

OpenCourseWare

TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN SISAMÓN

EDUARDO CORRAL ABAD

RAÚL GISMEROS MORENO

MARIA JESÚS GÓMEZ GARCÍA

JESÚS MENESES ALONSO

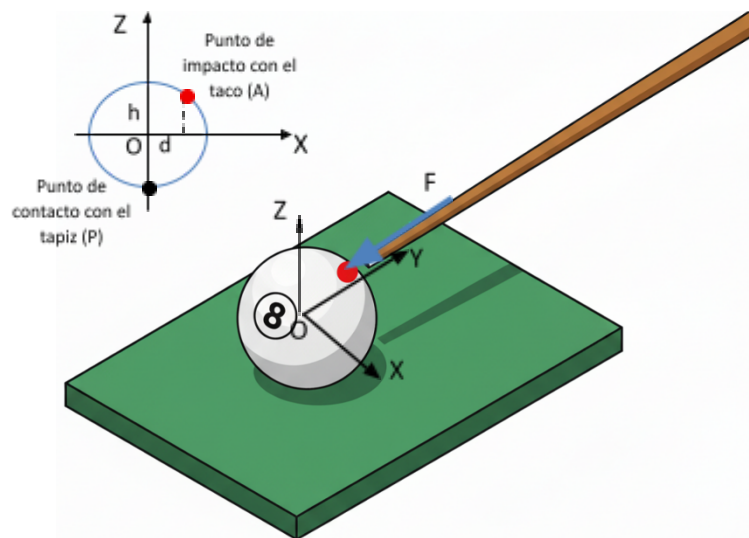
HIGINIO RUBIO ALONSO

ABRAHAM VADILLO MORILLAS

Ejercicios de Fundamentos de teoría de Máquinas y Mecanismos

1. Un jugador experto golpea una bola de billar con su taco. El golpe no es en el centro, sino en un punto específico para imprimir un efecto complejo a la bola. La bola se encuentra inicialmente en reposo sobre el tapete de la mesa. Analizar las fuerzas y pares resultantes máximos del golpe para determinar si la bola comienza a deslizar, a rodar y/o a pivotar sobre el tapete:

DATOS: Una bola de billar, se supone una esfera sólida y homogénea, de masa $m=0.17\text{ Kg}$ y radio $R=0.0285\text{m}$. El taco aplica una fuerza $F=8.5\text{N}$ durante un breve instante de tiempo (en la dirección de eje Y). El golpe se aplica a una altura $h=0.01\text{m}$ sobre el centro de la bola y con un desplazamiento lateral $d=0.015\text{m}$ respecto al plano vertical central. El sistema de coordenadas se sitúa con el origen en el centro de la bola (C) con los ejes que se muestran en la figura. Coeficiente de fricción estática $\mu=0.25$, $\delta=0.5\text{mm}$, $\mu_p=0.2\text{mm}$.



Solución:

En primer lugar, calculamos para el caso del contacto Bola-tapiz las resistencias pasivas

$$N = P = m \cdot g = 0,17 \cdot 9,8 = 1,67\text{ N}$$

$$F_R = \mu \cdot N = 0,25 \cdot 1,67 = 0,42\text{ N}$$

$$\phi_R = \delta \cdot N = 0,5 \cdot 1,67 = 0,83\text{ Nmm}$$

$$\phi_P = \mu_p \cdot N = 0,2 \cdot 1,67 = 0,33\text{ Nmm}$$

Para conocer el movimiento de la bola obtendremos los valores de las fuerzas y momentos que provocan los movimientos de deslizamiento, rodadura y pivotamiento, sólo en caso de superar los valores de las resistencias se producirá el movimiento.

La fuerza: $F = 8,5\text{ N} > F_R = 0,42\text{ N}$ por lo que la bola deslizará

Esa misma fuerza provoca un par de rodadura M_t al aplicarse a una altura h del centro de la bola

$$M_t = F \cdot (R + h) = 8,5 \cdot (28,5 + 10) = 16,04\text{ Nmm}$$

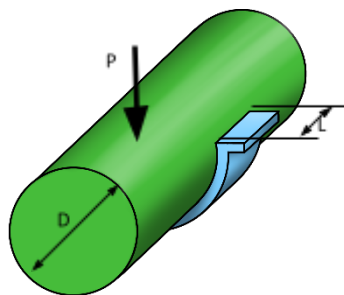
$M_t = 16.04 Nmm > \phi_R = 0,83 Nmm$ por lo que la bola rodará.

Por último, la Fuerza F provoca un par de pivotamiento M_n al aplicarse a una distancia **d** del centro de la bola

$$M_n = F \cdot d = 8.5 \cdot 15 = 6,24 Nmm$$

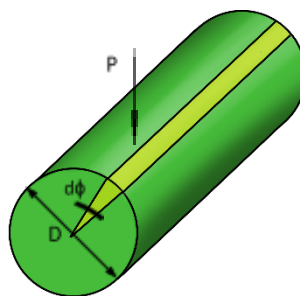
$M_n = 6.24 Nmm > \phi_p = 0,33 Nmm$ por lo que la bola también pivotará.

2. Calcular la presión máxima ejercida por un gorrón nuevo y uno usado (de forma cilíndrica, diámetro D y longitud L) al que se le aplica una carga P como el que se muestran en la figura.



Solución: considerando simetría en el eje vertical se considera el equilibrio de fuerzas entre la carga P y la suma de las componentes verticales del contacto debido a la distribución de presiones:

$$= \iint_{\sigma} p \cdot \cos \varphi \cdot d\sigma, \text{ donde en los dos casos } d\sigma = R \cdot L \cdot d\varphi \text{ (ver imagen)}$$



$$\text{Para el caso de cojinete nuevo (p=cte), } = \cdot \iint_{\sigma} p \cdot \cos \varphi \cdot d\sigma = p \cdot R \cdot L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = 2pRL$$

$p = \frac{P}{DL}$ siendo todos los valores iguales por lo que ese será su máximo.

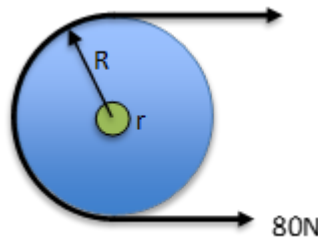
Para el caso de gorrón usado: $\frac{p \cdot r}{\cos \varphi} = cte$ de manera que

$$= \iint_{\sigma} \cos \cos \varphi \cdot d\sigma = \frac{p \cdot r}{\cos \cos \varphi} \iint_{\sigma} \frac{\varphi}{r} \cdot d\sigma$$

$$P = \frac{p \cdot R \cdot L}{\cos \cos \varphi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi \cdot d\varphi = \frac{p \cdot R \cdot L}{\cos \cos \varphi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos \cos 2\varphi}{2} \cdot d\varphi = \frac{p \cdot R \cdot L}{\cos \cos \varphi} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$p = \frac{2P \cos \cos \varphi}{\pi R L} = \frac{4P}{\pi D L} \cos \cos \varphi \rightarrow p_{max} = \frac{4P}{\pi D L}$$

3. La polea de la figura tiene un radio de $R=75 \text{ mm}$ y un peso despreciable que se ajusta libremente en un eje fijo de radio $r=10 \text{ mm}$ y coeficiente de fricción estática es de $\mu=0.2$. Se pide determinar:
- la fuerza mínima necesaria para iniciar el movimiento de la polea en sentido horario.
 - Si la misma polea rota con velocidad angular constante en sentido antihorario, con una fuerza de tracción de $F=85 \text{ N}$ determinar el coeficiente de fricción dinámico, μ_d .



Solución:

Este problema no trata de una polea ideal, sino de una real con fricción en su eje. La clave para resolverlo es entender el concepto del círculo de rozamiento.

Cuando la polea está a punto de girar, la fuerza de reacción ($F+80 \text{ N}$) del eje no pasa exactamente por el centro de la polea. En su lugar, se desplaza y actúa de forma tangente a un pequeño círculo imaginario llamado círculo de rozamiento.

El radio de este círculo de rozamiento se calcula como: $\rho = r \cdot \tan \varphi$

donde $\varphi = \arctan \mu = \arctan 0.2 = 11.31^\circ$

de manera que $\rho = r \cdot \tan \varphi = 10 \cdot \tan 11.31 = 1.96 \text{ mm}$

La fuerza de reacción desplazada crea un momento de fricción M_f que se opone al movimiento.

- a) Para que la polea comience a girar en sentido horario, la fuerza F debe generar un momento que supere tanto al momento producido por la tensión $T = 80 \text{ N}$ como al momento de fricción estática M_f , que se opondrá a este giro (actuando en sentido antihorario).

Para que el movimiento sea inminente, la suma de momentos alrededor del centro de la polea debe ser cero.

$$\sum M_o = 0$$

$$F \cdot R - T \cdot R - M_f = 0$$

Donde el momento de F es positivo (horario) y los de T y la fricción son negativos (antihorarios).

- Cálculo del momento de fricción (M_f): Este momento es igual a la fuerza de reacción total en el eje ($Q = F + T$) multiplicada por el radio del círculo de fricción (ρ).

La fuerza de reacción en el eje es la que soporta las dos cargas que tiran hacia la derecha, por lo que:

$$M_f = Q \cdot \rho$$

Sustituyendo los valores en la ecuación de equilibrio de pares se obtiene:

$$F \cdot 75 - 80 \cdot 75 - (F + 80) \cdot 1.96 = 0$$

$$F = \frac{6156.8}{73.04} = 82.29 \text{ N}$$

- b) Ahora, la polea gira en sentido antihorario con velocidad constante, lo que significa que la suma de momentos sigue siendo cero. La fuerza de tracción es $F=85 \text{ N}$. La tensión es de 80 N y el momento de fricción dinámico (M_{fd}) se oponen (actúan en sentido horario).

$$\sum M_o = 0$$

$$F \cdot R - T \cdot R - M_{fd} = 0$$

Cálculo del momento de fricción (M_{fd}): El proceso es análogo al anterior.

La fuerza de reacción en el eje sigue siendo la suma de las cargas: $M_{fd} = Q \cdot \rho = (F + T) \cdot r \cdot \tan \mu_d$

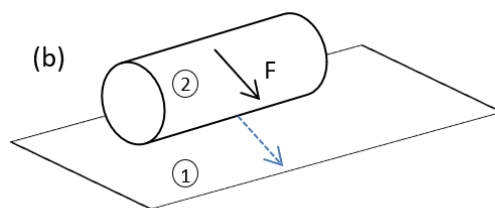
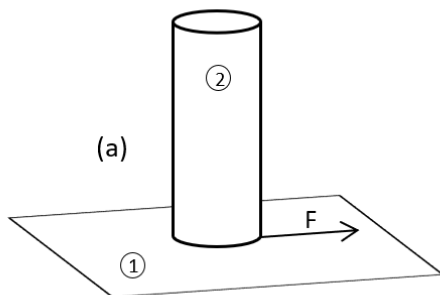
Por lo tanto: $M_{fd} = (85 + 80) \cdot 12 \cdot \tan \mu_d$

Sustituimos los valores en la ecuación de momentos y despejamos μ_d

$$85 \cdot 10 - 80 \cdot 10 - 1920 \cdot \tan \mu_d = 0$$

$$\mu_d = 0.026$$

4. Se pretende mover un tambor de hierro de 500 N de peso y $R=50 \text{ cm}$ sobre una plancha de acero, siendo $\mu=0.16$, $\delta=0.05 \text{ cm}$ los coeficientes de resistencia al deslizamiento y rodadura respectivamente. Se pide determinar la fuerza necesaria para moverlo si:
- Se arrastra (ver figura a)
 - Se hace rodar sin deslizar (ver figura b)



Solución:

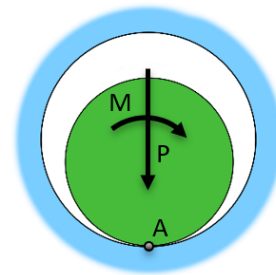
- a) Para el primer caso se considera que el cilindro se desliza debido al efecto de la fuerza F en la dirección del plano de la plancha. La fuerza para que el sólido se mueva será aquella que venza la resistencia al deslizamiento, es decir: $F > F_R = \mu \cdot N$ donde $N = P = 500N$ por lo tanto $F_R = 0.16 \cdot 500 = 80N$
- b) En el siguiente caso el cilindro para hacer rodar el cilindro, el par generado por la fuerza F debe ser mayor que el par de resistencia a la rodadura, es decir: $F \cdot 2R > M_R = \delta \cdot N = 0.05 \cdot 500 = 25Ncm$ por lo tanto

$$F > \frac{25}{100} = 0.25N$$

Para que haya rodadura pura el valor de la fuerza no puede sobrepasar el valor de la fuerza de rozamiento, es decir: $0.25 < F < 80$

5. Se dispone de un par elemental, que consiste en un eje de radio 0.07 m y su correspondiente porta-ejes. En un ensayo de arrancada se observa que, para un peso en el eje de $P=700N$, en el instante de inicio de deslizamiento del eje sobre el porta-ejes, el ángulo que forma la normal con la vertical es de $\phi=5^\circ$. Se pide calcular:

- a) el radio del círculo de rozamiento
b) el coeficiente de rozamiento eje-portaeje
c) El par de arranque



Solución:

- a) el valor del radio del círculo de rozamiento se obtiene mediante la ecuación:
- $$\rho = r \cdot \sin \varphi = 0.07m \cdot \sin 5^\circ = 6.1mm$$
- b) el coeficiente de rozamiento eje-portaejes se obtiene de $\mu = \tan \varphi = 0.087$
- c) El par de arranque se obtiene a partir de la reacción $R = P = 700N$ y el radio del círculo de rozamiento

$$M_a = R \cdot \rho = 700N \cdot 6.1mm = 4.27Nm$$