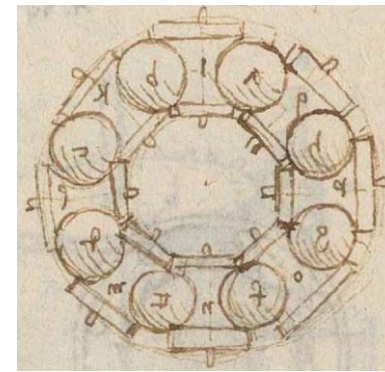


Imagen 1



Imagen 2

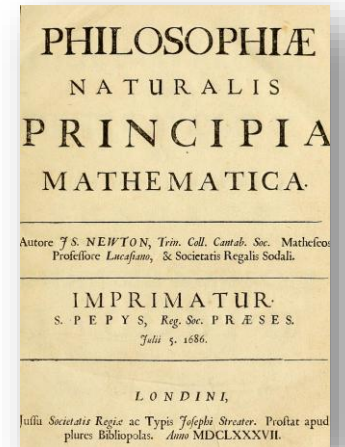


Imagen 3

Historia de la CMM

Etapas industrial : **Siglo XIX:** los conocimientos de Mecánica de Máquinas se consolidan y maduran. La Geometría y el Análisis Matemático contribuyeron notablemente a este progreso.

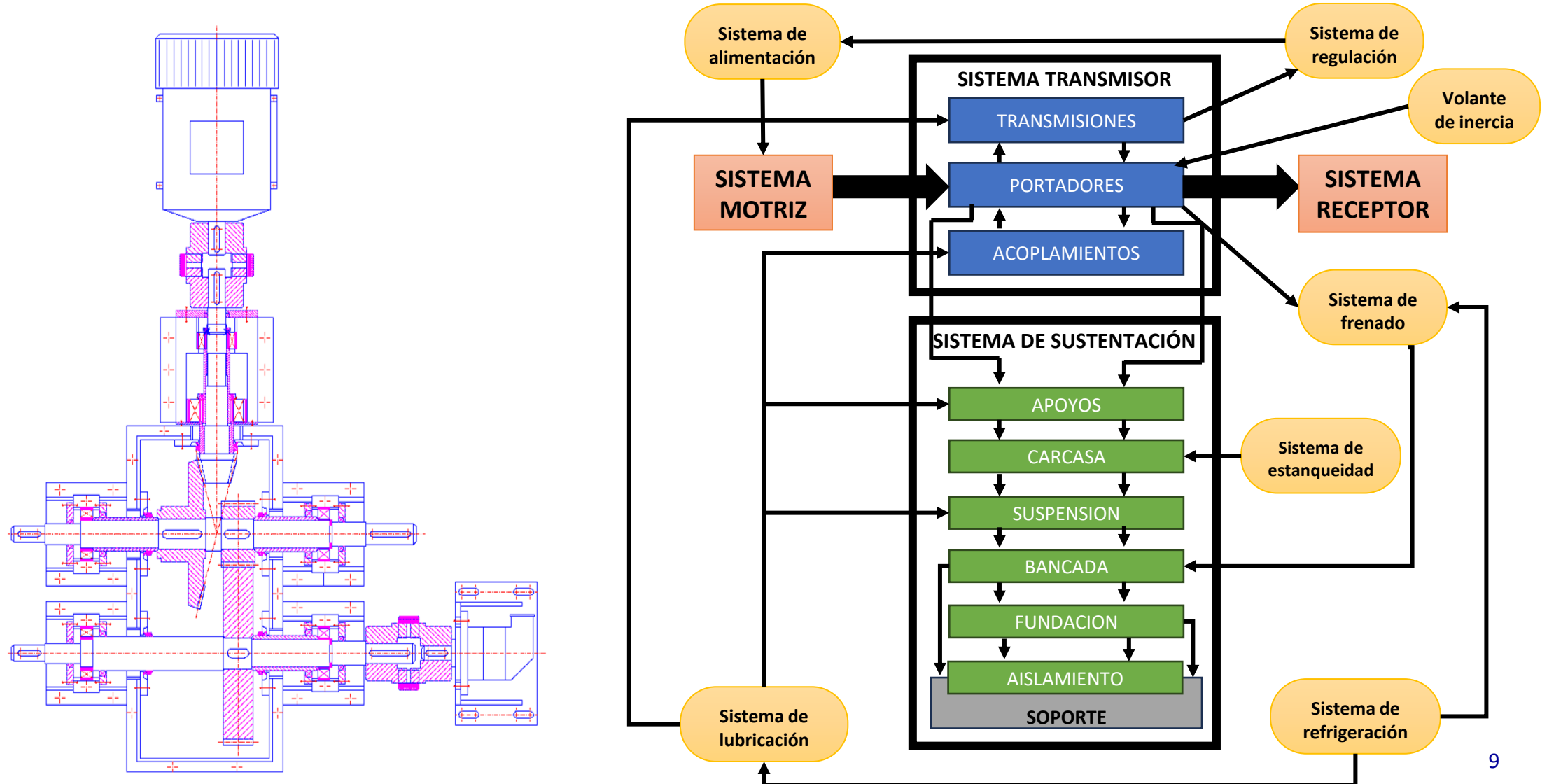
- **A. M. Ampère** (1775-1836) reconoce la posibilidad de estudiar el movimiento de los mecanismos con independencia de las fuerzas que lo producen, y acuñó el término "cinemática".
- **G. G. de Coriolis** (1792-1843), definió la componente de la aceleración de Coriolis.
- **Franz Reuleaux** (1829-1905): Fue el primero en analizar los Mecanismos de modo sistemático y redujo toda máquina a una combinación de componentes: barras, ruedas, levas, etc. También definió los conceptos de elemento, par (inferior y superior), cadena cinemática, equivalencia cinemática e inversión.
- **M. Grübler** (1851-1935), crea un criterio para determinar la movilidad de los mecanismos planos y espaciales.
- **R. Willis** (1800-1875), propuso un criterio de clasificación de los mecanismos según la relación de transmisión del movimiento entre los elementos de entrada y salida. Además, estableció la relación de velocidades en un sistema de engranajes epicicloidales.
- **P. Chebyshev** (1821-1894), se dedicó al dimensionamiento del cuadrilátero articulado capaz de generar trayectorias rectas y circulares con error mínimo, utilizando los polinomios.
- **S. Roberts** (1827-1893), demostró la existencia de tres tipos diferentes de cuadriláteros articulados capaces de trazar una determinada curva de acoplador (a la vez que Chebyshev).
- **L. Burmester** (1840-1927), a finales del siglo XIX, formuló ciertos principios matemáticos que permiten generalizar y describir el comportamiento cinemático de mecanismos planos e introdujo técnicas geométricas para realizar la síntesis del movimiento de los mecanismos.

Historia de la CMM

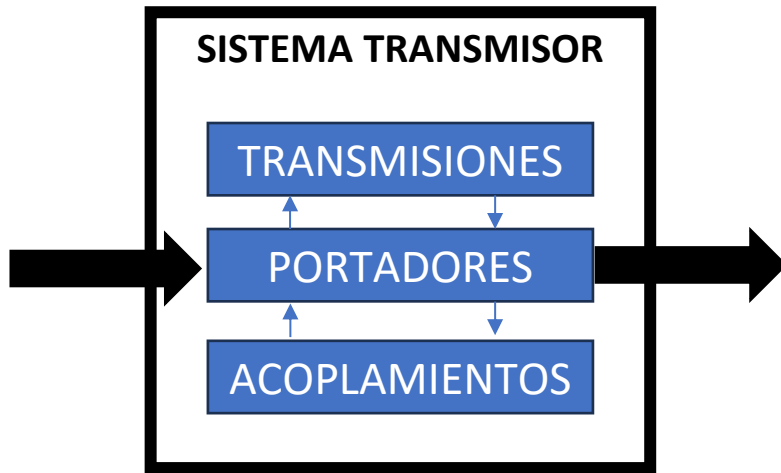
- **Etapas industrial:**

- Al inicio del **Siglo XX**, la TMM presenta dos vertientes: la Escuelas Alemana, fundada por Burmester se centró en los problemas de síntesis dimensional aplicada a los mecanismos planos; y la Escuela Rusa, donde los discípulos de Chebyshev siguieron sus trabajos en las técnicas de ajustes y aproximación de curvas.
- Finalizada la 2ª Guerra Mundial, la Escuela Americana (A. Svoboda, J.A. Hrones y G.L. Nelson) empezó a usar los computadores, para lo cual se fomentó el desarrollo de nuevos métodos algebraicos y numéricos, mucho más generales que los métodos gráficos previamente utilizados.
- En la década de los 50 se comienzan a introducir las computadoras digitales en la industria y la programación en los estudios de ingeniería en las universidades y en los 60 varios investigadores y sus grupos desarrollaron programas: **Allen S. Hall Jr.**, en la Universidad de Purdue; **C.W. McLarnan**, en la Universidad del Estado de Ohio; **J.E. Shigley**, en la Universidad de Michigan; **F. Freudenstein**, en la Universidad de Columbia; y **J. Denavit y R. Hartenberg**, en la Universidad de Northwestern.
- **F. Freudenstein** (1926–2006) puede considerarse el “padre de la cinemática moderna”. Freudenstein revisó los primeros programas de computadora desarrollados para el diseño de mecanismos (anteriores a 1961) y aplicó la computación a la síntesis cinemática de mecanismos: adaptó las técnicas con base gráfica sugeridas por Burmester en 1876 y las reformuló para obtener la solución por computadora. En su Tesis Doctoral desarrolló la conocida “Ecuación de Freudenstein”, donde usa un método algebraico simple para determinar la síntesis de función de un cuadrilátero articulado. Además, complementó la Ecuación de Freudenstein con el método de Sandor (y sus extensiones) para la síntesis óptima
- A finales de los 60, se empezaron a resolver problemas de síntesis en modo de lote con la computadora, con técnicas que usaban puntos de precisión o técnicas de optimización. La computación cambió lentamente del modo de lote al modo interactivo, lo que constituyó un paso importante en hacer las técnicas más útiles a los diseñadores.
- A partir de los años 80, se avanzó en el principio de la integración del análisis, síntesis y dinámica de los mecanismos (dinámica multicuerpo, con autores como **J. García de Jalón, P. Nikravesh o A.A. Shabana**) con otras áreas del diseño ayudado por computador, como el dibujo, los elementos finitos y la simulación. Posteriormente
- En la actualidad, se dispone de un impresionante conjunto de herramientas para el análisis y diseño óptimo de mecanismos.

Esquema general de un conjunto mecánico



Esquema general de un conjunto mecánico



TRANSMISIONES

RÍGIDAS

• ENGRANAJES

{ CILÍNDRICOS
CÓNICOS
HIPERBÓLICOS

• RUEDAS DE FRICCIÓN

• TRENES DE ENGRANAJES

• HUSILLO - TUERCA

• ESLABONAMIENTOS ARTICULADOS

• LEVAS, EXCÉNTRICAS, TRINQUETES

{ SINFÍN CORONA
HIPOIDES

{ ORDINARIOS
EPICICLOIDALES

FLEXIBLES

• CORREAS

• CADENAS

• CABLES

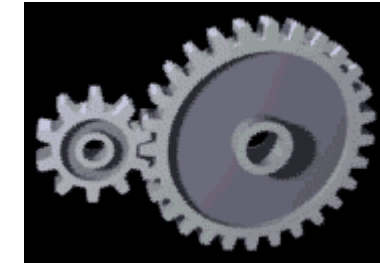


Imagen 2

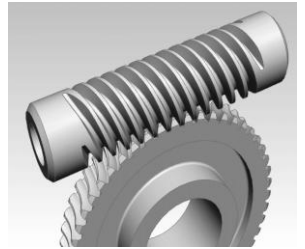


Imagen 3



Imagen 4

PORTADORES

• EJES - ÁRBOLES

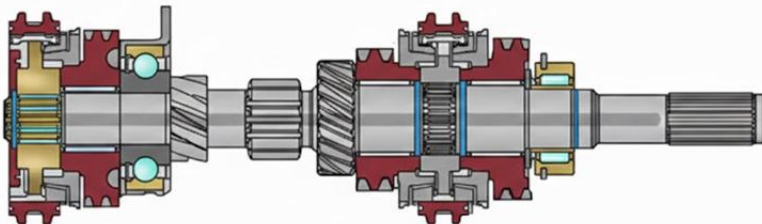


Imagen 1

ACOPLAMIENTOS / CONECTORES

PERMANENTES O ACOPLAMIENTOS

• RÍGIDOS

• ELÁSTICOS

• COMPENSADORES

TEMPORALES O EMBRAGUES

• CONEXIÓN INSTANTÁNEA

• CONEXIÓN PROGRESIVA



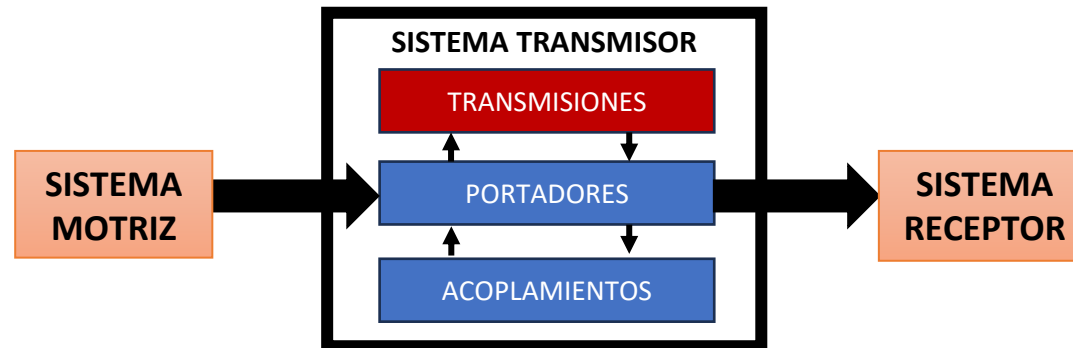
Imagen 5



Imagen 6

Sistema de transmisión

Definición: Un conjunto de elementos mecánicos interconectados, diseñados para **transferir** energía mecánica y **modificar** el movimiento desde una fuente motriz (entrada, como un motor) hasta una máquina o actuador (salida, donde se realiza el trabajo).



Sistema de transmisión

Particularizando en máquinas rotativas las transmisiones mecánicas **Comunican** el **movimiento** de un eslabón (órgano o elemento) a otro y se emplean cuando es necesario un cambio en la **velocidad** o en el **par** de un dispositivo giratorio.

- Transmisión de movimiento o potencia entre ejes:
 - Los ejes no coinciden por razones funcionales
 - Establecer una relación de velocidades entre ejes precisa
 - Invertir el sentido de giro del eje
 - Adecuar la velocidad de un motor a las características de carga del sistema

Clasificación de los sistemas de transmisión

Tipos de transmisiones mecánicas

Transmisiones rígidas

Ruedas de fricción

Engranajes

Sistemas articulados formados por

- Cigüeñales
- Bielas
- Manivelas
- Levas
- Embragues
- frenos, etc.

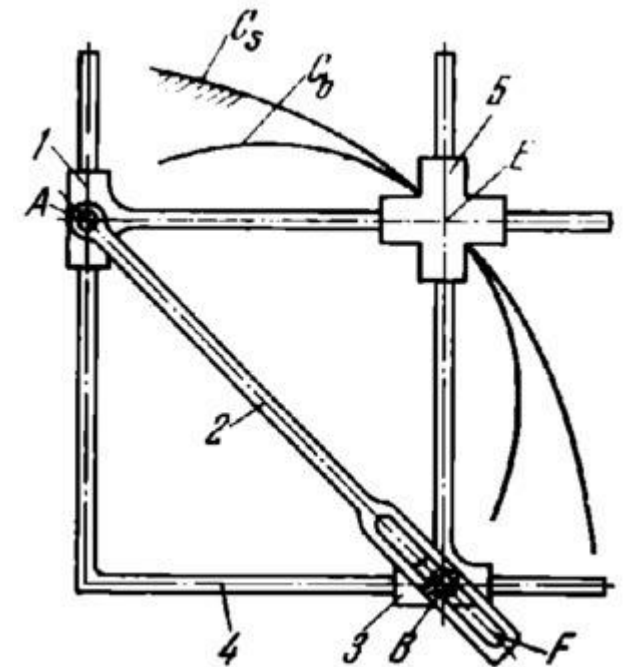
Transmisiones flexibles

Correas

Cadenas

Cables

Ejes flexibles



Transmisiones rígidas

- Ruedas de fricción: transmiten movimiento/potencia entre ejes separados a distancia relativamente corta, utilizan el concepto de fricción para transmitir el movimiento entre las ruedas (potencias moderadas).
- Engranajes: grupo de transmisiones mecánicas más difundido e importante. Se emplean en los más diversos campos y condiciones de trabajo, desde relojes y equipos de precisión hasta máquinas de grandes dimensiones.
- Sistemas articulados:
 - Barras articuladas. Combinación de cuerpos resistentes unidos entre sí y con movimiento relativo que transmite el movimiento/potencia entre un eslabón de entrada y uno de salida
 - Leva-seguidor: permiten convertir el movimiento de rotación uniforme de una leva, dispuesta en el contorno de un disco o sobre una sección cilíndrica, en otro movimiento previamente establecido, que se transmite a otro miembro de cadena cinemática; pudiendo ser una palanca, una corredera, un balancín, etc.



Transmisiones flexibles: Correas

Transmisión por correas: transmite movimiento/par de rotación entre poleas mediante fricción en el contacto.

Ventajas:

- Permiten gran distancia entre centros
- Funcionamiento suave y silencioso
- Bajo coste de mantenimiento

Inconvenientes:

- Potencias moderadas
- Gran volumen
- Peligro de **DESLIZAMIENTO** (asincronía)

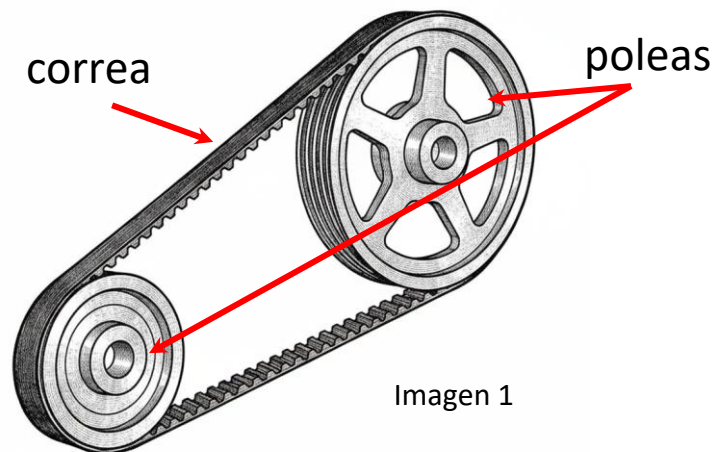


Imagen 1

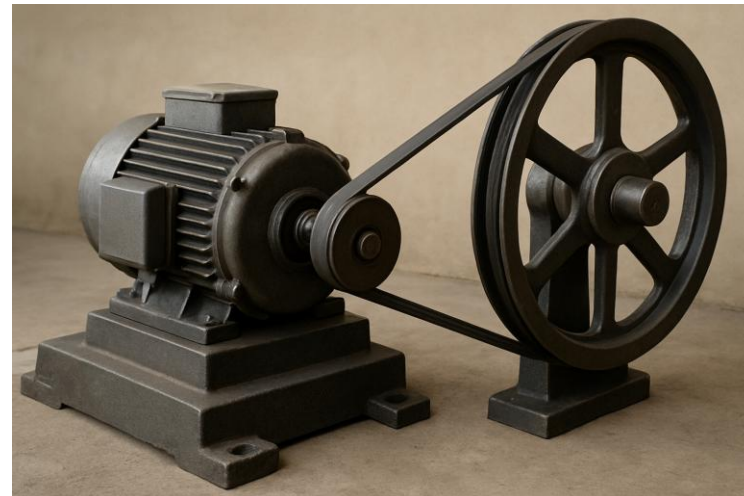


Imagen 2

Transmisiones flexibles: Correas

- Ventajas:
 - Pueden transmitir potencia con grandes distancias entre ejes.
 - Funcionamiento suave, silencioso y sin choques: absorben cargas de choque y vibraciones, por lo que alargan la vida de los componentes de la máquina.
 - Sencillez de fabricación, montaje y mantenimiento.
 - Pueden operar a altas velocidades de rotación.
 - Se pueden emplear como fusible mecánico: el rozamiento disponible limita la carga transmitida protegiendo al sistema de posibles sobrecargas.
 - Son económicas.
 - Son limpias y no necesitan lubricación.
 - Pueden transmitir movimiento entre ejes no paralelos.
 - Los rendimientos son similares a los de una transmisión mediante engranajes (0,97-0,98).
 - Se pueden conseguir relaciones de transmisión del mismo orden de las conseguidas mediante engranajes.

Transmisiones flexibles: Correas

- inconvenientes:
 - La relación de transmisión no es constante.
 - La potencia transmitida está limitada por el rozamiento entre la correa y la polea.
 - El coeficiente de rozamiento puede variar debido a las condiciones ambientales: polvo, suciedad, aceite, humedad, etc.
 - Existe peligro de deslizamiento durante el proceso de transmisión.
 - La vida de las correas es relativamente corta.
 - Con el paso del tiempo la correa se desgasta y pierde elasticidad.

Transmisiones flexibles: Cadenas

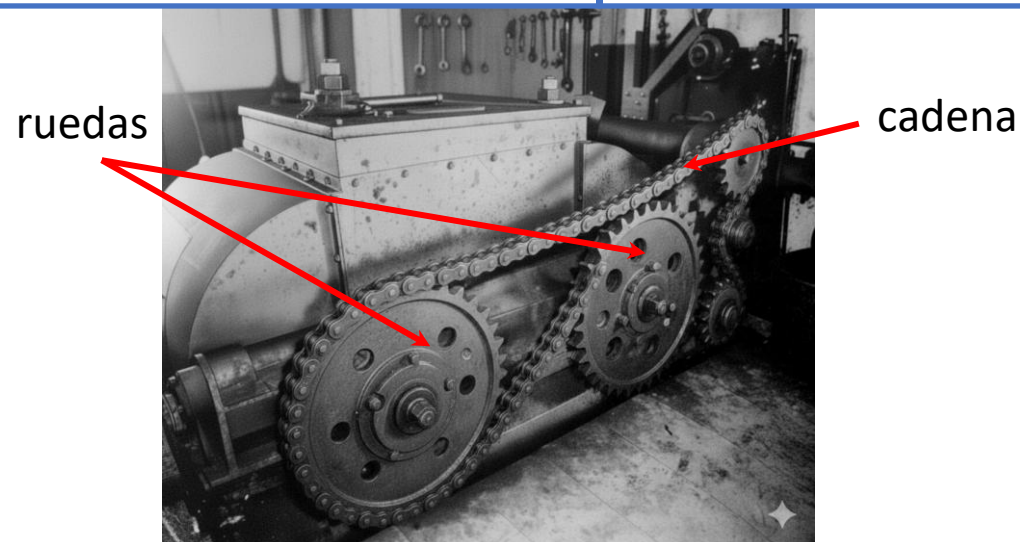
Transmisión por cadenas: transmite movimiento/par de rotación entre la rueda y el piñón y es necesaria una elevada capacidad de carga.

Ventajas:

- Permiten gran distancia entre centros
- Transmite Potencia elevada
- No hay peligro de deslizamiento

Inconvenientes:

- coste de mantenimiento intermedio
- Gran volumen
- Efecto polígono en el acoplamiento cadena rueda (ruido y vibración)



Transmisiones flexibles: Cables

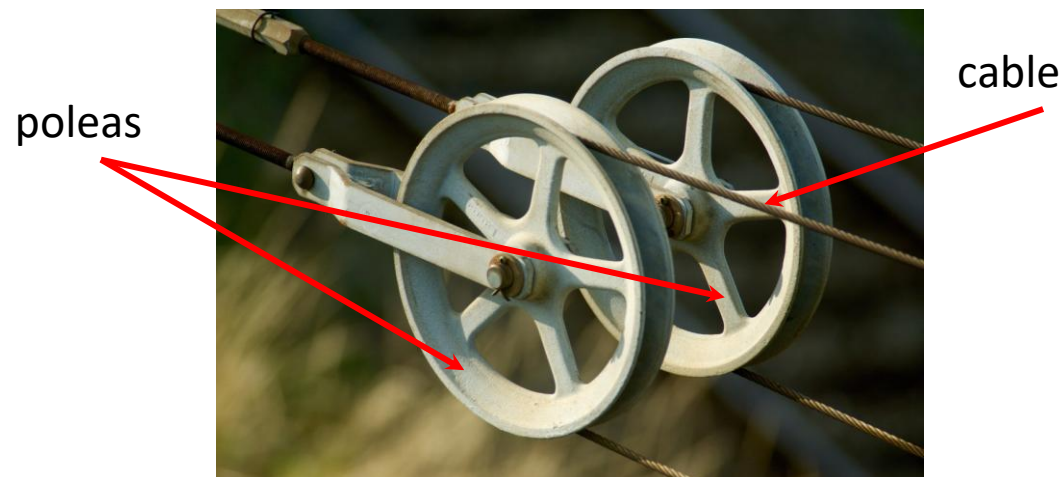
Transmisión por cables: transmite movimiento/par de rotación entre poleas gracias a la fuerza de fricción que aparece en el contacto entre la polea y cable.

Ventajas:

- Permiten mayores distancias entre centros
- Coste y mantenimiento bajos

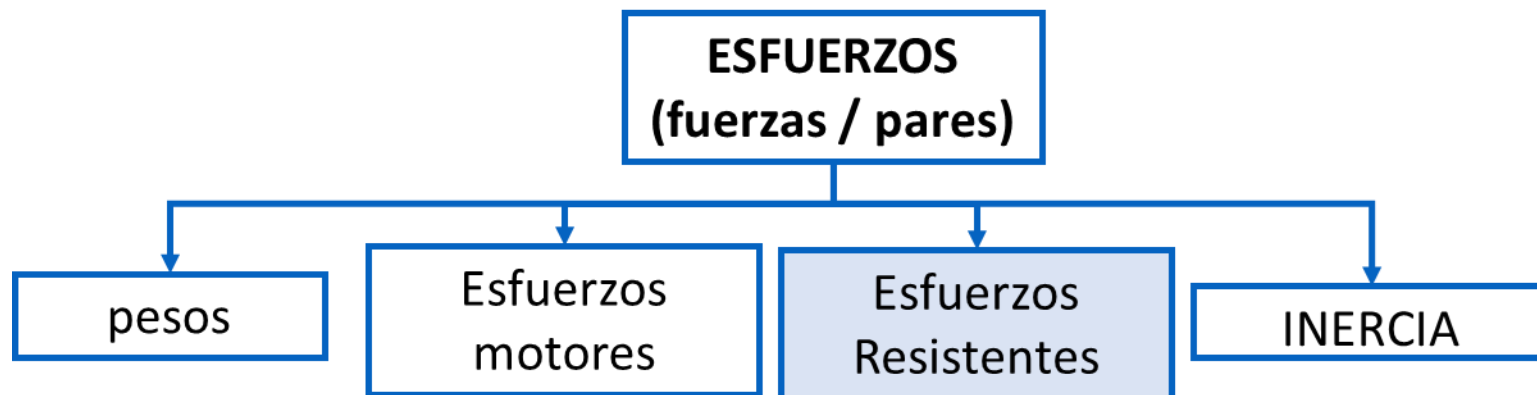
Inconvenientes:

- Pequeña capacidad de transmisión de potencia
- Existe peligro de DESLIZAMIENTO



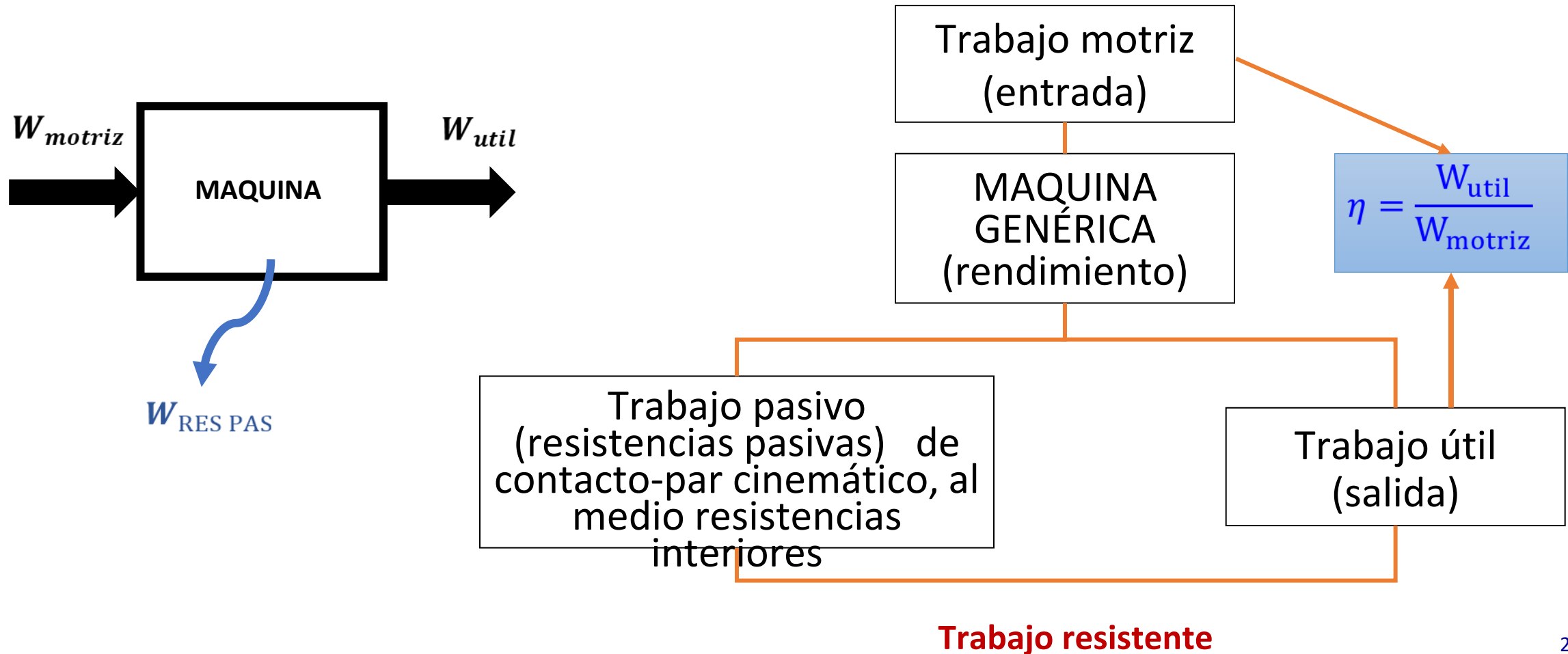
Dinámica de máquinas

- Estudio de esfuerzos en mecanismos con movimiento conocido.
- Los esfuerzos se transmiten a través de los miembros del mecanismo.
- Clases de esfuerzos:
 - Propio peso de los eslabones (debido a la fuerza de la Gravedad)
 - Cargas externas
 - Esfuerzos resistentes (resistencias pasivas)
 - Aceleraciones sufridas por los eslabones (esfuerzos de inercia)



Rendimiento en una máquina

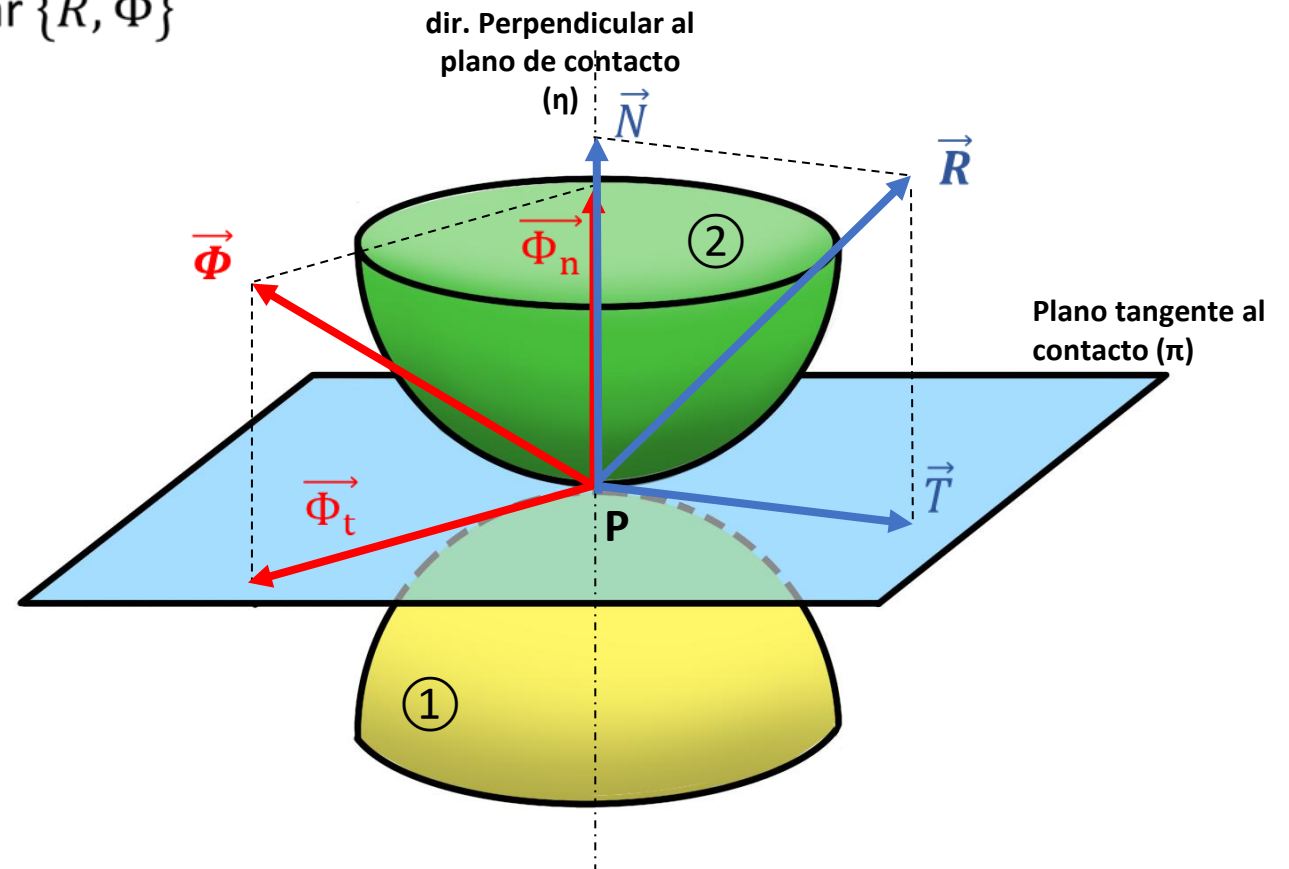
Flujo energético de una máquina



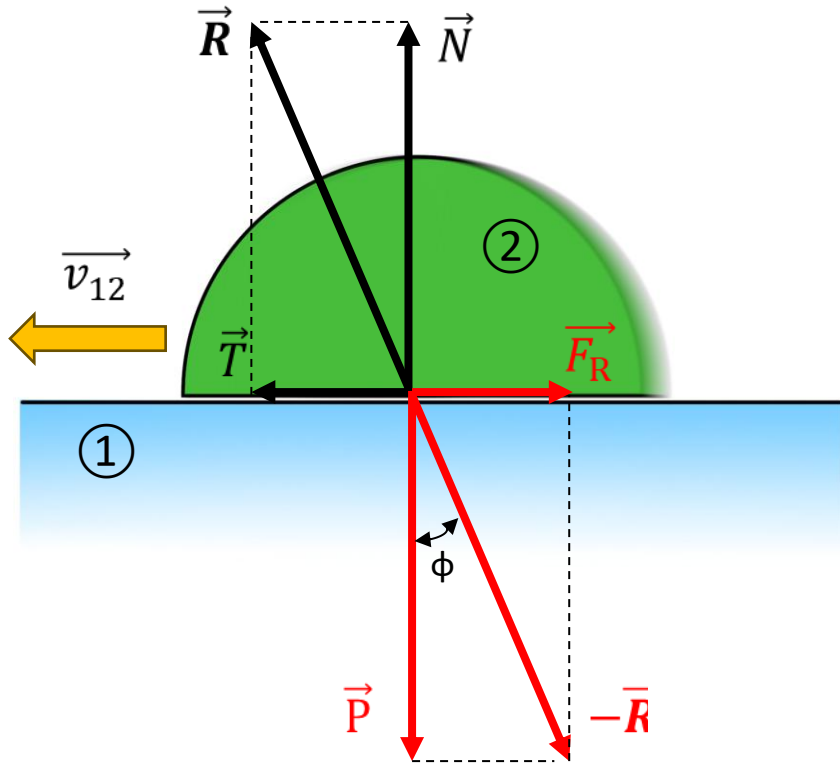
Resistencias pasivas en pares elementales

- Considerando un contacto entre sólidos ① y ② .
- Suponiendo un contacto puntual entre dos eslabones, se consideran los esfuerzos resultantes en el contacto como el conjunto de fuerza y par $\{\vec{R}, \vec{\Phi}\}$
- Descomponemos dichas resultantes en sus componentes en el plano tangente de contacto (π) y en la dirección normal a dicho plano (η).

$$\{\vec{R}, \vec{\Phi}\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \\ \vec{\Phi} = \vec{\Phi}_t + \vec{\Phi}_n \end{cases}$$



Resistencias Pasivas: resistencia al deslizamiento



$$\mu \equiv [0.1, 0.7]$$

$$\begin{aligned} -\vec{R} &= \vec{P} + \vec{F}_R \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{T}{N} = \frac{F_R}{P} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \mu \end{aligned}$$

μ_0 Coeficiente de rozamiento estático.

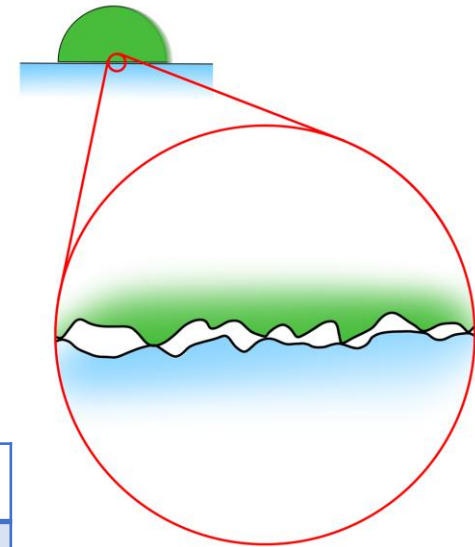
$$\begin{aligned} \mu(v) &= \mu_0 \frac{1 + \alpha |\vec{v}|}{1 + \beta |\vec{v}|} \\ [v &\geq 5 \text{ m/s}] \\ \mu(v) &\equiv \left[\frac{1}{2} \mu_0, \frac{2}{3} \mu_0 \right] \end{aligned}$$

μ Coeficiente de rozamiento dinámico.

Resistencias Pasivas: resistencia al deslizamiento

Propiedades del coeficiente de rozamiento (μ)

- Depende de la naturaleza de las superficies en contacto
- Depende del estado de las superficies en contacto
- Depende de la disposición relativa de las superficies en contacto
- Depende de la duración del evento de rozamiento



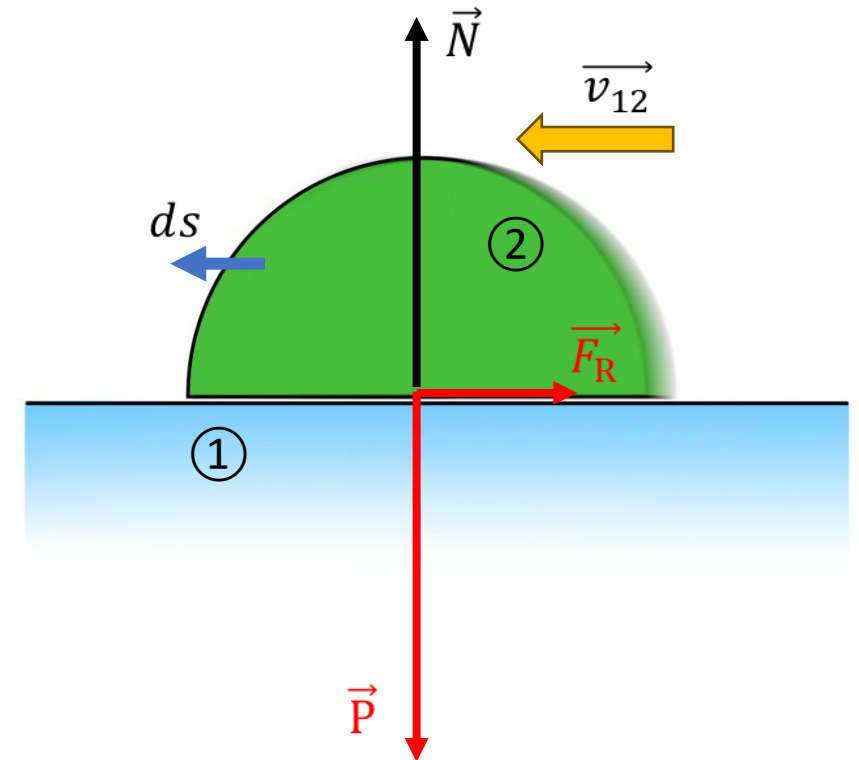
Valores típicos de coeficientes de rozamiento según su aplicación			
Bajo rozamiento	Deslizamiento en correderas, levas, excéntricas y engranajes		
	Pares de rotación		
	Pares sin engrase		
Alto rozamiento	Frenos		

Resistencias Pasivas: resistencia al deslizamiento

Trabajo producido por deslizamiento a velocidad v

- Diferencial de trabajo $dW = F_R \cdot ds = \mu \cdot N \cdot ds$
- Potencia $P = \frac{dW}{dt} = \mu \cdot N \cdot \frac{ds}{dt} = \mu \cdot N \cdot v_{12}$

Se producen pérdidas por desgaste y calentamiento



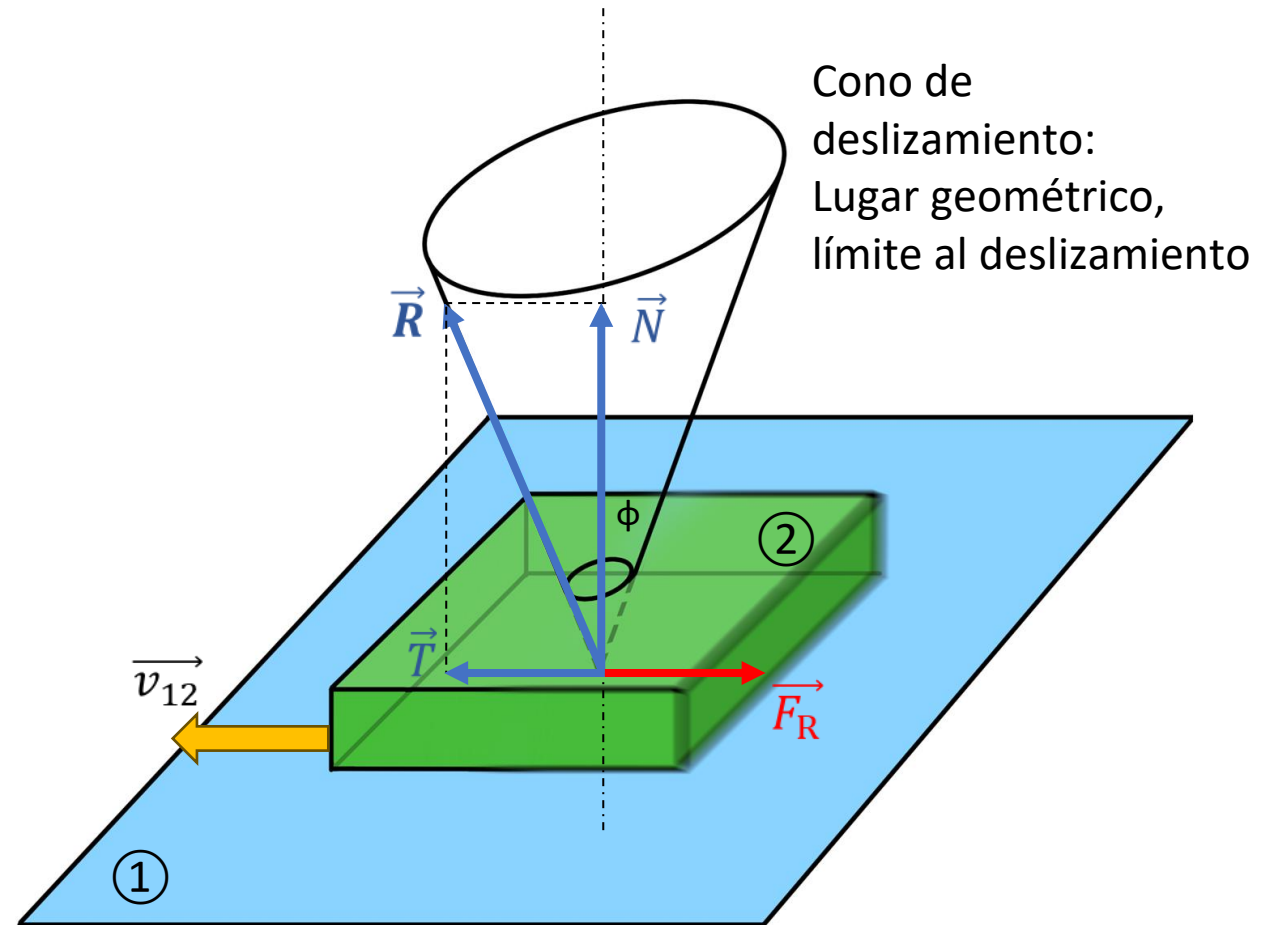
Resistencias Pasivas: resistencia al deslizamiento

Cono de deslizamiento

- Cono cuyo eje es la dirección de la normal y cuyo semiángulo es

$$\varphi = \arctan(\mu)$$

- Cuando $\vec{R}$ Resultante de fuerzas exteriores de ② sobre ① se encuentra en el interior del cono no se producirá deslizamiento.



Resistencias Pasivas: Resistencia a la rodadura

Acción exterior: $\vec{F}$ en B que provoca un par de rodadura

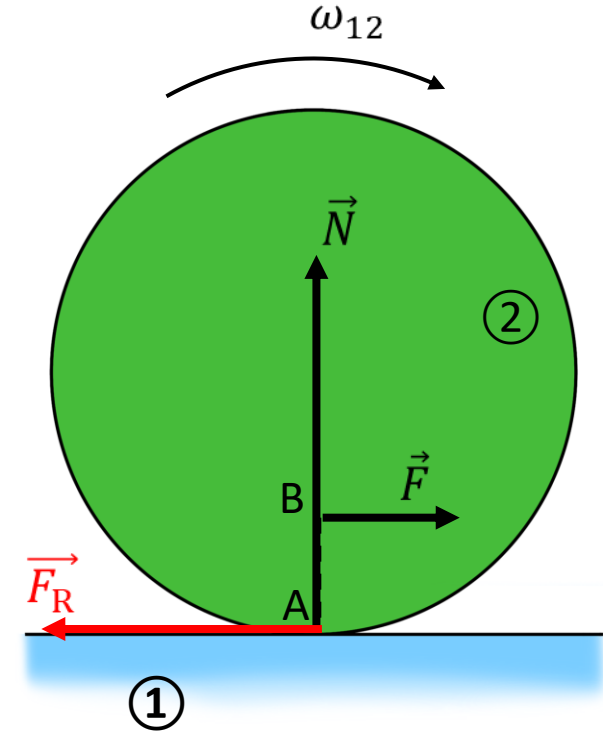
$$|\vec{\Phi}_t| = |\vec{F}| \cdot \overline{BA}$$

Para que se garantice con la fuerza aplicada una rodadura pura sin deslizamiento:

$$\vec{F} \leq |\vec{F}_R| = \mu \cdot N$$

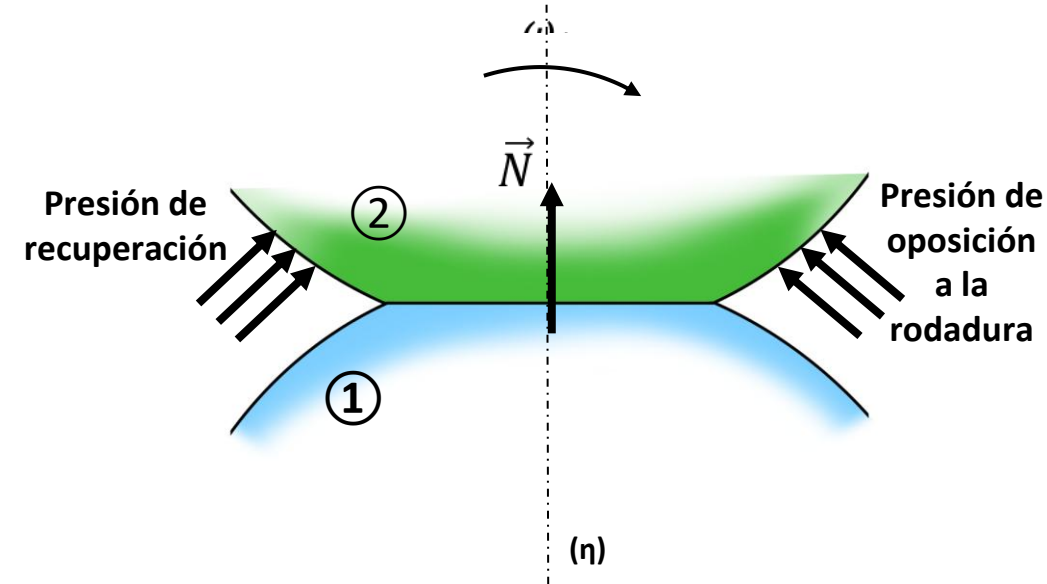
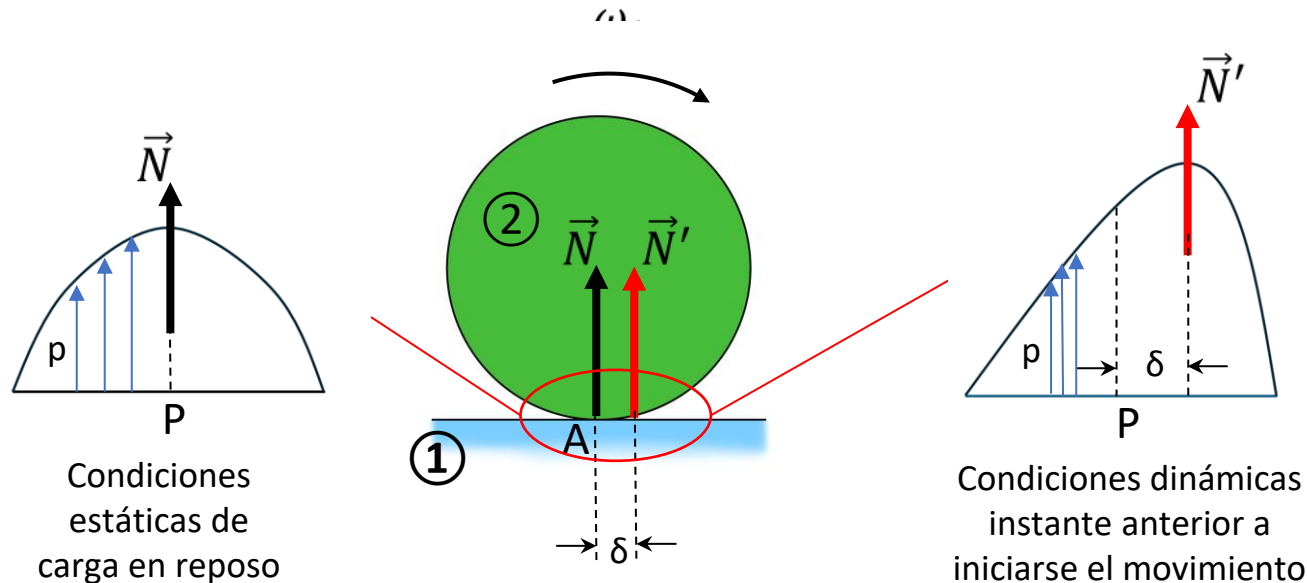
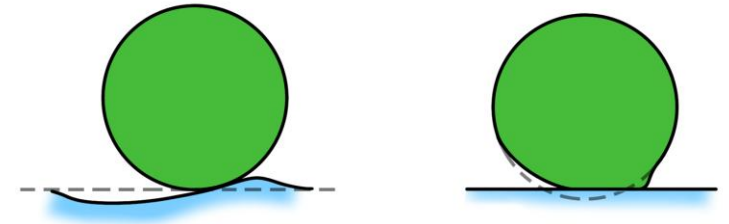
$\vec{F}$ debe alcanzar un valor tal que el cilindro comience a rodar, el momento generado por la fuerza $\vec{F}$ en el punto de contacto P se denomina **Par de resistencia a la rodadura**

$$\phi_{ROD} = \delta \cdot N$$



Resistencias Pasivas: Resistencia a la rodadura

- Modelo del par de rodadura a vencer: $\phi_{ROD} = \delta \cdot N$
- Rodadura cilindro recto sobre una superficie plana
 - Rodadura
 - Rodadura + deslizamiento
 - Deslizamiento



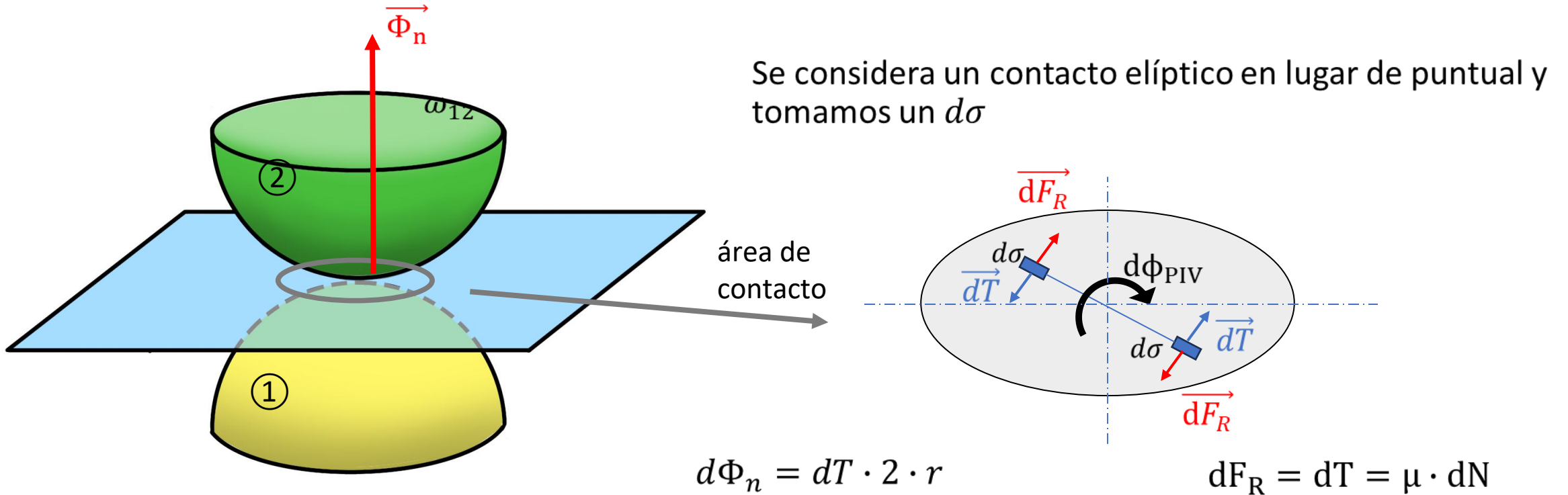
Resistencias Pasivas: Resistencia a la rodadura

Propiedades del coeficiente de resistencia a la rodadura (δ)

- Depende de la velocidad de la rodadura
- Depende de las propiedades elásticas de las superficies en contacto
- Depende de la temperatura de las superficies en contacto
- Depende de la presión específica
- Depende de los radios de curvatura del contacto

Valores típicos de coeficientes de resistencia a la rodadura	
Maderas	
Acero templado	
Neumático	

Resistencias Pasivas: Resistencia al pivotamiento



- El par de fuerzas rozamiento en el contacto determina el par de resistencia al pivotamiento

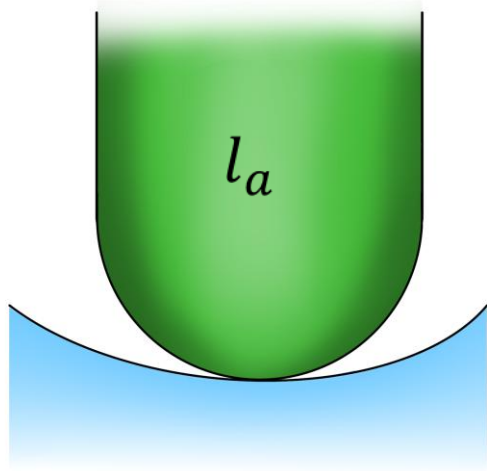
$$d\phi_{PIV} = 2 \cdot r \cdot dF_R = 2 \cdot r \cdot \mu \cdot dN \Rightarrow \phi_{PIV} = \iint_{\sigma} 2 \cdot r \cdot \mu \cdot dN = 2 \cdot \mu \cdot \iint_{\sigma} r \cdot dN$$

Resistencia al pivotamiento (II)

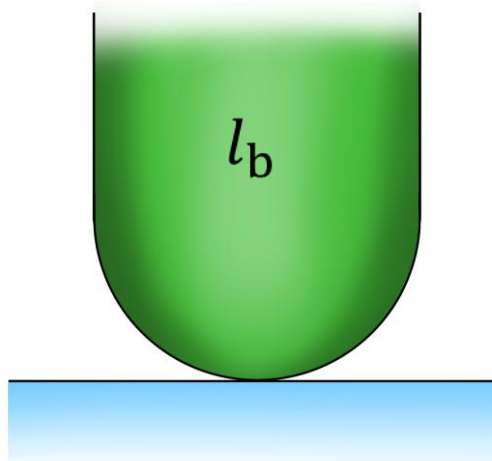
- La Teoría de Herzt sobre deformación de cuerpos elásticos sometidos a compresión, establece la distribución de esfuerzos sobre el área de contacto y la extensión de ésta.

$$\Phi_P = 0,093 \cdot \mu \cdot l \cdot N \quad \text{donde } l = \sqrt[3]{N} \cdot f(\rho_1, E_1, \rho_2, E_2)$$

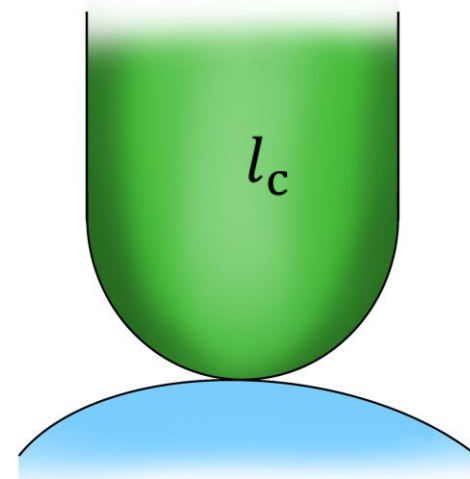
$$l_a > l_b > l_c$$



$$\phi_{PIV} = \mu_P \cdot N$$



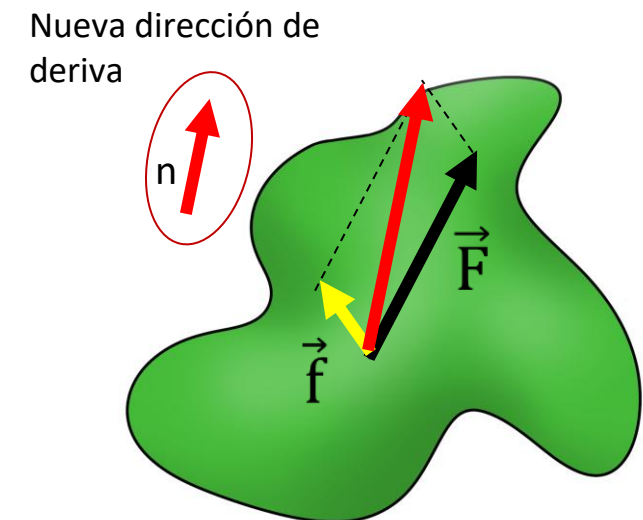
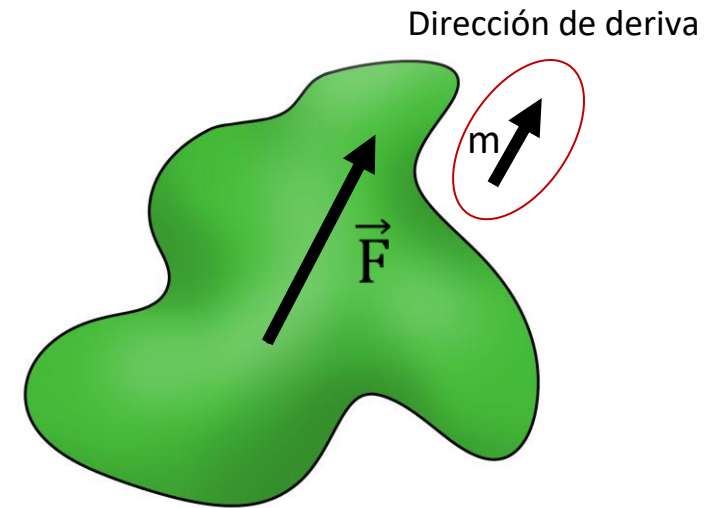
μ_P depende de la carga y de las características de los materiales



$$\mu_P \gg (\mu_{ROD} \equiv \delta)$$

Movimiento a la deriva

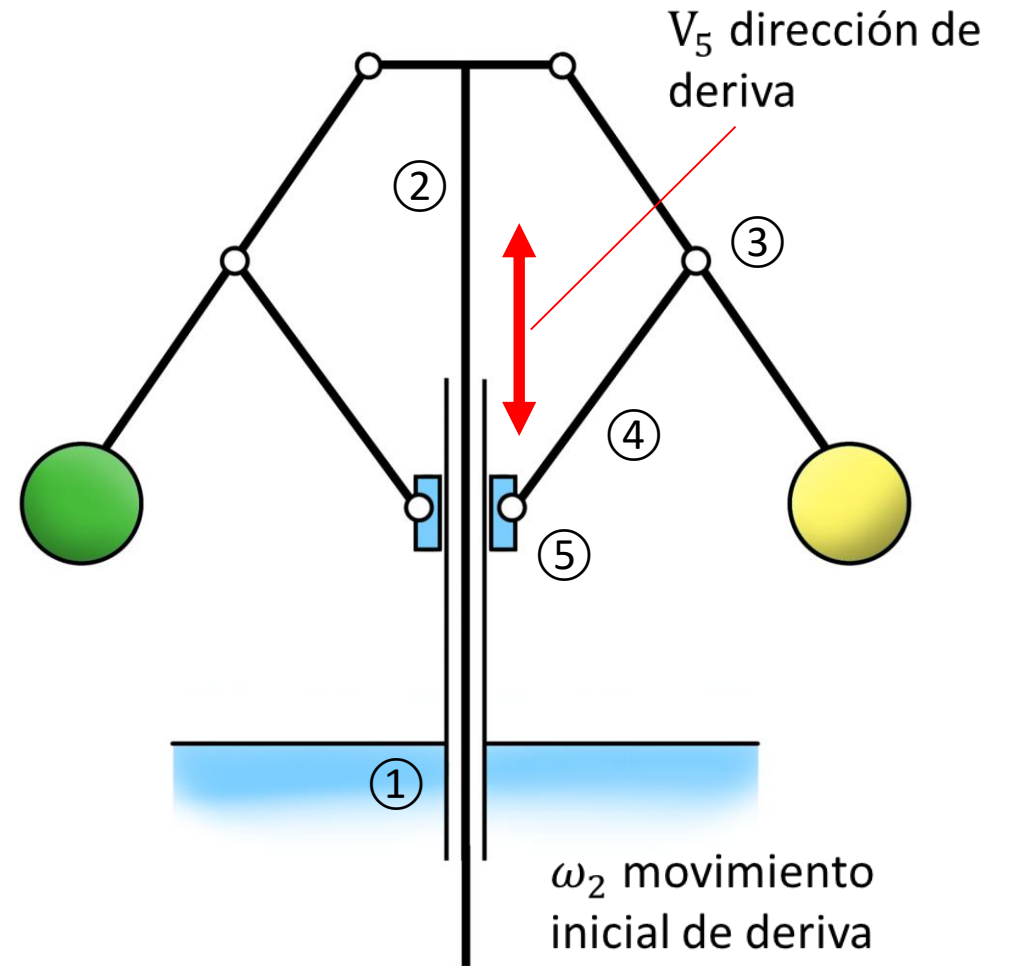
El **movimiento a la deriva** hace referencia a un desplazamiento adicional o secundario que experimenta un cuerpo respecto de su trayectoria principal debido a la acción de fuerzas externas que no actúan exactamente en la dirección de dicho movimiento



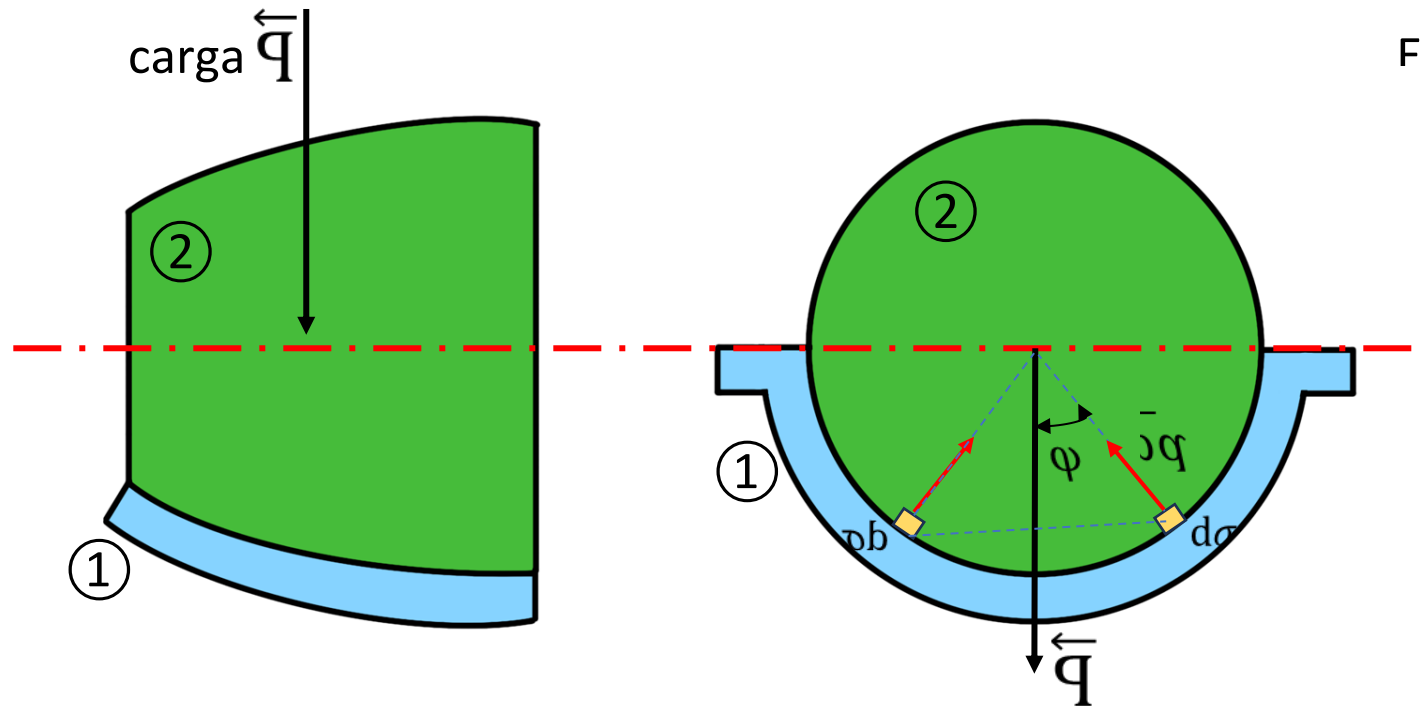
Movimiento a la deriva: aplicación

El regulador de Watt o de bolas:

- El manguito (5) gira sobre un soporte fijo, en lugar del móvil para producir rozamiento.
- El manguito realiza el movimiento vertical generado por la variación de la Fuerza centrífuga de las bolas (3) sin tener que vencer un nuevo rozamiento.



Apoyos de ejes y árboles



Fie Fijo : Mangueta
e Móvil : Gorrón (frontal, transversal)

Par elemental de rotación

$$\vec{P} = \iint p \cdot d\sigma \cdot \vec{n}$$

Por simetría las componentes horizontales se anulan

$$P = \iint p \cdot \cos \varphi \cdot d\sigma$$

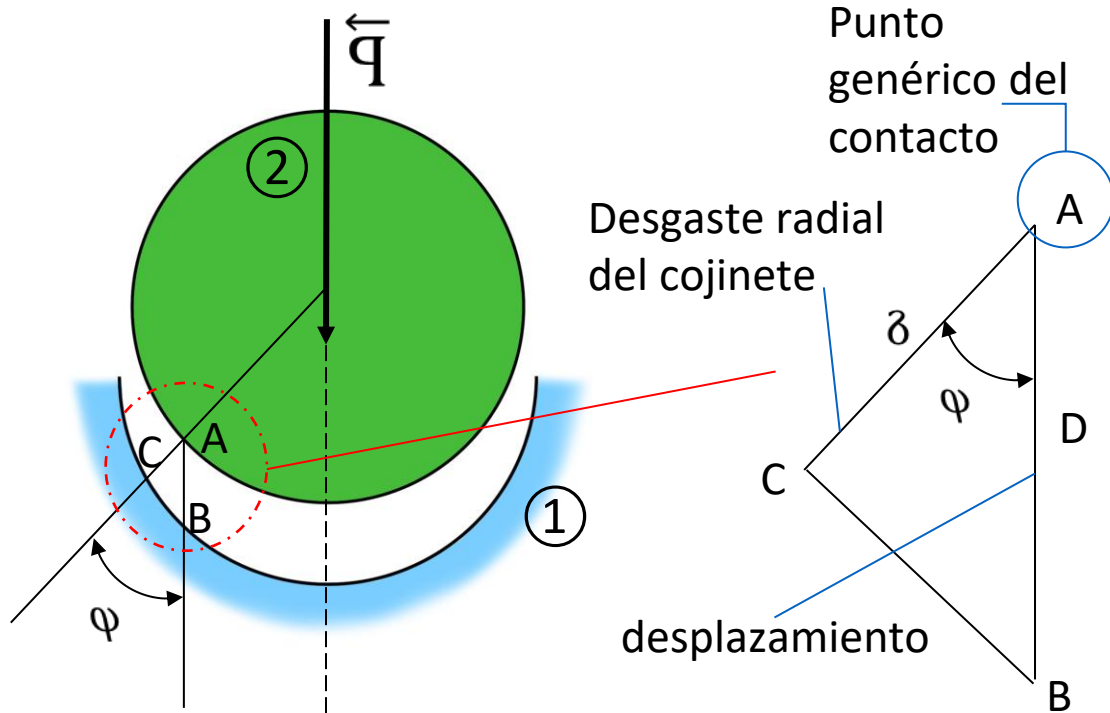
En el caso de un **Gorrón nuevo** la distribución de presiones a lo largo de la superficie de contacto se considera constante ($p=cte$)

$$P = p \cdot \iint \cos \varphi \cdot d\sigma \quad \longrightarrow \quad P = p \cdot R \cdot l \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = 2pRl = p \cdot S$$

para el caso de un cilindro de sección constante,
radio R y longitud L $d\sigma = R \cdot L \cdot d\varphi$

Apoyos de ejes y árboles

En el caso de **Gorrón usado** la distribución de presiones en el par de rotación no es constante pero si el desplazamiento del eje producido por el desgaste.



Gorrón usado: $p \neq cte$ $D = \frac{\delta}{\cos \varphi} = cte$

El desgaste δ se considera proporcional a la potencia de rozamiento debido al contacto

$$\delta \propto \text{Pot}_{\text{roz}} \rightarrow \delta = k \cdot \text{Pot}_{\text{roz}}$$

$$\text{Pot}_{\text{roz}} = \mu \cdot p \cdot v = \mu \cdot p \cdot (r \cdot \omega) \quad [W/m^2]$$

$$\delta = \underbrace{k \cdot \mu \cdot \omega}_{\text{constantes}} \cdot p \cdot r$$

$$\frac{p \cdot r}{\cos \varphi} = cte$$

Apoyos de ejes y árboles

Cálculo de la presión en el contacto (p) en un gorrón usado

$$P = \iint_{\sigma} p \cdot \cos \varphi \cdot d\sigma = \frac{p \cdot r}{\cos \varphi} \iint_{\sigma} \frac{\cos^2 \varphi}{r} \cdot d\sigma \quad \text{[A] Geometría del cojinete}$$

$$p = \frac{|\vec{P}| \cdot \cos \varphi}{r \cdot [A]}$$

Cálculo del Par de rozamiento $\overrightarrow{\Phi_R}$ en cojinete:

$$dF_R = \mu \cdot dN = \mu \cdot p \cdot d\sigma$$

$$d\Phi_R = dF_R \cdot r \rightarrow \Phi_R = \iint_{\sigma} \mu \cdot p \cdot r \cdot d\sigma$$

Gorrón nuevo
 $p = cte$

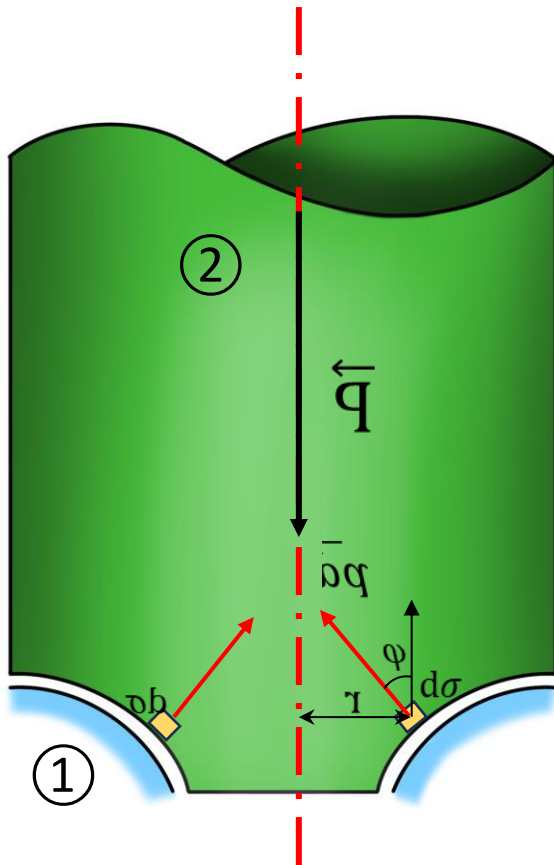
$$\Phi_R = \mu \cdot p \iint_{\sigma} r \cdot d\sigma \quad \text{[B]}$$

Gorrón usado
 $\frac{p \cdot r}{\cos \varphi} = cte$

$$\Phi_R = \mu \cdot \frac{p \cdot r}{\cos \varphi} \iint_{\sigma} \cos \varphi \cdot d\sigma \quad \text{[C]}$$

Aplicación a quicioneras (ranguas)

Apoyo plano perpendicular a la carga



- Distribución de presiones en el contacto:

$$P = \iint_{\sigma} p \cdot \cos \varphi \cdot d\sigma$$

se utilizan las mismas hipótesis que para los cojinetes

hipótesis nueva $p = cte$

$$P = p \cdot \iint \cos \varphi \cdot d\sigma \quad \xrightarrow{\text{para el caso de un cilindro de sección cte, R y L}}$$

$$p = \frac{P}{S}$$

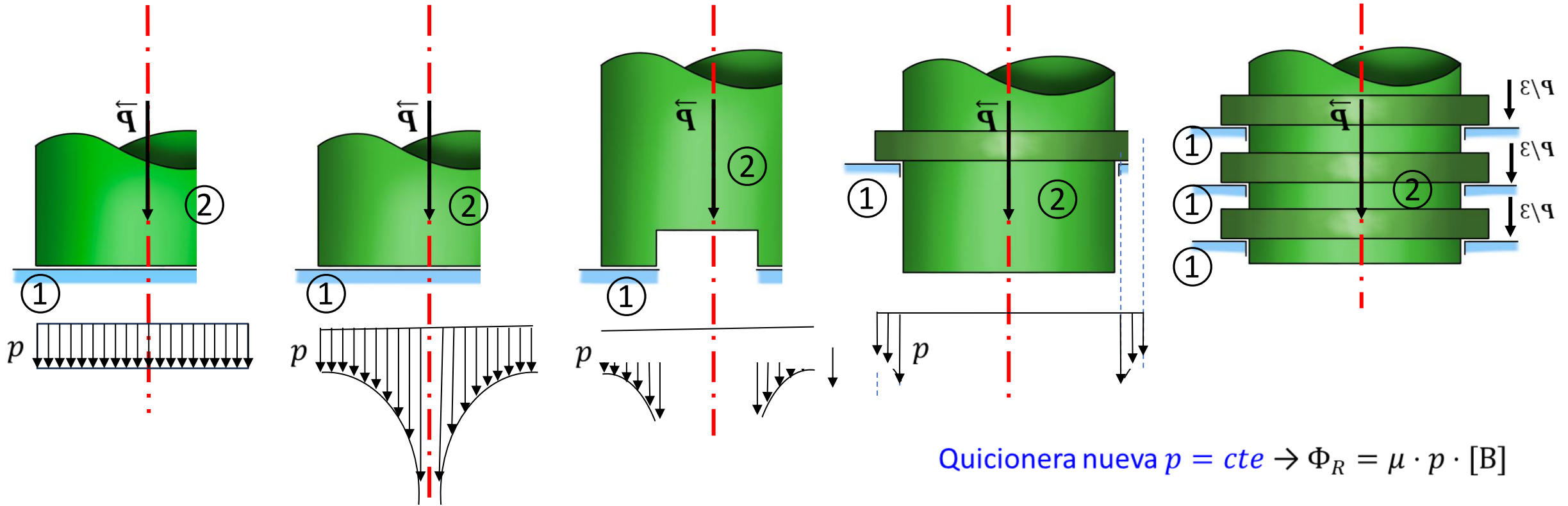
hipótesis usada $\frac{p \cdot r}{\cos \varphi} = cte$

$$p = \frac{P \cdot \cos \varphi}{r \cdot [A]}$$

$$r = 0 \Rightarrow p \rightarrow \infty$$

Aplicación a quicioneras

- Apoyo plano perpendicular a la carga: **quicios planos**. Distribución de presiones $p(r)$



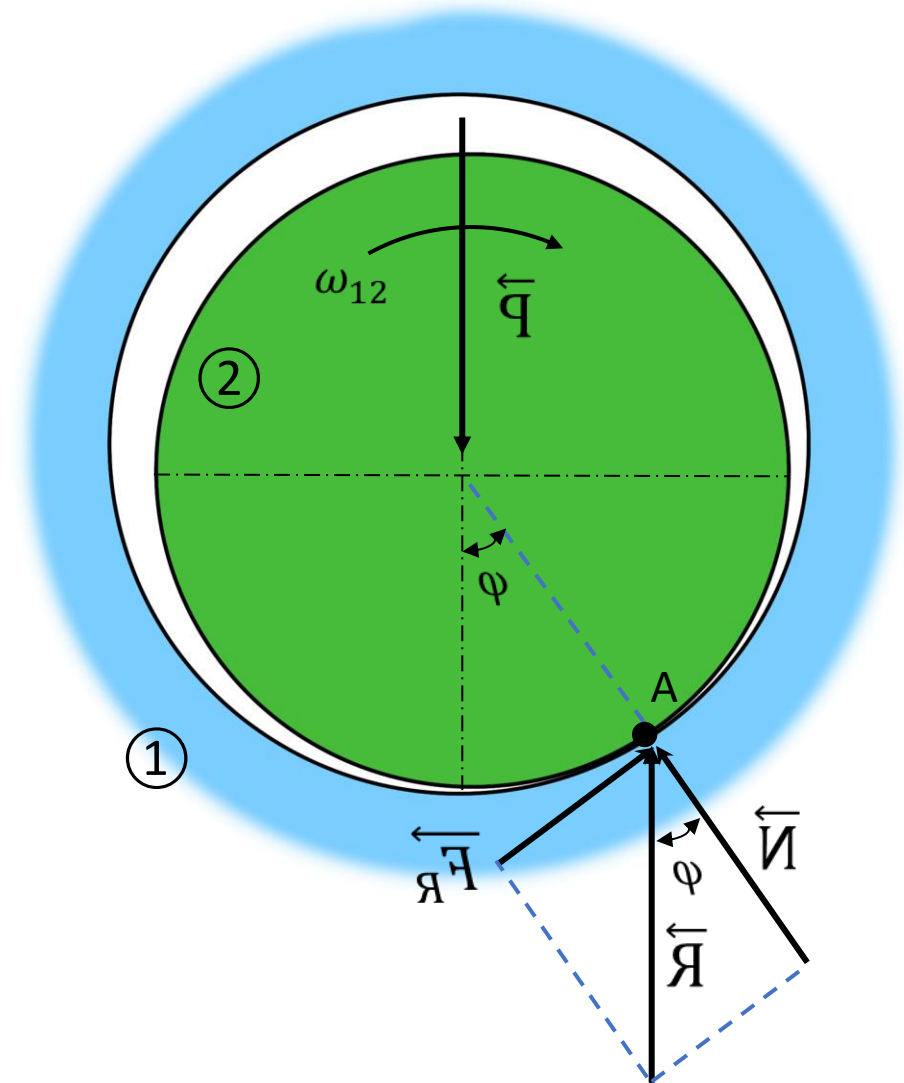
Quicionera nueva $p = cte \rightarrow \Phi_R = \mu \cdot p \cdot [B]$

- Cálculo del par de rozamiento: $\Phi_R = \mu \iint_{\sigma} p \cdot r \cdot d\sigma$

Quicionera usada $\frac{p \cdot r}{\cos \varphi} = cte \rightarrow \Phi_R = \mu \cdot P \frac{[C]}{[A]}$

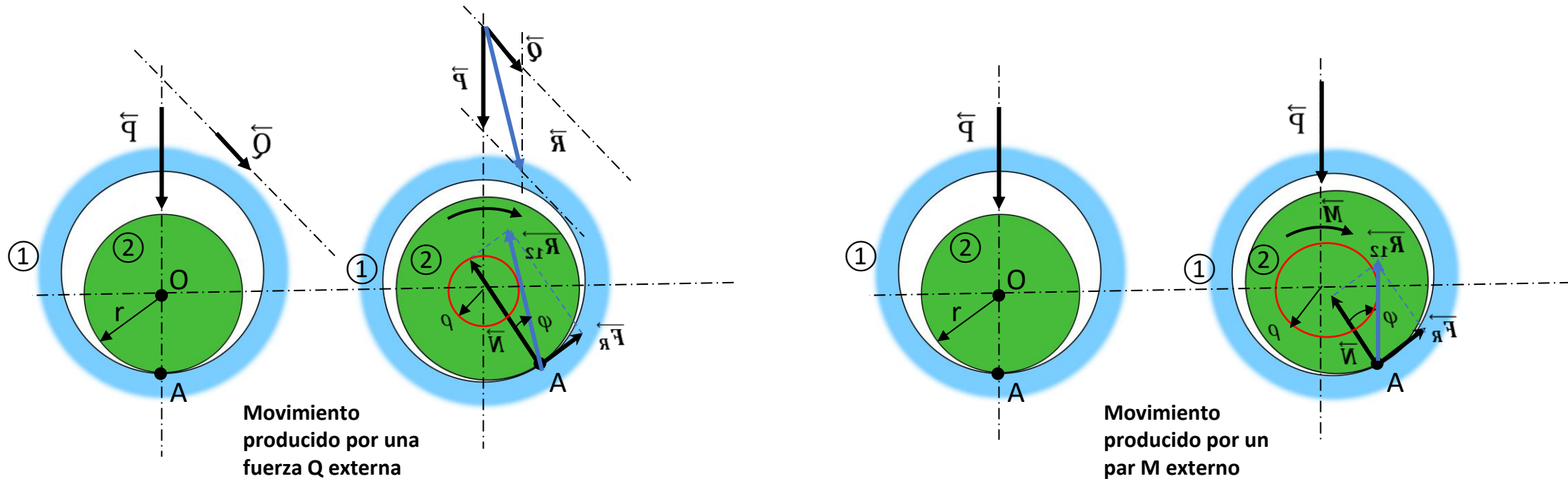
Círculo de rozamiento

- Cuando el gorrón (de radio r) gira dentro de la mangueta, el punto de apoyo se desplaza de la línea de acción de la carga $\mathbf{P}$
- Dicha línea forma un ángulo φ con la línea que une el nuevo punto de apoyo $\mathbf{A}$ con el centro del gorrón
- Hasta que el contacto entre gorrón y apoyo no alcanza el punto $\mathbf{A}$ el eje no comienza a girar
- Par de arrancada: par necesario para que el gorrón comience a girar (alcance el ángulo φ)



Círculo de rozamiento

- Círculo de rozamiento: círculo imaginario cuya tangencia con la fuerza de reacción en el apoyo determina cuando el gorrón comienza a girar dentro de la mangueta



- Su radio es, aproximadamente, el producto del radio del gorrón por el coeficiente de rozamiento

$$\rho = r \cdot \sin(\varphi) \approx r \cdot \tan(\varphi) = \mu \cdot r$$

$(\varphi \rightarrow 0)$

Créditos imágenes

Pág. 3: Imagen generada con Gemini 2.5

Pág. 5: Imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 6:

Imagen 1: Códice Madrid I, Leonardo da Vinci. Biblioteca Nacional: <http://leonardo.bne.es/index.html>. Dominio Público

Imagen 2: Representación del Taller de Imprenta, miniatura en Le Livre des propriétés des choses, Manuscrito Français 9140, f. 285r (París: BnF, c. 1490) <https://www.google.com/search?q=https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b10532588f> . Dominio Público

Imagen 3: Newton, Isaac. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Londini: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater, 1687. <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/9> . Dominio Público

Pág. 10:

Imagen 1: Imagen generada con Gemini 2.5

Imagen 2: Gears animation.gif. https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Gears_animation.gif. Dominio Público.

Imagen 3: Worm Gear.gif. https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Worm_Gear.gif. Dominio Público.

Imagen 4: Imagen generada con Gemini 2.5

Imagen 5: Imagen generada con Gemini 2.5

Imagen 6: Imagen generada con ChatGPT Go

Pág. 24: Detalle del regulador de Watt, de la máquina de vapor, en el Museu Nacional de la Ciència i la Tècnica de Catalunya (mNACTEC), ubicado en Terrassa. https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Catalonia_Terrassa_mNATEC_MaquinaDeVapor_ReguladorDeWatt.jpg . Licencia CC BY 3.0

Créditos imágenes

Pág. 13: [Mecanismo de barras articuladas](#). *“Los mecanismos en la técnica moderna” de I. Artobolevski*, CC BY-SA 3.0, via Europeana

Pág. 14: Ambas imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 15:

Imagen 1 generada con Gemini 2.5

Imagen 2 generada con ChatGPT 5.1

Pág. 18: Imagen adaptada con Gemini 2.5

Pág.19: [Poleas y cables](#), [CC BY-NC-SA](#), via Pixaby

Pág. 33: Detalle del regulador de Watt, de la máquina de vapor, en el Museu Nacional de la Ciència i la Tècnica de Catalunya (mNACTEC), ubicado en Terrassa.
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Catalonia_Terrassa_mNATEC_MaquinaDeVapor_ReguladorDeWatt.jpg. Licencia CC BY 3.0