

Ingeniería de Control II

Práctica 1: Cálculo de reguladores PID discretizados

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido

31 de enero de 2025



1. Sistemas de control digital

Los reguladores en un sistema de control pueden ser implementados utilizando varias técnicas y componentes, por ejemplo: sistemas mecánicos, sistemas hidráulicos, circuitos electrónicos analógicos ó digitales, y también mediante microprocesadores. En comparación a lo componentes analógicos estos últimos tienen una respuesta relativamente lenta; sin embargo, el continuo desarrollo de microprocesadores más rápidos hace que en la práctica esta limitación desaparezca, otorgándonos una gran versatilidad en el diseño y entonación de los parámetros del regulador. En general, la topología típica a considerar en el caso de los sistemas de control digital es la que se muestra en la Figura 1.

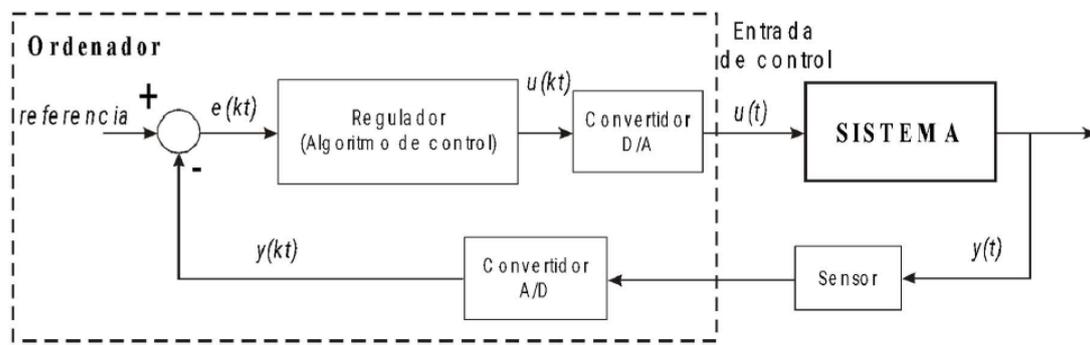


Figura 1: Sistema de control digital con microprocesador

En general, en los sistemas de control digital es necesario el uso de convertidores analógico/digitales (A/D) y digitales/analógicos (D/A), puesto que las señales E/S del ordenador son digitales y la planta o proceso a controlar normalmente utiliza señales analógicas (Figura 1). Ambos convertidores muestran la señal cada T_s segundos, donde T_s es el tiempo de muestreo y es uno de los parámetros más importantes a considerar en el diseño de los sistemas de control digitales.

En el sistema de control digital de la Figura 1, el regulador es un programa de alto o bajo nivel que se ejecuta sobre un procesador dedicado con el mínimo equipamiento hardware necesario para realizar las tareas de control ó como en nuestro caso sobre un ordenador personal.

2. Diseño de algoritmos de control digitales

2.1 Principios de Discretización

2.1.1. Aproximación de ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencia

Para ser implementado en un ordenador digital las ecuaciones dinámicas de los componentes del sistema deben ser escritas como ecuaciones en diferencias que aproxime a las ecuaciones diferenciales o funciones de transferencia continuas del sistema. Existen varias técnicas para aproximar una ecuación diferencial mediante ecuaciones en diferencias.

En el caso de la derivada existen tres técnicas básicas: aproximación en diferencias hacia adelante, aproximación en diferencias hacia atrás, y aproximación trapezoidal. La aproximación en diferencias hacia adelante de la siguiente manera:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{k=KT_s} = \frac{y(k+1) - y(k)}{T_s} \quad (1)$$

donde T_s es el tiempo de muestreo

Si utilizamos la expresión anterior para discretizar una función de transferencia continua $G(s)$ y obtener su transformada en Z , tenemos que:

$$G_1(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T_s}} \quad (2)$$

Por otro lado, la aproximación en diferencias hacia atrás establece que:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{k=KT_s} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T_s} \quad (3)$$

Al discretizar la función de transferencia $G(s)$ con la expresión anterior obtenemos:

$$G_1(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T_s}} \quad (4)$$

Finalmente, la aproximación trapezoidal establece que:

$$G_1(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{T_s}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)} \quad (5)$$

Para aproximar una integral existen métodos equivalentes que nos permiten modelar un sistema continuo en tiempo discreto. Es importante recalcar que a pesar de que las técnicas de aproximación anteriores difieren ligeramente entre sí, las características dinámicas de las ecuaciones en diferencia obtenidas varían significativamente y no en correspondencia con sus respectivas ecuaciones diferenciales. En este aspecto, el método del trapecio es el que presenta mejores características de precisión en la aproximación.

2.1.2. Discretización mediante la transformada Z de $G(s)$

Los efectos del tratamiento discreto de las señales en un sistema de control digital, y por lo tanto de los convertidores A/D y D/A, pueden modelarse mediante un muestreador-retenedor de orden cero, tal y como se observa en la Figura 2.

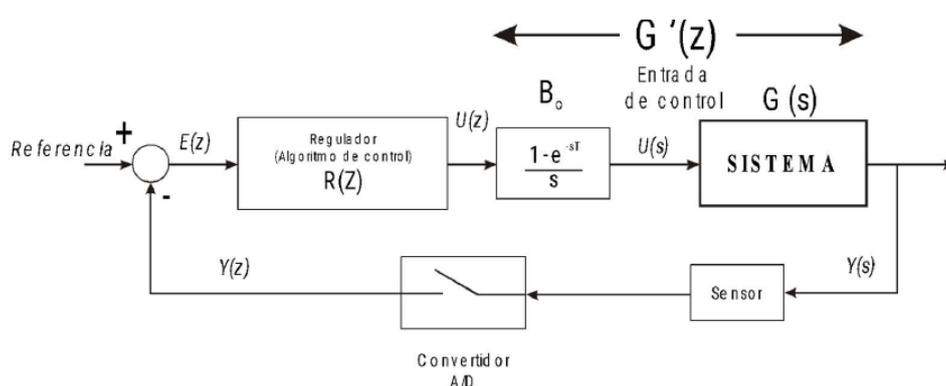


Figura 2: Modelado de un sistema de control digital con un muestreador - retenedor de orden cero

En este caso la función de transferencia en Z del sistema proceso-retenedor viene dada por:

$$G'(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} G(s) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \quad (6)$$

2.2 Diseño de reguladores digitales

En la práctica existen dos enfoques para diseñar reguladores digitales:

- 1 **Diseño continuo y posterior discretización.** En este caso el regulador se diseña como si se tratase de un sistema continuo, y posteriormente el resultado se discretiza.
- 2 **Diseño digital directo.** Se discretiza el modelo de la planta y se realiza el diseño del regulador mediante técnicas discretas basadas en el esquema de la Figura 2.

2.2.1. El regulador PID digital

El regulador PID puede ser discretizado reemplazando la derivada por una diferencia hacia atrás:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \approx \frac{\varepsilon(kT_s) - \varepsilon((k-1)T_s)}{T_s}, \quad (7)$$

y la integral por una sumatoria, en este caso una aproximación rectangular también hacia atrás:

$$\int \varepsilon dt = T_s \sum_{i=0}^k \varepsilon(i), \quad (8)$$

donde T_s es el período de muestreo de la señal del error.

Considerando que las señales no cambian durante el intervalo de muestreo, y que T_s viene dado por el tiempo de ciclo de control de nuestro programa, la expresión para el regulador PID digital puede ser escrita de la siguiente forma:

$$u(k) = C\varepsilon(k) + \frac{T_d}{T_s} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) + \frac{T_s}{T_i} \sum_{i=0}^k \varepsilon(i). \quad (9)$$

La expresión anterior es conocida como la forma "posicional" del regulador PID digital. La forma "incremental" se obtiene a partir de la ecuación anterior utilizando una aproximación rectangular hacia adelante, obteniéndose:

$$\Delta u(k) = C(\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) + \frac{T_d}{T_s}(\varepsilon(k) - 2\varepsilon(k-1) + \varepsilon(k-2)) + \frac{T_s}{T_i}\varepsilon(k) \quad (10)$$

La diferencia entre ambas expresiones es que en cada instante de muestreo, la forma incremental proporciona un incremento de la señal de control, mientras que la forma posicional nos da un valor absoluto de $u(k)$.

2.2.2. Tiempo de muestreo

Como se observa en las ecuaciones anteriores en el diseño de reguladores digitales la selección adecuada del valor del período de muestreo T_s es importante y depende del sistema. Un valor de T_s demasiado grande degrada la estabilidad del sistema perdiéndose información sobre las señales si estas cambian rápidamente. Por otro lado, si el valor de T_s es muy pequeño será necesario utilizar convertidores A/D más rápidos y con mayor resolución.

Con el fin de reconstruir adecuadamente la señal muestreada, el teorema de Shannon establece un criterio para la selección de T_s , esto es:

$$\omega_s > 2\omega_b \quad (11)$$

donde ω_s es la frecuencia de muestreo y ω_b es el ancho de banda de la señal, ambos valores medidos en rad/seg.

También existen reglas prácticas para determinar el tiempo de muestreo. Una muy utilizada por los ingenieros de control es hacer cumplir la siguiente relación:

$$T_s < \frac{T_{dom}}{10} \quad (12)$$

donde T_s es el periodo de muestreo y T_{dom} es la constante de tiempo dominante del sistema. En esta práctica elegimos $T_s = T_{dom}/10$. Los procesos industriales suelen ser modelados con más o menos precisión como sistemas de primer orden. En estos sistemas la constante de tiempo corresponde al tiempo en el cual la salida alcanza el 0.63 del valor final.

En general, los intervalos de muestreo de 1 segundo son adecuados para procesos de flujo, presión, nivel, y temperatura, mientras que los sistemas electromecánicos requieren tiempos de muestreo del orden de los milisegundos.

3. Control de posición de un motor de CC

Cuando se consideran diferentes métodos de actuación y medidas de posición y velocidad, los motores ofrecen ejemplos prácticos de situaciones características de los sistemas de control en tiempo real; además, son relativamente baratos y ofrecen un buen entorno de aprendizaje. Por otro lado, el software desarrollado para el control de motores es aplicable a otros problemas de control haciendo cambios menores en su configuración. En la Figura 3 se muestra un sistema de control simplificado para un motor de corriente continua.

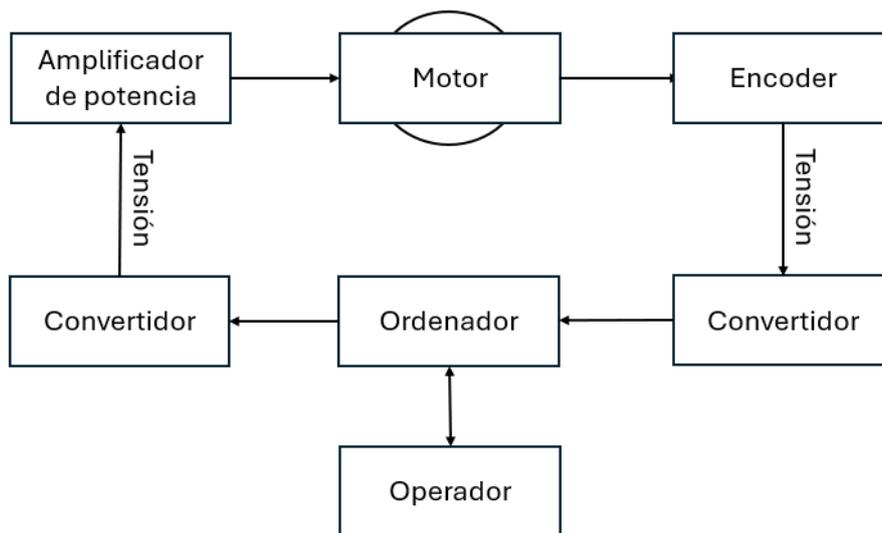


Figura 3: Sistema de control digital de un motor de CC

3.1. El sistema físico

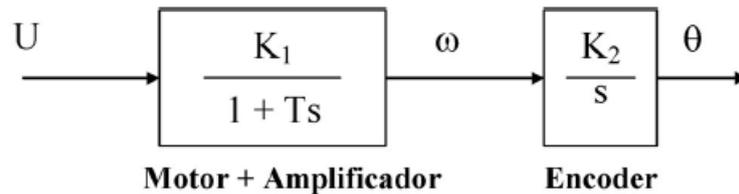


Figura 4: Sistema motor con salida en posición

La función de transferencia en lazo abierto del motor con salida en posición a considerar, según se muestra en la Figura 4, viene dada por:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{(1 + Ts)} \frac{K_2}{s} \quad (13)$$

, donde K_1, K_2 y T , son las ganancias del motor, el encoder y la constante de tiempo del motor, respectivamente. La identificación de los parámetros del sistema se realiza mediante el análisis de la respuesta temporal del sistema en lazo abierto.

3.2. Diseño del regulador PID

Para controlar el motor en posición se calcula un regulador PID continuo para la función de transferencia (13). Como el motor posee un polo en el origen no es necesario calcular la acción integral del PID, con lo cual para controlar el sistema es suficiente con calcular un regulador PD de la forma $R(s) = K(s + a)$.

Una vez calculado el regulador PID continuo se procede a discretizar el sistema. Para ello se utiliza discretización aproximada rectangular hacia atrás, haciendo el cambio de variable:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \quad (14)$$

donde T_s el tiempo de muestreo. El regulador obtenido nos queda:

$$R(z) = K \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_s} + a \right) \quad (15)$$

3.3. Tiempo de muestreo

El tiempo de muestreo del sistema de control digital se puede seleccionar utilizando del ancho de banda del sistema en lazo cerrado, que se define como la frecuencia a la cual la ganancia del sistema en lazo cerrado esta 3db por debajo de la ganancia a frecuencia cero, o bien como 10 veces menor a la constante de tiempo del sistema.

4. Trabajo en simulación

Dado el motor de corriente continua con los siguientes parámetros, según el esquema de la Figura 4: $K_1 K_2 = 3,60$ y $T = 0,12$. Se pide diseñar el regulador PD ideal continuo necesario para que el sistema en lazo cerrado cumpla con las siguientes especificaciones:

- $M_p = 12\%$
- $t_p = 0.44$ segundos

Para comprobar los resultados obtenidos en este apartado se puede completar el fichero P1.mlx y ejecutarlo con el botón Run". Para esto, primero posicionar el directorio corriente de Matlab en la carpeta de la práctica (ver Figura 5 y posteriormente abrir desde el directorio corriente el fichero P1.mlx.

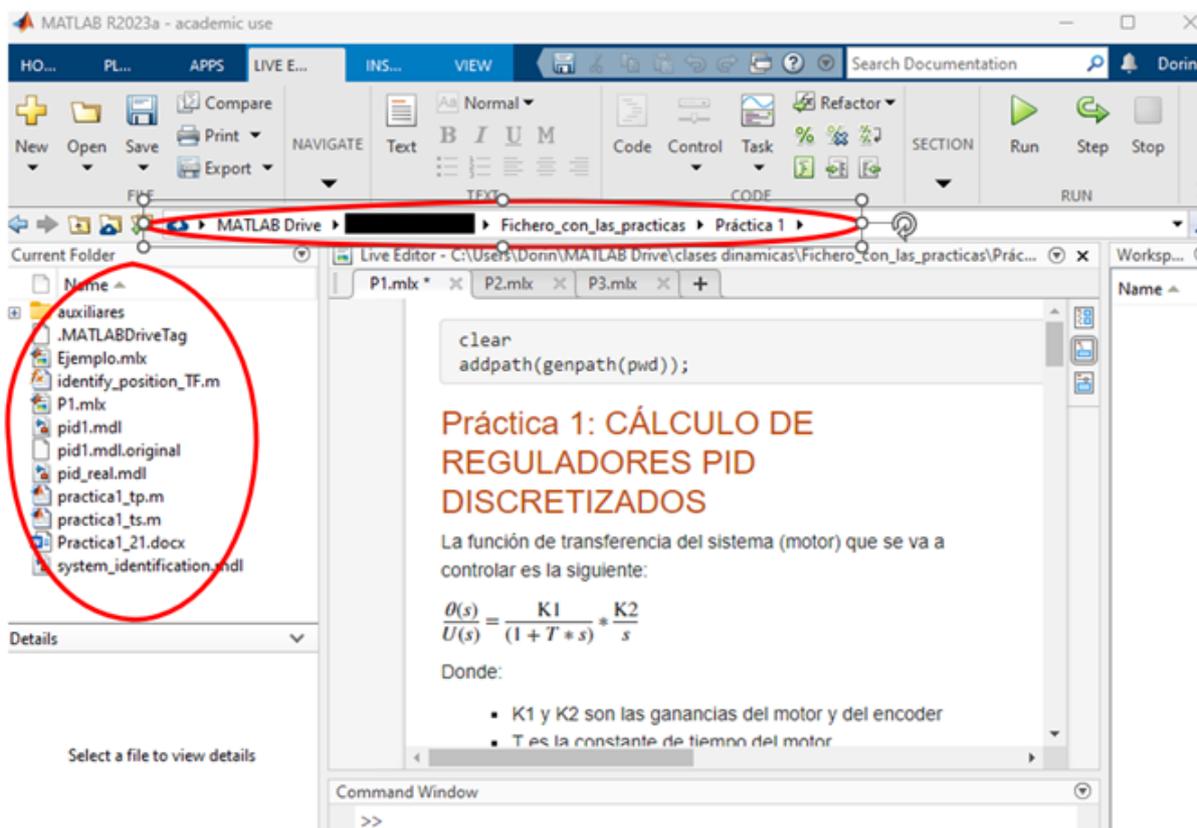


Figura 5: Interfaz Matlab

P1- Cálculo de reguladores PID discretizados

- 1 Una vez hecho esto, discretizar el regulador por el método de Euler hacia atrás y así obtener la expresión del regulador PD en función de z . Utilizar el periodo de muestreo que se crea más adecuado.
- 2 Lanzar la herramienta Simulink de Matlab y abrir el fichero "*pid1.mdl*". Una vez hecho esto, familiarizarse con cada uno de los bloques del mismo, identificando la equivalencia entre el sistema de la Figura 4 y su esquema realimentado representado en Simulink.
- 3 Asignar los valores a cada uno de los bloques según los parámetros dados del motor y los obtenidos para el regulador.
- 4 Utilizando el archivo, *pid1.mdl*, analizar los resultados obtenidos comparando con las especificaciones del problema.
 - Medir el tiempo de establecimiento, el tiempo de pico y la sobreoscilación del sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta obtenida.
 - Representar gráficamente tanto la salida como la acción de control.
- 5 Analizar la influencia del periodo de muestreo en los resultados. Para ello, modificar el tiempo de muestreo e introducir el nuevo regulador discreto obtenido.
- 6 Analizar la influencia de los parámetros del sistema, estudiando lo que ocurre al variar esos parámetros.